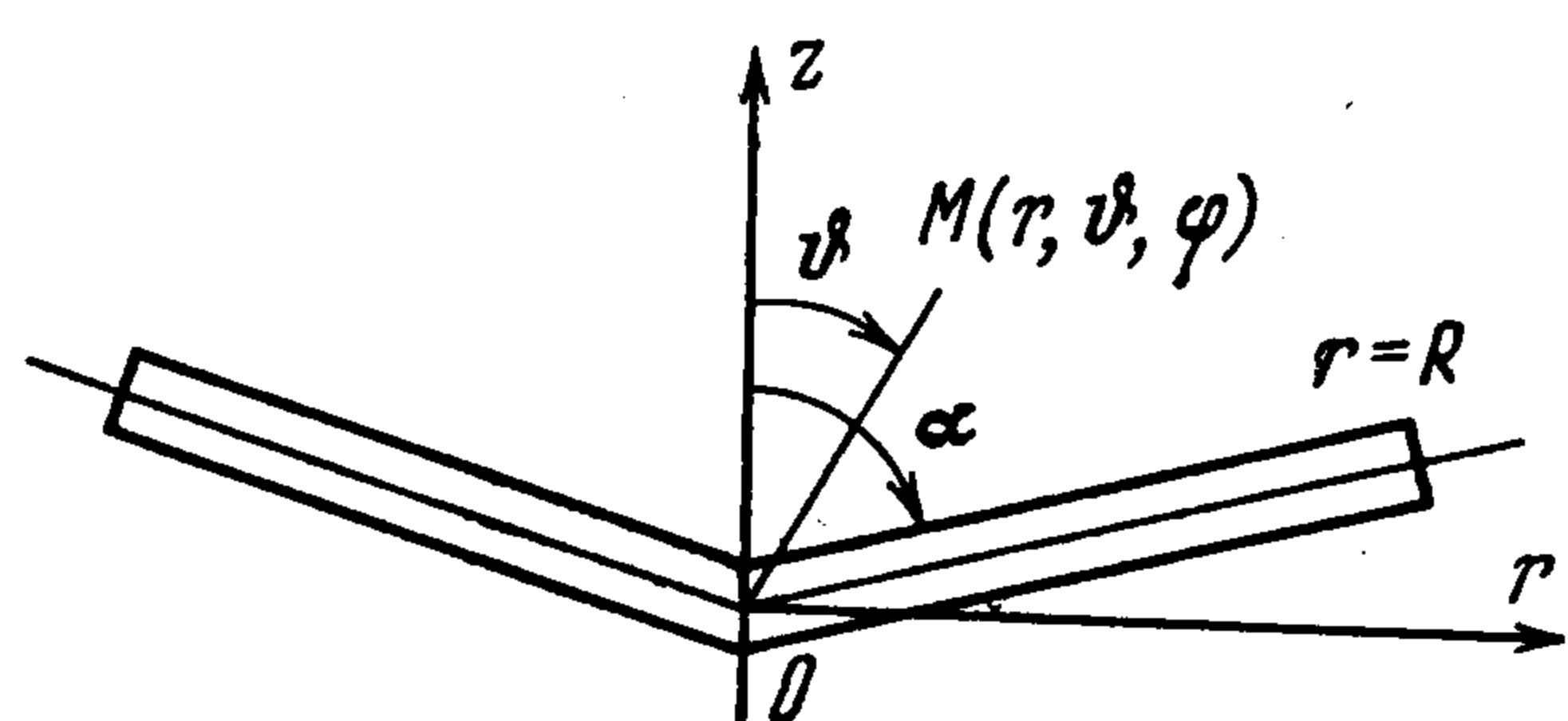


**ПРИМЕНЕНИЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ
О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО
КОНИЧЕСКОЙ ЩЕЛЮЮ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

И. Н. Златина

(Ленинград)

Рассматривается осесимметричная задача кручения упругого пространства, ослабленного конической щелью, в предположении, что на берегах щели заданы касательные перемещения или касательные напряжения. Решение получается путем применения парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Меллина, аналогичных исследованным в работе [1].



Результат представляется в квадратурах через вспомогательные функции, являющиеся решением уравнения Фредгольма второго рода. В качестве примера решена задача о кручении пространства с жестким коническим включением.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу кручения упругого пространства, ослабленного конической щелью. Пусть r, ϑ, φ — система сферических координат, начало которой совпадает с вершиной щели, а ось z — ось симметрии (фигура). При таком выборе координат рассматриваемая задача сводится к определению единственной, отличной от нуля компоненты вектора смещения $u_\varphi = u(r, \vartheta)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u - \frac{u}{r^2 \sin^2 \vartheta} = 0 \quad (1.1)$$

Компоненты тензора напряжений могут быть выражены через функцию u при помощи соотношений

$$\tau_{\vartheta\varphi} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{u}{\sin \vartheta} \right) \right] \frac{\sin \vartheta}{r}, \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right] \quad (1.2)$$

где μ — модуль сдвига.

