Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36+62-50

ОБ УПРАВЛЕНИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассматривается задача об управлении и стабилизации по позиционным координатам и импульсам голономной системы с циклическими координатами при помощи управляющих сил, приложенных к системе, в частности, только по циклическим координатам. Задача решается на основании методов теории устойчивости [1] и теории управления [2]. Приводятся примеры.

Рассмотрим голономную механическую систему, обобщенные координаты и импульсы которой обозначим через q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$. Уравнения движения системы запишем в форме канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $H = H(t, q_i, p_i)$ — функция Гамильтона, $Q_i = Q_i(t, q_j, p_j)$ — обобщенные непотенциальные силы.

Предположим, что функции $H(t, q_i, p_i)$ и $Q_i(t, q_i, p_i)$ не зависят явно от координат q_α, т. е. выполняются тождества

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \equiv 0, \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial q_\alpha} \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = k+1, \ldots, n) \tag{2}$$

Такие координаты q_α будем называть циклическими; в случае $Q_\alpha \neq 0$ их иногда называют квазициклическими координатами. Остальные координаты q_j $(j = 1, \ldots, k)$ называются позиционными координатами.

При выполнении условий (2) изучение движения системы сводится к исследованию $2k$ уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

для позиционных координат и импульсов и $n - k$ уравнений

$$dp_\alpha / dt = Q_\alpha \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{4}$$

для циклических импульсов, после интегрирования которых циклические координаты определяются квадратурами [1].

Таким образом, при наличии циклических координат их возможно игнорировать и вместо исходной системы уравнений (1) порядка $2n$ исследовать систему уравнений (3), (4) порядка $n + k$.

Для уравнений (3), (4) можно ставить общие задачи об управлении и стабилизации движения [2], решения которых будут служить для исходной системы (1) решениями задач об управлении и стабилизации движения по части переменных [3], именно — по позиционным координатам и всем импульсам.

Кроме такой общей постановки задачи об управлении и стабилизации, для системы (3), (4) имеет также смысл постановка частной задачи, когда управляющие силы к механической системе прикладываются только по циклическим координатам. Это означает управление системой движением тех ее частей, которые могут совершать циклические движения. Так, например, когда система находится под действием лишь потенциальных сил и все $Q_\alpha = 0$, циклические импульсы p_α в силу уравнений (4) будут оставаться постоянными во все время движения, и, выбирая надлежащим образом их величины, можно управлять приведенной системой (3) и осуществлять стабилизацию ее движений. Еще большие возможности для управления системой возникают в случаях, когда импульсы p_α не остаются постоянными, а изменяются по определенному закону в соответствии с уравнениями (4) благодаря приложению к системе по ее циклическим координатам управляющих сил Q_α. При этом функции p_α в уравнениях (3) движения приведенной системы будут играть роль управляющих воздействий, определяемых в зависимости от той или иной постановки задачи об управлении приведенной системой (3), а тем самым и исходной системой (1).

Рассмотрим подробнее эту задачу. Пусть при некоторых заданных обобщенных силах $Q_\alpha = Q_\alpha(t)$ ($\alpha = k+1, \ldots, n$) и всех $Q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, k$) уравнения (3), (4) допускают частное решение

$$q_j = q_j(t), \qquad p_i = p_i(t) \tag{5}$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям. Это решение примем за невозмущенное движение системы. Значения координат и импульсов в возмущенном движении пусть будут

$$q_j = q_j(t) + \xi_j, \qquad p_i = p_i(t) + \eta_i$$

где ξ_j, η_i означают отклонения или вариации переменных q_j и p_i.

Уравнения возмущенного движения приведенной системы запишем в форме канонических уравнений

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{dH_1}{\partial \xi_j} \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

где функция

$$H_1(t, \xi_j, \eta_i) = H(t, q_j(t) + \xi_j, p_i(t) + \eta_i) - H(t, q_j(t), p_i(t)) - \\ - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \xi_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \eta_j \right) - \sum_{\alpha=k+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \eta_\alpha$$

причем входящие в это выражение частные производные от функции H вычислены для решения (5). Управляющие воздействия η_α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\eta_\alpha/dt = P_\alpha, \qquad P_\alpha = Q_\alpha - Q_\alpha(t) \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{7}$$

Функция $H_1(t, \xi_j, \eta_i)$ и ее первые частные производные по ξ_j, η_i обращаются в нуль при $\xi_j = \eta_i = 0$. Будем предполагать, что функция $H_1(t, \xi_j, \eta_i)$ представляет собой голоморфную функцию переменных ξ_j, η_i. Ее разложение в ряд Маклорена по вариациям переменных начинается с квадратичной формы

$$H_{12}(t, \xi_j, \eta_i) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \xi_i \eta_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \eta_i \eta_j \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = k+1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \eta_\alpha \eta_\beta + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_\alpha} \eta_i \eta_\alpha + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_\alpha} \xi_i \eta_\alpha \right)$$

коэффициенты которой вычисляются для решения (5).

