Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36+62-50

О СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. К. Лилов

(София)

Ставится задача о стабилизации по позиционным координатам и скоростям стационарных движений голономных механических систем при помощи сил, действующих только на циклические координаты. Задача сводится к стабилизации тривиального решения некоторой системы дифференциальных уравнений, в которой возмущения циклических импульсов рассматриваются как управления. В качестве примера рассматривается асимптотическая стабилизация положений относительного равновесия спутника-гиростата на круговой орбите.

1. Рассмотрим голономную склерономную механическую систему с n степенями свободы. Пусть q_r — обобщенные координаты, $q_r^{\cdot}$, p_r $(r = 1, \ldots, n)$ — обобщенные скорости и импульсы. T и Π — кинетическая и потенциальная энергии, соответственно, $H = T + \Pi$ — функция Гамильтона. Будем предполагать, что на систему помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом Π, действуют еще и непотенциальные силы Q_r $(r = 1, \ldots, n)$.

Будем считать, что q_α $(\alpha = m + 1, \ldots, n)$ — циклические координаты, т. е. $\partial H / \partial q_\alpha = 0$, и что $Q_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Всюду в дальнейшем индексы α, i пробегают указанные выше значения. Функция Гамильтона имеет вид [1]

$$H = H(q_i, p_i, p_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{r,\ s=1}^{n} c_{rs}(q_1, \ldots, q_m) p_r p_s + \Pi(q_1, \ldots, q_m)$$

Поэтому уравнения движения системы запишутся в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(q) p_k + \sum_{\alpha=m+1}^{m} c_{i\alpha}(q) p_\alpha \tag{1.1}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{r,\ s=1}^{n} \frac{\partial c_{rs}(q)}{\partial q_i} p_r p_s - \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha$$

Если $Q_\alpha = 0$, то система будет находиться под действием только потенциальных сил и может совершать стационарные движения, в которых позиционные координаты и циклические импульсы q_i, p_α остаются постоянными, а циклические координаты меняются линейно со временем.

Пусть имеется некоторое стационарное движение $q_i = q_i^\circ$, $p_i = p_i^\circ$, $p_\alpha = c_\alpha$. Ставится задача определить таким образом обобщенные силы Q_α, чтобы это движение было асимптотически устойчивым по отношению к части переменных q_i, p_i [2]. Без ограничения общности можно считать, что $q_i^\circ = 0$. Позиционные импульсы p_i° определяются из системы уравнений (1.1), в которых $q_i = 0$, $p_\alpha = c_\alpha$.

Дадим системе малые начальные возмущения. Сохраняя для значений q_i в возмущенном движении прежние обозначения и обозначая через ξ_i и η_α возмущения соответственно позиционных и циклических импульсов $p_i = p_i^\circ + \xi_i$, $p_\alpha = c_\alpha + \eta_\alpha$, получим после подстановки q, p в (1.1) уравнения возмущенного движения

$$\frac{dq_i}{dt} = U_i(q, \xi, \eta) \equiv \sum_{k=1}^{m} c_{ik}(q)(p_k^\circ + \xi_k) + \sum_{\alpha=m+1}^{m} c_{i\alpha}(q)(c_\alpha + \eta_\alpha)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = V_i(q, \xi, \eta) \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial c_{jk}(q)}{\partial q_i}(p_j^\circ + \xi_j)(p_k^\circ + \xi_k) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial c_{j\alpha}(q)}{\partial q_i}(p_i^\circ + \xi_j)(c_\alpha + \eta_\alpha) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=m+1}^{n} \frac{\partial c_{\alpha\beta}(q)}{\partial q_i} \times$$

$$\times (c_\alpha + \eta_\alpha)(c_\beta + \eta_\beta) - \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i}$$

$$d\eta_\alpha / dt = Q_\alpha \qquad (1.2)$$

Таким образом, поставленная задача об асимптотической стабилизации рассматриваемого стационарного движения $q_i = \text{const}$, $p_i = \text{const}$, $p_\alpha = \text{const}$ ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m + 1, \ldots, n$) по отношению к позиционным координатам и импульсам q_i, p_i при помощи обобщенных сил Q_α, действующих на циклические координаты q_α, сводится к задаче об асиптотической стабилизации нулевого решения $q_i = \xi_i = \eta_\alpha = 0$ ($i = 1, \ldots, m$; $\alpha = m + 1, \ldots, n$) системы (1.2) при $Q_\alpha = 0$ по отношению к q_i, p_i ($i = 1, \ldots, k$) при помощи подходяще выбранных сил Q_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$).

