УДК 539.3

О ПРИБЛИЖЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Б. Е. Победря

(Москва)

Для решения краевых задач линейной теории вязкоупругости применяется метод аппроксимации функции от коэффициента Пуассона в виде рациональной функции. Решается задача интерполирования в классе рациональных дробей и оценивается погрешность аппроксимации.

1. Пусть некоторую достаточно гладкую функцию $\varphi(\omega)$ действительной переменной ω на отрезке $a \leqslant \omega \leqslant b$ требуется аппроксимировать некоторой другой за данной функцией $f(\omega)$ с определенной степенью точности. К этой проблеме относится и задача интерполирования, заключающаяся в нахождении интерполяционной функции $f_N(\omega)$, принадлежащей некоторому классу F и принимающую в узлах интерполяции, т. е. в некоторых заданных точках отрезка $[a, b]$

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \tag{1.1}$$

те же значения, что и функция $\varphi(\omega)$, т. е.

$$f_N(\omega_0) = \varphi_0, \quad f_N(\omega_1) = \varphi_1, \ldots, \quad f_N(\omega_N) = \varphi \tag{1.2}$$

где

$$\varphi_n \equiv \varphi(\omega_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N \tag{1.3}$$

В зависимости от класса F задача интерполирования может иметь бесчисленное множество решений, а может и не иметь их. Если в качестве функции f_N принимаются полиномы степени не выше N, то задача интерполяции имеет единственное решение, а сами полиномы носят название интерполяционных полиномов. Иногда свойства функции $\varphi(\omega)$ таковы, что выгоднее в качестве функций $f_N(\omega)$ выбирать рациональные дроби

$$f_N(\omega) = \sum_{i=0}^{M} p_i\omega^i / P_N, \qquad P_N = \sum_{i=1}^{N} q_i\omega^i \tag{1.4}$$

где p_i, q_i — некоторые постоянные. Очевидно, что аппроксимация (1.4) шире, чем полиномиальная.

2. Имея в виду в дальнейшем рассмотреть приложение к задачам теории вязкоупругости [1], предположим, что полином P_N имеет действительные неотрицательные корни, все различные, а числа a и b неотрицательны. Рациональную дробь $f_N(\omega)$ можно представить в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби. Проблема интерполяции многочленами известна [2]. Рассмотрим правильные рациональные дроби, т. е. предположим, что $M \leqslant N$.

В силу сделанных предположений каждая функция $f_N(\omega)$ рассматриваемого класса F может быть представлена в виде

$$f_N(\omega) = \sum_{i=0}^{N} A_i \frac{1}{1 + \beta_i\omega} \tag{2.1}$$

где A_i, β_i — некоторые константы. Так как β_i считаются заданными, то будем говорить, что полюса функции $f_N(\omega)$ фиксированы.

Отыщем теперь интерполяционную функцию $f_N(\omega)$ с фиксированными полюсами. Для этого составим $N + 1$ уравнение

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{N} A_i \frac{1}{1 + \beta_i\omega_n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

для определения $N+1$ неизвестных A_i. Каждое выражение $(1+\beta_i\omega_n)>0$ $(i, n = 0, 1, \ldots, N)$, поэтому определитель системы (2.2) положителен и система (2.2) имеет единственное решение

$$A_k = \sum_{n=0}^{N} A_{kn}\varphi_n$$

$$A_{kn} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{N} (1+\beta_k\omega_i) \prod\limits_{i=0\,(i\neq k)}^{N} (1+\beta_i\omega_k)}{\prod\limits_{i=0\,(i\neq k)}^{N} (\beta_i-\beta_k) \sum\limits_{i=0\,(i\neq n)}^{N} (\omega_i-\omega_n)} \tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.3) в (2.1), получим интерполяционную формулу для рассматриваемого случая. Единственность интерполяционной функции (2.1) доказывается методом математической индукции.