Первое приближение уравнений (6) возмущенного движения имеет, очевидно, вид уравнений в вариациях Пуанкаре [1]. Вводя обозначения

$$x_j = \xi_j, \qquad x_{k+j} = \eta_j, \qquad u_\alpha = \eta_{k+\alpha}$$
$$p_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}, \quad p_{i,\, k+j} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}, \quad p_{k+i,\, j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}$$
$$p_{k+i,\, k+j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}, \quad q_{i\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{k+\alpha}}, \quad q_{k+i,\, \alpha} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{k+\alpha}}$$
$$(i, j = 1, \ldots, k; \ \alpha = 1, \ldots, n-k)$$

запишем уравнения (6) возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{2k} p_{sr} x_r + \sum_{\alpha=1}^{n-k} q_{s\alpha} u_\alpha + X_s(t, x_r, u_\alpha) \tag{8}$$
$$(s = 1, \ldots, 2k)$$

Здесь $X_s(t, x_r, u_\alpha)$ — нелинейные по отношению к переменным x_r, u_α члены, структура которых понятна по виду правых частей уравнений (6). Функция Гамильтона H представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных импульсов p_i, поэтому таковой же относительно переменных η_i является функция H_1. Очевидно, величины u_α могут фигурировать в нелинейных членах X_s уравнений (8) лишь в степени не выше первой для $s = 1, \ldots, k$ и не выше второй для $s = k+1, \ldots, 2k$. Эти члены можно представить в виде сумм

$$X_s(t, x_r, u_\alpha) = X_s^{(0)} + X_s^{(1)} + X_s^{(2)} \tag{9}$$

где верхний индекс обозначает степень однородности формы относительно переменных $u_\alpha = \eta_{k+\alpha}$. Очевидно, $X_s^{(0)} = X_s(t, x_r, 0)$; для $s = 1, \ldots, k$ формы $X_s^{(2)} \equiv 0$.

Будем далее предполагать, что правые части уравнений (7) и (8) удовлетворяют условиям существования и единственности решений x_s и $u_\alpha = \eta_{k+\alpha}$ при любых начальных условиях из области определения и непрерывности правых частей уравнений (7) и (8).

Уравнения (8) имеют стандартный вид уравнений возмущенного движения, однако их особенность состоит в том, что коэффициенты $q_{s\alpha}$ при управляющих воздействиях u_α имеют структурные ограничения как частные производные от функции H, а число управляющих воздействий не превышает числа $n - k$ циклических координат. В силу этой особенности могут представиться случаи, когда для решения (5) часть или даже все коэффициенты $q_{s\alpha} \equiv 0$; в последнем случае линейная система, соответствующая системе (8), будет неуправляемой циклическими импульсами. Если к тому же в функциях X_s для решения (5) окажутся тождественно равными нулю все члены, зависящие от u_α, то и нелинейная система (8) будет неуправляемой циклическими импульсами. Достаточные условия управляемости линейной нестационарной системы даются известными теоремами (например, теоремы 20.1 и 20.2 монографии [2]), при выполнении условий которых решаются и задачи об оптимальной стабилизации.

Особый интерес представляет задача об оптимальной стабилизации устойчивых движений (5) управляющими воздействиями по циклическим координатам. Пусть для уравнений (8) в случае, когда все $u_\alpha = 0$, существует определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x_s)$, производная по времени от которой в силу этих уравнений

$$V^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s}\Big(\sum_{r=1}^{2k} p_{sr}x_r + X_s^{(0)}\Big) \equiv W(t, x_s)$$

неположительна. Тогда движение (5) устойчиво по отношению к x_s ($s = 1,\ldots, 2k$) при $p_\alpha = p_\alpha(t)$.