2. Рассмотрим систему

$$dq_i/dt = U_i(q_j, \xi_j, \eta_\alpha), \qquad d\xi_i/dt = V_i(q_j, \xi_j, \eta_\alpha) \qquad (2.1)$$

Силы Q_α не фиксированы, а подлежат определению, поэтому на η_α в (2.1) можно смотреть как на управление, выбираемое таким образом, чтобы стабилизировать асимптотически нулевое решение рассматриваемой системы (2.1) из $2m$ уравнений. Если такой выбор $\eta_\alpha = f_\alpha(q_i, \xi_i)$, $f_\alpha(0, 0) = 0$ возможен, то нулевое решение системы (2.1) при таком выборе η_α будет асимптотически устойчивым. Определим силы Q_α по формулам

$$Q_\alpha = \frac{df_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} U_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi_i} V_i\right) \qquad (2.2)$$

Величина η_α определяется по своей производной с точностью до произвольной постоянной, поэтому

$$\eta_\alpha = f_\alpha(q_i, \xi_i) + \eta_\alpha^\circ - f_\alpha(q_i^\circ, \xi_i^\circ) \qquad (2.3)$$

Здесь q_i°, ξ_i°, η_α° — начальные возмущения соответственно позиционных координат, позиционных и циклических импульсов.

Если предположить, что q_i°, ξ_i°, η_α° достаточно малые, то (см. [3], § 74) указанный выбор (2.2) сил Q_α обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (2.1) при условии (2.3) или, что то же, системы

$$\frac{dq_i}{dt} = U_i(q_j, \xi_j, f_\alpha) + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial U_i(q_j, \xi_j, f_\alpha)}{\partial \eta_\alpha} (\eta_\alpha^\circ - f_\alpha^\circ)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = V_i(q_j, \xi_j, f_\alpha) + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial V_i(q_j, \xi_j, f_\alpha)}{\partial \eta_\alpha} (\eta_\alpha^\circ - f_\alpha^\circ) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=m+1}^{n} \frac{\partial^2 V_i(q_j, \xi_j, f_\alpha)}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta} (\eta_\alpha^\circ - f_\alpha^\circ)(\eta_\beta^\circ - f_\beta^\circ) \tag{2.4}$$

$$(f_\alpha^\circ = f_\alpha(q_i^\circ, \xi_i^\circ))$$

Действительно, согласно сделанному предположению, система (2.1) асимптотически устойчива, а система (2.4) отличается от системы (2.1) наличием постоянно действующих возмущений, которые можно сделать произвольно малыми вместе с q_i°, ξ_i°, η_α°.

Чтобы добиться асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1), будем предполагать, что силы Q_α имеют импульсный характер [4]. Введя δ-функцию Дирака и определяя силы, действующие на циклические координаты, по формулам

$$Q_\alpha = \frac{df_\alpha}{dt} + \delta(t - t_0)(f_\alpha^\circ - \eta_\alpha^\circ)$$

получим для возмущений циклических импульсов требуемые значения $\eta_\alpha = f_\alpha(q_i, \xi_i)$.