3. Подсчитаем погрешность этой аппроксимации. Для этого предположим, что функция $\varphi(\omega)$ имеет $N+1$ производную на отрезке $a \leqslant \omega \leqslant b$. Обозначим

$$R_N(\omega) = \varphi(\omega) - f_N(\omega) \tag{3.1}$$

Введем вспомогательную функцию

$$v(\omega) = R_N(\omega) - KX_N(\omega) \tag{3.2}$$

где

$$X_N(\omega) \equiv \frac{\prod\limits_{i=0}^{N} (\omega-\omega_i)}{\prod\limits_{i=0}^{N} (1+\beta_i\omega)}, \qquad K \equiv \frac{R_N(\omega_*)}{X_N(\omega_*)} \tag{3.3}$$

а ω_* — фиксированная точка отрезка $[a, b]$, не совпадающая ни с одним узлом (1.1). Таким образом, функция $v(\omega)$ имеет на отрезке $[a, b]$ $N+2$ корней, а значит ее $(N+1)$-я производная имеет хотя бы один корень. Поэтому в некоторой точке ξ

$$w^{(N+1)}(\xi) = 0, \qquad w(\omega) \equiv v(\omega) \prod_{i=0}^{N} (1+\beta_i\omega) \tag{3.4}$$

Умножим левую и правую часть (3.2) на величину знаменателя в выражении для X_N и продифференцируем обе части $N+1$ раз. Учитывая обозначение (3.4), получим в точке ξ

$$K = \frac{Q(\xi)}{(N+1)!}, \quad Q(\xi) \equiv \frac{d^{N+1}}{d\omega^{N+1}} \left[\varphi(\omega) \prod_{i=0}^{N} (1+\beta_i\omega)\right]_{\omega=\xi} \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.5) и (3.3), получим

$$R_N(\omega_*) = \frac{Q(\xi)}{(N+1)!} X_N(\omega_*)$$

точка ω_* была выбрана произвольно, поэтому

$$R_N(\omega) = \frac{Q(\xi)}{(N+1)!} \frac{\prod\limits_{i=0}^{N} (\omega-\omega_i)}{\prod\limits_{i=0}^{N} (1+\beta_i\omega)} \tag{3.6}$$

$$
|R_N(\omega)| \leqslant \frac{M_N}{(N+1)!} \left| \frac{\prod\limits_{i=0}^{N} (\omega - \omega_i)}{\prod\limits_{i=0}^{N} (1 + \beta_i \omega)} \right|
$$

$$
M_N = \max_{a \leqslant \omega \leqslant b} \left| \frac{d^{N+1}}{d\omega^{N+1}} \left[\varphi(\omega) \prod_{i=0}^{N} (1 + \beta_i \omega) \right] \right| \tag{3.7}
$$

4. Сделаем несколько замечаний.

1°. Если в формуле (1.4) $M = N$, то следует положить $\beta_0 = 0$.

2°. Если включить в выражение (2.1) член A_0 / ω, то следует в рассмотренном случае положить $A_0 = \beta_0 A_0'$ и устремить $\beta_0 \to \infty$.

3°. Если один из полюсов не считать фиксированным, то его можно определить, увеличив на единицу число узлов (1.1). Тогда нужно решить систему уравнений (2.2) из $N + 2$ уравнений для $N + 1$ неизвестных A_i и одного неизвестного β_k. Обозначим

$$
Q_n \equiv \prod_{i>j=0}^{n} (\omega_i - \omega_j), \qquad Q_{n,k} \equiv \frac{Q_n}{\prod\limits_{i>j=0\ (i=k \vee j=k)}^{n} (\omega_i - \omega_j)}
$$

Тогда дополнительно к формулам (2.3) имеем

$$
\beta_j = - \frac{\sum\limits_{k=0}^{N+1} \left\{ \varphi_k Q_{N+1,k} \prod\limits_{i=0\ (i\neq j)}^{N} (1 + \beta_i \omega_k) \right\}}{\sum\limits_{k=0}^{N+1} \left\{ \varphi_k Q_{N+1,k} \omega_j \prod\limits_{i=0\ (i\neq j)}^{N} (1 + \beta_i \omega_k) \right\}} \qquad (j = 0, 1, \ldots, N)
$$

Поступила 13 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Победря Б. Е. О решении задач линейной теории вязкоупругости контактного типа. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 2.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., Физматгиз, 1962.