Допустим, желательно сделать это движение асимптотически устойчивым в силу системы (8) при $u_\alpha = u_\alpha{}^\circ(t, x_s)$ и при этом минимизировать интеграл

$$I = \int_{t_0}^{\infty} [F(t, x_s) + S(u_\alpha)]dt, \qquad S(u_\alpha) = \sum_{i, j=1}^{n-k} \beta_{ij}u_iu_j \tag{10}$$

где $F(t, x_s)$ — некоторая подлежащая определению неотрицательная функция, $S(u_\alpha)$ — заданная определенно-положительная квадратичная форма с вещественными коэффициентами $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Решение этой задачи получим, согласно теореме 1.1 работы [3].

Составим выражение

$$B[V, t, x_s, u_i] = W(t, x_s) + \sum_{s=1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s}\Big[\sum_{i=1}^{n-k} q_{si}u_i + \tag{11}$$

$$+ X_s(t, x_r, u_i) - X_s^{(0)}\Big] + F(t, x_s) + \sum_{i, j=1}^{n-k} \beta_{ij}u_iu_j$$

которое, согласно условиям теоремы об оптимальной стабилизации [4], при $u_\alpha = u_\alpha{}^\circ$ достигает минимума, равного нулю. Оптимальные управляющие воздействия $u_\alpha{}^\circ$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial B}{\partial u_\alpha} = \sum_{s=1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left(q_{s\alpha} + \frac{\partial X_s}{\partial u_\alpha}\right) + 2\sum_{j=1}^{n-k} \beta_{\alpha j}u_j = 0$$

Так как, согласно (9)

$$\frac{\partial X_s}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial X_s^{(1)}}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial X_s^{(2)}}{\partial u_\alpha} = X_{s\alpha} + \sum_{j=1}^{n-k} X_{s\alpha j} u_j$$

где $X_{s\alpha}$ — слагаемые, не зависящие от u_j; $X_{s\alpha j}$ — коэффициенты при u_j в выражении $\partial X_s / \partial u_\alpha$, причем $X_{s\alpha j} \equiv 0$ для $s = 1, \ldots, k$, то эти уравнения являются линейными алгебраическими уравнениями

$$\sum_{s=1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s} (q_{s\alpha} + X_{s\alpha}) + 2 \sum_{j=1}^{n-k} \beta_{\alpha j}^* u_j = 0$$

Здесь

$$\beta_{\alpha j}^* = \beta_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_{s\alpha j}$$

Разрешая эти уравнения, находим

$$u_\alpha{}^\circ (t, x_s) = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} \frac{\Delta_{r\alpha}}{\Delta} \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_i} (q_{ir} + X_{ir}) \tag{12}$$

Здесь $\Delta_{r\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $\beta_{r\alpha}{}^*$ определителя $\Delta = \|\beta_{ij}{}^*\|$, который положителен по крайней мере для достаточно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, так как $\|\beta_{ij}\| > 0$. Подставляя значения (12) вместо u_α в выражение (11) и приравнивая его нулю, получим уравнение, из которого находим функцию

$$F(t, x_s) = -W(t, x_s) + \sum_{i,\, j=1}^{n-k} \beta_{ij} u_i{}^\circ u_j{}^\circ + \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s^{(2)} \tag{13}$$

Производная по времени от функции $V(t, x_s)$ в силу уравнений (8) при $u_\alpha = u_\alpha{}^\circ$ равна

$$\frac{dV}{dt} = W(t, x_s) - 2 \sum_{i,\, j=1}^{n-k} \beta_{ij} u_i{}^\circ u_j{}^\circ - \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s^{(2)} \tag{14}$$

Итак, доказана

Теорема 1. Если для устойчивой при $u_\alpha = 0$ системы (8) известна допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция $V(t, x_s)$, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (8), оптимизируемой управляющими воздействиями (12) по функционалу (10), (13), при условии, что функция (14) является определенно-отрицательной.

Управляющие силы, которые при этом надлежит приложить к системе по циклическим координатам, определяются из уравнений (7). При выполнении условий теоремы 1 невозмущенное движение (5) асимптотически устойчиво по отношению к переменным ξ_j, η_j $(j = 1, \ldots, k)$ и при этом минимизируется интеграл (10). В такой постановке величины $\eta_{k+\alpha} = u_\alpha{}^\circ (t, x_s)$, определяемые уравнениями (12), играют роль оптимальных управляющих воздействий.