Рассмотрим первое приближение уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} dq/dt &= L_1 q + L_2 \xi + B_1 \eta \\ d\xi/dt &= L_3 q - L_1^* \xi + B_2 \eta \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$q^* = \|q_1, q_2, \ldots, q_m\|, \quad \xi^* = \|\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\|$$

$$\eta^* = \|\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \ldots, \eta_n\|$$

$$L_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right\|_{i,j=1}^{m}, \quad L_2 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_{i,j=1}$$

$$L_3 = -\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \right\|_{i,j=1}^{m}, \quad B_1 = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_\alpha} \right\|_{i=1,\ \alpha=m+1}^{m\quad n}$$

$$B_2 = -\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_\alpha} \right\|_{i=1,\ \alpha=m+1}^{m\quad n}, \quad L = \left\| \begin{matrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & -L_1^* \end{matrix} \right\|, \quad B^* = \|B_1, B_2\|$$

Причем значения производных от функций берутся в точке $q_i = 0$, $p_i = p_i^\circ$, $p_\alpha = c_\alpha$; звездочка здесь и в дальнейшем означает транспонирование.

Матрицы L_2 и L_3 симметрические, поэтому характеристическое уравнение системы (2.5)

$$\det \left\| \begin{matrix} L_1 - \lambda E & L_2 \\ L_3 & -L_1^* - \lambda E \end{matrix} \right\| = 0 \tag{2.6}$$

где E — единичная матрица $m \times m$, не меняется от замены λ на $-\lambda$ и, следовательно, содержит только четные степени λ. Это означает, что все общие наибольшие делители миноров i-го порядка $D_i(\lambda)$ характеристической матрицы системы (2.5), которые не равны тождественно единице, имеют корень с неотрицательной вещественной частью. Поэтому чтобы добиться асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.5) некоторым управлением η, необходимо [5], чтобы

$$\operatorname{rang} \| B, LB, \ldots, L^{2m-1} B \| = 2m \qquad (2.7)$$

Но условие (2.7) представляет собой условие, необходимое и достаточное для полной управляемости системы (2.5) (см. [4]). Таким образом, вопрос об асимптотической стабилизации нулевого решения системы (2.5) совпадает с вопросом о полной управляемости системы (2.5).

Следовательно, если решение $q = \xi = 0$ асимптотически стабилизируемо, то систему можно перевести в начало координат за конечный интервал времени, притом так, чтобы на этом движении минимизировался некоторый, наперед заданный функционал [4].

Для полной системы (2.1) условие (2.7) может быть необходимым, только если между корнями уравнения (2.6) имеются корни с положительными вещественными частями [5]. Вообще говоря, добавка членов более высокого порядка может упрочить устойчивость в случае $\operatorname{rang} \| B, LB, \ldots, L^{2m-1}B \| < 2m$, если она имеется до асимптотической устойчивости.

Таким образом, можно сформулировать следующее предложение.

Теорема. Для того чтобы некоторое стационарное движение $q_i = \text{const}$ ($i = 1, \ldots, m$) можно было стабилизировать асимптотически по отношению к позиционным координатам и позиционным импульсам q_i, p_i при помощи сил, действующих только на циклические координаты q_α ($\alpha = m + 1, \ldots, n$), достаточно, чтобы ранг матрицы $\| B, LB, \ldots, L^{2m-1}B \|$, где матрицы B и L имеют вид (2.5), равнялся $2m$. Это условие может быть необходимым, только если между корнями уравнения (2.6) имеются корни с положительными вещественными частями.

3. В качестве примера предложенного метода асимптотической стабилизации стационарных движений механических систем рассмотрим задачу об асимптотической стабилизации положений относительного равновесия спутника-гиростата при помощи маховиков. Эта задача представляет самостоятельный интерес.

Будем предполагать, что центр тяжести спутника-гиростата описывает круговую орбиту в ньютоновом поле сил. Будем рассматривать ограниченную задачу, пренебрегая влиянием движения вокруг центра масс на движение центра масс.