Замечание 1. В случае, если за функцию $V(t, x_s)$ теоремы 1 можно принять функцию $H_1(t, \xi_j, \eta_j, 0) = H_1^{(0)}$, выражение (13) примет вид

$$F = -\frac{\partial H_1^{(0)}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H_1^{(0)}}{\partial \eta_j} \frac{\partial H_1^{(2)}}{\partial \xi_j} + \sum_{i,\, j=1}^{n-k} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ$$

если функцию H_1 представить в виде, аналогичном (9). При этом фигурирующие в формуле (12) величины $X_{s\alpha}$ будут равняться

$$X_{r\alpha} = \frac{\partial^2 H_1^{(1)}}{\partial \eta_r \partial \eta_\alpha}, \quad X_{k+r,\alpha} = -\frac{\partial^2 H_1^{(1)}}{\partial \xi_r \partial \eta_\alpha} \quad (r = 1, \ldots, k;\ \alpha = k+1, \ldots, n)$$

В ряде случаев представляет интерес некоторая модификация данной постановки задачи, когда невозмущенное движение (5) требуется сделать асимптотически устойчивым не только по отношению к переменным ξ_j, η_j $(j = 1, \ldots, k)$, но и по отношению к переменным η_α $(\alpha = k + 1, \ldots, n)$. В этом случае роль управляющих воздействий будут играть величины $P_\alpha = P_\alpha(t, \xi_j, \eta_i)$. Эта задача, как и предыдущая, может быть решена при помощи теоремы 1.1 работы [3].

В качестве одного из возможных вариантов решения задачи рассмотрим случай, когда для движения (5) функция $H_1(t, \xi_j, \eta_i)$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел. Примем ее за функцию Ляпунова и найдем производную в силу уравнений возмущенного движения (6), (7)

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial \eta_\alpha} P_\alpha$$

Рассматривая выражение

$$B[H_1, t, \xi_j, \eta_i, P_\alpha] = \frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial \eta_\alpha} P_\alpha + F(t, \xi_j, \eta_i) + \sum_{i,\, j=k+1}^{n} \beta_{ij} P_i P_j$$

и частные производные по P_α от него, найдем, что

$$\begin{gathered} P_\alpha^\circ = -\frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\Delta_{i\alpha}}{\Delta} \frac{\partial H_1}{\partial \eta_i}, \quad \Delta = \|\beta_{ij}\| \quad (\alpha = k+1, \ldots, n) \\ F(t, \xi_j, \eta_i) = -\frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{i,\, j=k+1}^{n} \beta_{ij} P_i^\circ P_j^\circ \end{gathered} \tag{15}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Если для невозмущенного движения (5) функция $H_1(t, \xi_j, \eta_i)$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (6), (7), оптимизируемой управляющими воздействиями (15) по функционалу

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \Big[-\frac{\partial H_1}{\partial t} + \sum_{i,\, j=k+1}^{n} \beta_{ij} P_i^\circ P_j^\circ + \sum_{i,\, j=k+1}^{n} \beta_{ij} P_i P_j\Big] dt \tag{16}$$

при условии, что функция

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial t} - 2 \sum_{i,\, j=k+1}^{n} \beta_{ij} P_i^{\circ} P_j^{\circ} \tag{17}$$

является определенно-отрицательной.

Рассмотрим теперь случай, когда функция Гамильтона H не зависит явно от времени и все непотенциальные обобщенные силы $Q_i = 0$ $(i = 1,\ldots, n)$.

При фиксированных значениях $p_\alpha = c_\alpha$ и определенных начальных условиях система (1) допускает решение

$$q_j = q_{j0},\ \ q_\alpha = q^{\boldsymbol\cdot}_{\alpha_0}(t - t_0) + q_{\alpha 0},\ \ p_i = p_{i0} \tag{18}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k;\ \alpha = k + 1, \ldots, n)$$

описывающее стационарное движение системы. В частности, если все $q_{\alpha 0}^{\boldsymbol\cdot} = p_{i0} = 0$, решение (18) описывает равновесие системы.