В качестве начала инерциальной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$ примем притягивающий центр O_1, начало подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ возьмем в центре масс O спутника и оси направим по главным центральным осям инерции. Введем еще одну подвижную систему координат $Oxyz$, ось z которой направлена по прямой O_1O, ось x — в сторону движения центра масс по прямой, ортогональной оси z и расположенной в плоскости орбиты, ось y дополняет оси x и z до правого триедра. Положение корпуса спутника в орбитальной системе координат $Oxyz$ будем определять координатами q_i $(i = 1, 2, 3)$, в качестве которых возьмем эйлеровы углы ψ, θ, φ. Косинусы углов между системами $Oxyz$ и $Ox_1x_2x_3$ задаются в виде

$$\cos(x, x_i) = \alpha_i, \quad \cos(y, x_i) = \beta_i, \quad \cos(z, x_i) = \gamma_i$$
$$\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$$
$$\alpha_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \quad \alpha_3 = \sin\theta\sin\psi$$
$$\beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta$$
$$\beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \; \beta_3 = -\sin\theta\cos\psi$$
$$\gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

В дальнейшем будем предполагать для простоты выкладок, что гиростат имеет три ротора, направленные по главным осям инерции. Углы поворотов роторов относительно корпуса спутника обозначим через δ_s $(s = 1, 2, 3)$.

Уравнения движения спутника-гиростата в системе $Oxyz$ в предположении, что его центр масс движется по круговой орбите, можно записать в виде уравнений Гамильтона, где

$$q_1 = \psi, \; q_2 = \theta, \; q_3 = \varphi, \; q_4 = \delta_1, \; q_5 = \delta_2, \; q_6 = \delta_3 \quad (n = 6)$$

$$H = -\omega_0 \frac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta} p_1 - \omega_0 \sin\psi\, p_2 + \omega_0 \frac{\cos\psi}{\sin\theta} p_3 +$$
$$+ \frac{1}{2} p^* A p + \frac{3}{2}\omega_0 \sum_{s=1}^{3} A_s \gamma_s^2$$

Здесь ω_0 — угловая скорость вращения спутника по орбите A_s — s-й главный момент инерции спутника.

Матрица A имеет следующие элементы:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, \ldots, 6)$$
$$a_{11} = \frac{h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi}{h_1h_2\sin^2\theta}, \quad a_{12} = \frac{h_2 - h_1}{h_1h_2\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$a_{13} = -\frac{\cos\theta}{h_1h_2\sin^2\theta}(h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi), \quad a_{14} = -\frac{\sin\varphi}{h_1\sin\theta}$$
$$a_{15} = -\frac{\cos\varphi}{h_2\sin\theta}, \quad a_{22} = \frac{h_1\sin^2\varphi + h_2\cos^2\varphi}{h_1h_2}$$
$$a_{23} = \frac{h_1 - h_2}{h_1h_2\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi, \quad a_{24} = -\frac{\cos\varphi}{h_1}, \quad a_{25} = \frac{\sin\varphi}{h_2}$$
$$a_{33} = \frac{1}{h_3} + \frac{\cos^2\theta}{h_1h_2\sin^2\theta}(h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi), \quad a_{34} = \frac{\sin\varphi\cos\theta}{h_1\sin\theta}$$
$$a_{35} = \frac{\cos\varphi\cos\theta}{h_2\sin\theta}, \; a_{36} = -\frac{1}{h_3}, \quad a_{44} = \frac{A_1}{I_1h_1}, \quad a_{55} = \frac{A_2}{I_2h_2}$$
$$a_{66} = \frac{A_3}{I_3h_3}, \; a_{16} = a_{26} = a_{45} = a_{66} = 0$$
$$h_s = A_s - I_s \qquad (s = 1, 2, 3)$$

В этих формулах I_s — момент инерции s-го ротора.

Обобщенные негравитационные силы Q_i $(i = 1, 2, 3)$ в дальнейшем будем считать нулями.

Видно, что в выражении для H не входят координаты δ_s ($s = 1, 2, 3$), т. е. p_{s+3} — циклические импульсы. Поэтому для изучения относительных движений спутника можно воспользоваться уравнениями (1.1), в которых теперь $m = 3$.

Множество положений относительного равновесия полностью определено в работе [6]. Будем предполагать, что $A_1 \neq A_2 \neq A_3$. Можно показать [7], что это множество определяется уравнением

$$A_1\alpha_1\gamma_1 + A_2\alpha_2\gamma_2 + A_3\alpha_3\gamma_3 = 0 \tag{3.1}$$

и что все положения относительного равновесия спутника-гиростата разбиваются на три класса [8].

3.1. Одна из главных осей спутника, например A_2, коллинеарна оси Oz

$$\theta = (2k+1)^{1/2}\pi\ (k = 0,1),\quad \varphi = s\pi\ (s = 0,\ 1),\quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$$

3.2. Одна из главных осей инерции спутника, например A_1, коллинеарна оси Ox

$$\psi = k\pi\ (k = 0,\ 1),\quad \varphi = s\pi\ (s = 0,\ 1),\quad 0 < \theta < \pi$$

3.3. Ни одна из главных осей инерции спутника не коллинеарна осям орбитальной системы координат

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{M + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}\cos\theta,\quad M = \frac{A_2 - A_3}{A_1 - A_2},\ \prod_{i=1}^{3}\alpha_i\gamma_i \neq 0$$

Приведенная потенциальная энергия (потенциал Рауса) W [1,9] в рассматриваемой задаче имеет вид [9]

$$-W = \frac{\omega_0^2}{2}\sum_{s=1}^{3} h_s\beta_s^2 - \frac{3}{2}\omega_0^2\sum_{s=1}^{3} A_s\gamma_s^2 + \omega_0\sum_{s=1}^{3} p_{s+3}\beta_s - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\frac{p_{s+3}^2}{I_s}$$

Величины $\psi, \theta, \varphi, c_{s+3}$ ($s = 1, 2, 3$) должны удовлетворять уравнениям

$$-\frac{\partial W}{\partial\psi} = \omega_0^2\sum_{s=1}^{3} h_s\beta_s\alpha_s + \omega_0\sum_{s=1}^{3} c_{s+3}\alpha_s = 0$$

$$-\frac{\partial W}{\partial\theta} = -\omega_0^2\cos\psi\sum_{s=1}^{3} h_s\beta_s\gamma_s - 3\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\,(A_1\cos^2\varphi + A_2\cos^2\varphi - A_3) -$$

$$-\omega_0\cos\psi\sum_{s=1}^{3} c_{s+3}\gamma_s = 0$$

$$-\frac{\partial W}{\partial\varphi} = \omega_0^2\beta_1\beta_2(h_1 - h_2) - 3\omega_0^2(A_1 - A_2)\gamma_1\gamma_2 + \omega_0(c_4\beta_2 - c_5\beta_1) = 0$$

Из этих уравнений, учитывая 3.1, получим для c_{s+3} следующие выражения:

$$\omega_0^{-1}c_{s+3} = (\chi - h_s)\beta_s - a\gamma_s,\quad a = 3\sum_{s=1}^{3} A_s\gamma_s\beta_s$$
$$(s = 1, 2, 3)$$

В этих формулах χ — произвольный параметр и, следовательно, в любом положении относительного равновесия постоянные значения циклических импульсов c_{s+3} $(s = 1,\ 2,\ 3)$ определяются неоднозначно.

В рассматриваемой задаче матрицы имеют L_1, L_2, L_3, B, как можно показать, следующие элементы:

$$L_1 = \| l_{ik}^1 \|, \quad L_2 = \| l_{ik}^2 \| \quad (l_{ik}^2 = l_{ik}^2)$$

$$L_3 = \| l_{ik}^3 \| \quad (l_{ik}^3 = l_{ki}^3), \quad B = \| b_1, b_2, b_3 \| = \| b_{sk} \|$$

$$(i, k = 1, 2, 3; \quad s = 1, \ldots, 6)$$

$$l_{11}{}^1 = \omega_0 \sin\psi \quad \omega \operatorname{tg}\theta, \quad l_{12}{}^1 = \omega_0, \qquad \left[\cos\psi - \chi \frac{\cos\psi}{\sin^2\theta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{h_1} + \frac{\cos^2\varphi}{h_2}\right)\right]$$

$$l_{21}{}^1 = -\omega_0 \cos\psi, \quad l_{22}{}^1 = \omega_0 \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2 \sin^2\theta} \sin\varphi\cos\varphi\,(a\cos\theta + \chi\sin\psi)$$