Постоянные q_{j0}, p_{j0}, $q_{\alpha 0}^{\boldsymbol\cdot}$ определяются уравнениями

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = q^{\boldsymbol\cdot}_{\alpha 0} \tag{19}$$

$$(j = 1, \ldots, k;\ \alpha = k + 1, \ldots, n)$$

Уравнения возмущенного движения приведенной системы имеют вид уравнений (8), правые части которых для движения (18) не зависят явно от времени, и, в частности, все коэффициенты p_{si} и $q_{s\alpha}$ являются постоянными.

Как следует из теории управления [2], задача об оптимальном управлении линейной системой

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{2k} p_{si} x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-k} q_{s\alpha} u_\alpha \qquad (s = 1, \ldots, 2k) \tag{20}$$

получаемой из системы (8) отбрасыванием нелинейных членов X_s, имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$K = \{Q,\ PQ, \ldots, P^{2k-1} Q\}$$

равен $2k$, где P и Q — матрицы коэффициентов p_{si} и $q_{s\alpha}$. При этом управляющие воздействия $u_\alpha(t)$, решающие задачу об успокоении линейной системы, определяются правилом минимакса [2] (см. (17.1)); решение линеаризованной системы распространяется и на исходную нелинейную задачу.

В работе [5] показано, что для оптимальной стабилизации движения (18) силами, приложенными к системе по циклическим координатам, достаточно выполнения условия rang $K = 2k$ для системы (20). Для автономной системы вида (8) это условие может быть необходимо только, если среди корней характеристического уравнения

$$\det \| P - \lambda E_{2k} \| = 0$$

для системы (20) имеются корни с положительными вещественными частями. Если кратность нулевого корня этого уравнения больше, чем $n - k$, то указанная стабилизация невозможна. Последнее утверждение связано с минимально возможной размерностью вектора управления [6].

Рассмотрим функцию $H_1(\xi_j, \eta_i)$ и производную по времени от нее в силу системы (6), (7). Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, стационарное движение (18) будет устойчивым по отношению к позиционным координатам и всем импульсам, если функция $H_1(\xi_j, \eta_i)$ определенно-положительна по отношению ко всем переменным ξ_j, η_i, а производная по времени от нее — неположительна. При этом, если многообразие M, определяемое уравнением

$$\sum_{\alpha=k+1}^{n} \frac{\partial H_1}{\partial \eta_\alpha} P_\alpha = 0 \tag{21}$$

не содержит целых движений системы, кроме движения $\xi_j = \eta_i = 0$, то, согласно теореме Барбашина — Красовского, движение (18) будет асимптотически устойчивым по отношению к тем же переменным.

Рассмотрим, в частности, управляющие силы вида

$$P_\alpha = -\partial H_1/\partial \eta_\alpha \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{22}$$

Тогда

$$\frac{dH_1}{dt} = -\sum_{\alpha=k+1}^{n} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \eta_\alpha}\right)^2$$

Многообразие M в данном случае определяется уравнениями

$$-P_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_\alpha} \xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_\alpha} \eta_i\right) + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_j} \eta_j + \ldots = 0 \tag{23}$$
$$(\alpha = k+1, \ldots, n)$$

где многоточие обозначает совокупность членов выше первого порядка малости. Так как

$$\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_j} \right\|_{k+1}^{n} > 0$$

то уравнения (23) всегда возможно разрешить относительно η_α

$$\eta_\alpha = f_\alpha(\xi_j, \eta_j) \qquad (\alpha = k+1, \ldots, n) \tag{24}$$

При условиях (23) уравнения (7) имеют интегралы $\eta_\alpha = \text{const}$, поэтому соотношения (24) представляют собой первые интегралы уравнений (6). При этом следует различать, зависят функции f_α от η_j или не зависят. В первом случае соотношения (24) будут представлять собою линейные относительно η_j интегралы. Так как линейными интегралами обладают только такие динамические системы, которые либо имеют циклические координаты, либо могут быть преобразованы в системы с циклическими координатами [7], то в предположении, что уравнения (1) не допускают никаких других линейных интегралов, кроме интегралов $p_\alpha = c_\alpha$, интегралов вида (24) у системы (6) быть не может, и многообразие (23) не содержит целых движений, кроме $\xi_j = \eta_i = 0$. Во втором случае, когда функции f_α не зависят от η_j, такие движения, вообще говоря, возможны.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Если функция $H_1(\xi_j, \eta_i)$ определенно-положительна, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы автономных уравнений (6), (7), оптимизируемой управляющими воздействиями (22) по функционалу

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{\alpha=k+1}^{n} P_\alpha^2 + \sum_{\alpha=k+1}^{n}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \eta_\alpha}\right)^2\right]dt \tag{25}$$

при условии, что многообразие (23) не содержит целых движений системы, кроме $\xi_j = \eta_i = 0$.