$$l_{31}{}^1 = -\omega_0 \frac{\sin\psi}{\sin\theta}, \quad l_{32}{}^1 = \omega_0 \frac{\cos\theta\cos\psi}{\sin^2\theta}\chi\left(\frac{\sin^2\varphi}{h_1} + \frac{\cos^2\varphi}{h_2}\right)$$

$$l_{13}{}^1 = \omega_0\left[\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + \frac{\chi}{\sin\theta}\left(\frac{\beta_2\sin\varphi}{h_1} - \frac{\beta_1\cos\varphi}{h_2}\right) + a\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)\right]$$

$$l_{23}{}^1 = \omega_0\left[-\cos\psi\cos\theta + \chi\left(\frac{\beta_2\cos\varphi}{h_1} + \beta_1\frac{\sin\varphi}{h_2}\right) - a\sin\theta\left(\frac{\cos^2\varphi}{h_1} + \frac{\sin^2\varphi}{h_2}\right)\right]$$

$$l_{33}{}^1 = \omega_0\left[-\frac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta} + \chi\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\beta_1\cos\varphi}{h_2} - \frac{\beta_2\sin\varphi}{h_1}\right) + \right.$$
$$\left. + a\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\right]$$

$$l_{11}{}^2 = \frac{h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi}{h_1 h_2\sin^2\theta}, \qquad l_{12}{}^2 = \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2 \sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$l_{13}{}^2 = -\frac{\cos\theta}{h_1 h_2 \sin^2\theta}(h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi)$$

$$l_{22}{}^2 = \frac{h_1\sin^2\varphi + h_2\cos^2\varphi}{h_1 h_2}$$

$$l_{23}{}^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2 \sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta$$

$$l_{33}{}^2 = \frac{1}{h_3} + \frac{\cos^2\theta}{h_1 h_2 \sin^2\theta}(h_1\cos^2\varphi + h_2\sin^2\varphi)$$

$$l_{11}{}^3 = -\omega_0{}^2\chi, \quad l_{12}{}^3 = \omega_0{}^2(\sin\psi\cos\psi\operatorname{ctg}\theta\chi - a\sin\psi), \quad l_{13}{}^3 = 0$$

$$l_{22}{}^3 = -\omega_0{}^2\left[\frac{\cos^2\psi}{\sin^2\theta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{h_1} + \frac{\cos^2\varphi}{h_2}\right)\chi^2 - \cos^2\psi\chi + \right.$$
$$\left. + 3\cos 2\theta\,(A_1\sin^2\varphi + A_2\cos^2\varphi - A_3)\right]$$

$$l_{23}{}^3 = -\omega_0{}^2\left\{\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\varphi\,\beta_1}{h_2} - \frac{\sin\varphi\,\beta_2}{h_1}\right)\chi^2 + \right.$$
$$+ \left[-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta} + a\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\right]\chi +$$
$$\left. + 6\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,(A_1 - A_2)\right\}$$

$$l_{33}{}^3 = -\omega_0{}^2\left\{\left(\frac{\beta_2{}^2}{h_1} + \frac{\beta_1{}^2}{h_2}\right)\chi^2 - \left[1 - \beta_3{}^2 + 2a\left(\frac{\beta_2\gamma_2}{h_1} + \frac{\beta_1\gamma_1}{h_2}\right)\right]\chi - \right.$$
$$\left. - a\beta_3\gamma_3 + a^2\left(\frac{\gamma_2{}^2}{h_1} + \frac{\gamma_1{}^2}{h_2}\right) + 3\sin^2\theta\cos 2\varphi\,(A_1 - A_2)\right\}$$

$$b_{11} = -\frac{\sin\varphi}{h_1\sin\theta}, \quad b_{12} = -\frac{\cos\varphi}{h_2\sin\theta}, \quad b_{21} = -\frac{\cos\varphi}{h_1}$$