Отметим, что этот результат примыкает к теореме 2.1 работы [8]. Силы вида (22) являются диссипативными силами $-\xi_\alpha^{\bullet}$, приложенными к системе по соответствующим циклическим координатам.

Замечание 2. Задача об управлении и стабилизации движений системы с циклическими координатами включает в себя, как частный случай, также задачу об управлении и стабилизации относительных движений и равновесий голономной системы по отношению к подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, совершающей известное движение. В самом деле, движение системы по отношению к подвижным осям можно описать уравнениями Гамильтона вида (3), составленными для абсолютного движения, если в качестве обобщенных координат q_j выбрать независимые переменные, определяющие положение системы относительно подвижной системы координат. При этом функция Гамильтона H будет зависеть не только от q_j и p_j, но также и от проекций скорости начала подвижной системы координат и ее абсолютной угловой скорости, которые в уравнениях вида (3) будут играть роль управлений.

Пример 1. Тяжелая точка P массы m находится на расположенной в вертикальной плоскости материальной окружности радиуса a с центром O, которая может вращаться без трения вокруг своего вертикального диаметра.

Положение окружности будем определять углом ψ, образуемым ее плоскостью с некоторой неподвижной плоскостью, а положение точки на окружности — углом θ между идущей вниз вертикалью и радиусом OP. Момент инерции окружности относительно диаметра равен I.

Обозначая через p_1 и p_2 обобщенные импульсы, отвечающие углам θ и ψ, выпишем функцию Гамильтона

$$H(\theta, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2ma^2} + \frac{p_2^2}{2(I + ma^2\sin^2\theta)} - mga\cos\theta$$

Уравнения вида (19) имеют корни

$$p_{10} = 0, \qquad \theta_0 = 0, \pi$$

при любом постоянном значении $p_2 = c$, а также корень

$$\theta_0 = \arccos\frac{g}{a\omega^2}, \qquad \omega = \frac{c}{I + ma^2\sin^2\theta_0}, \qquad p_{10} = 0$$

при значениях $c \geqslant c_* = I\sqrt{g/a}$. На плоскости θ, p_2 эти решения представляются тремя ветвями $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \arccos g/a\omega^2$ кривой «равновесия». Видно, что стационарные движения устойчивы по отношению к θ, p_1, p_2 для точек первой ветви при $0 \leqslant c < c_*$ и для точек третьей ветви при $c > c_*$ и неустойчивы для точек первой ветви при $c > c_*$ и всех точек второй ветви.

Функция $H_1(\xi, \eta_1, \eta_2)$ в данном случае имеет вид

$$H_1(\xi, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{\eta_1^2}{ma^2} + \frac{(c+\eta_2)^2}{I + ma^2\sin^2(\theta_0+\xi)}\right] - \frac{1}{2}\frac{c^2 + 2c\eta_2}{I + ma^2\sin^2\theta_0} - \\ - mga\left[\cos(\theta_0+\xi) - \cos\theta_0\right]$$

Так как величины

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\theta\,\partial p_2} = -\frac{ma^2 c\sin 2\theta}{(I + ma^2\sin^2\theta)^2}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\,\partial p_2} = 0$$

то для всех точек первой и второй ветвей система неуправляема в первом приближении циклическим импульсом, а для точек третьей ветви, для которых $\operatorname{rang} K = 2$ — управляема.

Рассматривая функции $H_1(\xi, \eta_1, 0)$ и $H_1(\xi, \eta_1, \eta_2)$ и производные по времени от них в силу уравнений возмущенного движения (6)

$$\frac{dH_1^{(0)}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{(\eta_2^2 + 2c\eta_2)\eta_1\sin 2(\theta_0+\xi)}{[I + ma^2\sin^2(\theta_0+\xi)]^2}, \qquad \frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial\eta_2}P_2$$

находим в соответствии с теоремами 1 и 3, что управляющие воздействия вида (12) или вида (22)

$$\eta_2^\circ = -\frac{c\eta_1\sin 2(\theta_0+\xi)}{2\beta[I + ma^2\sin^2(\theta_0+\xi)]^2 + \eta_1\sin 2(\theta_0+\xi)},$$

$$P_2^\circ = \frac{c}{I + ma^2\sin^2\theta_0} - \frac{c+\eta_2}{I + ma^2\sin^2(\theta_0+\xi)}$$