$$b_{22} = \frac{\sin\varphi}{h_2}, \quad b_{31} = \frac{\sin\varphi\cos\theta}{h_1\sin\theta}, \quad b_{32} = \frac{\cos\varphi\cos\theta}{h_2\sin\theta}$$

$$b_{33} = -\frac{1}{h_3}, \quad b_{51} = -\frac{\omega_0\sin\varphi\cos\psi}{h_1\sin\theta}\chi, \quad b_{52} = -\frac{\omega_0\cos\varphi\cos\psi}{h_2\sin\theta}\chi$$

$$b_{61} = -\frac{\omega a}{h_1}\gamma_2 + \frac{\omega_0\beta_2}{h_1}\chi, \qquad b_{62} = \frac{\omega_0 a}{h_2}\gamma_1 - \frac{\omega_0\beta_1}{h_2}\chi$$

$$b_{13} = b_{23} = b_{41} = b_{42} = b_{43} = b_{53} = b_{63} = 0$$

Если некоторое положение относительного равновесия спутника окажется стабилизируемым, то, согласно п. 2, это означает, что, вращая подходящим образом роторы, можно добиться асимптотической устойчивости рассматриваемого положения относительного равновесия. Другими словами, моментами, приложенными к маховикам, можно «гасить» любые достаточно малые возмущения стабилизируемой точки относительного равновесия и приводить систему в состояние равновесия за конечный промежуток времени.

Возможность асимптотической стабилизации данной стационарной точки определяется рангом матрицы

$$C = \| B, LB, \ldots, L^5B \|$$

Исследуем ранг матрицы C на семействах 1 и 2. Для точек семейства 1 имеем

$$\det \| b_1,\ b_2\ b_3,\ Lb_1,\ L^2b_1,\ Lb_3 \| =$$

$$= \pm 27\frac{\omega_0^7}{h_1^3h_2h_3^2}\cos\psi(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)^2$$

$$\det \| b_1,\ b_2\ b_3,\ Lb_1,\ L^2b_3,\ Lb_3 \| =$$

$$= \pm 27\frac{\omega_0^7}{h_1^2h_2h_3^3}\sin\psi(A_1 - A_2)^2(A_2 - A_3)$$

Имеем либо $\sin\psi \neq 0$, либо $\cos\psi \neq 0$, поэтому все стационарные точки семейства 1, которые геометрически можно представить как поворот на произвольный угол вокруг одной из главных осей инерции спутника, коллинеарной оси Oz, можно сделать асимптотически устойчивыми моментами, приложенными к маховикам.

В точках семейства 2

$$\det \| b_1,\ b_2,\ b_3,\ Lb_1,\ L^2b_1,\ Lb_3 \| =$$

$$= \pm \frac{27\omega_0^7}{h_1^3h_2h_3^2}\sin\theta\cos^2 2\theta(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)^2$$

Таким образом, все положения относительного равновесия семейства 2, которые получаются одно из другого поворотом на угол θ около оси Ox_1, коллинеарной оси Ox, могут быть стабилизированы асимптотически моментами, приложенными к маховикам, за исключением случаев

$\theta = \pi / 4$, $3\pi / 4$. Можно показать, что в этих случаях ранг матрицы C равняется четырем и, следовательно, точки $\theta = \pi / 4$, $3\pi / 4$ неуправляемы. Возможность их стабилизации определяется членами выше первого порядка малости, так как матрица L при $\cos 2\theta = 0$ имеет, как можно показать после громоздких вычислений, пять собственных значений с неотрицательными вещественными частями и спектр 4×4 — матрицы Q, указанной в работе [10], не может содержать их всех.

Автор благодарит В. В. Румянцева за постановку задачи и обсуждение статьи.

Поступила 22 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1957, № 4.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. Лилов Л. К. Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положение равновесия. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
6. Степанов С. Я. О стационарных движениях спутника-гиростата. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
7. Анчев А. А. Об устойчивости относительного равновесия спутника с роторами. Българска академия на науките. Известия на Математический институт, 1969, т. 11.
8. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов. Космические исследования, 1969, т. 7, вып. 3.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
10. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.