стабилизируют до асимптотической устойчивости по переменным ξ, η_1 или переменным ξ, η_1, η_2, соответственно, стационарные движения, отвечающие устойчивым точкам первой ветви. При этом они минимизируют интеграл вида (10) или интеграл вида (25), так как в обоих случаях многообразия M не содержат целых движений, кроме невозмущенного. Для точек третьей ветви эти многообразия содержат целые движения $\xi = \mathrm{const}$, вследствие чего указанные управления обеспечивают лишь асимптотическое стремление возмущенного движения к одному из стационарных движений, достаточно близких к невозмущенному.

Рассмотрим теперь вопрос о стабилизации относительных равновесий тяжелой точки на окружности в случае, когда к окружности приложен момент внешних сил, обеспечивающий постоянство $\dot\psi = \omega = \mathrm{const}$.

Функция Гамильтона и уравнения относительного движения точки имеют вид

$$H(\theta, p_1, \dot\psi) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{ma^2} - \frac{1}{2}ma^2\dot\psi^2\sin^2\theta - mga\cos\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_1}{ma^2}, \qquad \frac{dp_1}{dt} = ma^2\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta$$

Видно, что относительные равновесия точки и характер их устойчивости будут такими же, как и в рассмотренных выше стационарных движениях.

Полагая в возмущенном движении $\theta = \theta_0 + \xi$, $p_1 = \eta$, $\dot\psi = \omega + \zeta$, рассмотрим функцию

$$H_1(\xi, \eta) = H(\theta_0 + \xi, \eta, \omega) - H(\theta_0, 0, \omega) = \frac{1}{2}\frac{\eta_1^2}{ma^2} - \\ - \frac{1}{2}ma^2\sin^2(\theta_0+\xi)\,\omega^2 - mga\left[\cos(\theta_0+\xi) - \cos\theta_0\right] + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta_0$$

и производную по времени от нее в силу уравнений возмущенного движения

$$dH_1/dt = {}^1/_2\, \eta\, (\zeta^2 + 2\, \omega\zeta) \sin 2\, (\theta_0 + \xi)$$

В соответствии с теоремой 1 находим, что управляющие воздействия вида (12)

$$\zeta^\circ = -\frac{\omega\eta \sin 2\,(\theta_0 + \xi)}{2\beta + \sin 2\,(\theta_0 + \xi)\,\eta}$$

стабилизируют до асимптотической устойчивости по переменным ξ, η относительные равновесия, отвечающие устойчивым точкам первой ветви, и при этом минимизируют интеграл вида (10), так как многообразие M не содержит целых движений, кроме невозмущенного. Для точек третьей ветви это многообразие M содержит целые движения $\xi = \mathrm{const}$.

Пример 2. Рассмотрим движение тяжелого гироскопа в кардановом подвесе в случае, когда ось внешнего кольца вертикальна. Сохраняя обозначения работы [9], выпишем функцию Гамильтона

$$H(\theta, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2}{A + A_1} + \frac{(p_2 - p_3\cos\theta)^2}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2} + \frac{p_3^2}{C}\right] + Pz_0\cos\theta$$

Уравнения вида (19) имеют решения, для которых

$$\theta = \theta_0, \quad p_1 = 0, \quad \psi' = \Omega, \quad r = \omega$$

при условии, что постоянные θ_0, Ω, ω удовлетворяют соотношению (2.2) работы [9]. Составляя матрицу K, можно показать, что для решений $\theta_0 = 0, \pi$ система в первом приближении неуправляема циклическими импульсами p_2 и p_3, а для решения $\theta \neq 0, \pi$ — управляема.

Стационарное движение, для которого $\theta_0 = 0$, устойчиво при выполнении условия (2.8) работы [9]. Такое устойчивое движение можно стабилизировать до асимптотической устойчивости силами вида (22) и при этом минимизировать интеграл вида (25).

Поступила 3 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
3. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
5. Лилов Л. К. О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
6. Лилов Л. К. Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положения равновесия. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
7. Уиттекер К. Т. Аналитическая динамика. М. — Л., ОНТИ, 1937.
8. Габриэлян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.