Искомая функция должна удовлетворять граничным условиям одного из следующих двух типов (заданы касательные перемещения или касательные напряжения):

$$u|_{\vartheta=\alpha} = f(r), \quad 0 \leq r < R \quad (1.3)$$

$$\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{u}{\sin \vartheta} \right) \Big|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{\mu} g(r), \quad 0 \leq r < R \quad (1.4)$$

Здесь $f(r)$ и $g(r)$ — заданные непрерывные функции.

Кроме того, должны быть выполнены условия на бесконечности и условия поведения искомой функции вблизи вершины конуса

$$u|_{r \rightarrow \infty} = O(r^{-1}), \quad \tau_{r\varphi} = O(r^{-2}), \quad \tau_{\vartheta\varphi} = O(r^{-2}) \quad (1.5)$$

$$u|_{\vartheta=0, r \rightarrow 0} = O(1); \quad \tau_{r\varphi} = O(r^{-\delta}), \quad 0 < \delta < 1$$

$$\tau_{\vartheta\varphi} = O(r^{-\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (1.6)$$

2. Сведение задачи к парным интегральным уравнениям. Для решения поставленной задачи будем пользоваться методом разделения переменных и искать решение в форме

$$u = \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau, \quad 0 \leq \vartheta < \alpha \quad (2.1)$$

$$u = \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau, \quad \alpha < \vartheta < \pi$$

для случая граничных условий (1.3) и в форме

$$u = \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} N(\tau) \frac{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^2(\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau, \quad 0 \leq \vartheta < \alpha \quad (2.2)$$

$$u = \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} N(\tau) \frac{-\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^2(-\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau, \quad \alpha < \vartheta < \pi$$

для граничных условий (1.4).

В этих выражениях $M(\tau)$ и $N(\tau)$ — непрерывные функции, подлежащие определению, $P_\nu^m(x)$ — присоединенная сферическая функция Лежандра первого рода.

Выражения (2.1) и (2.2) формально удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1), условиям (1.5) и (1.6), а также условиям непрерывности на оси симметрии и поверхности $\vartheta = \alpha$.

Граничные условия (1.3) и (1.4) и требование непрерывности нормальной производной функции при переходе через поверхность ($R < r < \infty$, $\vartheta = \alpha$) приводят к парным уравнениям для определения функций $M(\tau)$ и $N(\tau)$. Эти уравнения имеют вид

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = f(r), \quad r < R \quad (2.3)$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \frac{(1/2 + 2\tau^2) \operatorname{ch} \pi\tau}{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = 0, \quad r < R$$

в задаче с заданными перемещениями и

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} N(\tau) e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = \frac{g(r)}{\mu}, \quad r < R$$

$$\sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} N(\tau) \frac{(1/2 + 2\tau^2) \operatorname{ch} \pi\tau}{\pi P_{-1/2+i\tau}^2(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^2(-\cos \alpha)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = 0, \quad r > R \quad (2.4)$$

в задаче с заданными касательными напряжениями.

Уравнения (2.3) и (2.4) принадлежат к классу парных интегральных уравнений, связанных с преобразованием Меллина, исследованным в работе [1]. Покажем, что решения этих уравнений могут быть выражены в квадратурах через вспомогательные функции, удовлетворяющие интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с симметричными ядрами. Последние допускают эффективные решения и позволяют получить удобные расчётные формулы для компонент тензора напряжений и других представляющих интерес величин.

3. Решение парных интегральных уравнений. Рассмотрим парные интегральные уравнения (2.3). Будем искать их решение в форме

$$M(\tau) = \frac{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)}{4 \sqrt{\pi R} (1 + 4\tau^2) \operatorname{ch} \pi \tau} \times \\ \times \frac{\Gamma(5/4 + 1/2 i\tau)}{\Gamma(3/4 + 1/2 i\tau)} \int_0^R \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} e^{i\tau \ln t/R} dt \quad (3.1)$$

Здесь $\varphi(t)$ — неизвестная функция, непрерывная вместе со своей производной в интервале $(0, R)$ и удовлетворяющая условию $\varphi(t) \sqrt{t} \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow 0$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Если подставить (3.1) во второе из уравнений (2.3) и принять во внимание известное соотношение

$$\frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1/4 + 1/2 i\tau)}{\Gamma(3/4 + 1/2 i\tau)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = \begin{cases} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

то нетрудно убедиться, что рассматриваемое уравнение удовлетворяется тождественно. Подстановка (3.1) в оставшееся из уравнений приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi(x) = l(x) - \int_0^{\infty} G(|x - y|) \psi(y) dy, \quad 0 < x < \infty \quad (3.2)$$

Здесь

$$t = Re^{-x}, \quad s = Re^{-y}, \quad e^{-1/2 x} \varphi(Re^{-x}) = \psi(x)$$

$$l(x) = -16e^{3/2 x} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{f(Re^{-y}) e^{-3y}}{(e^{-2x} - e^{-2y})^{1/2}} dy$$

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^1(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^1(-\cos \alpha)}{[P_{-1/2+i\tau}^1(0)]^2} - 1 \right\} \cos \tau x d\tau$$

В этом нетрудно убедиться, если провести вычисления, сходные с вычислениями работы [1], и воспользоваться разрывным интегралом

$$\frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{R}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(3/4 - 1/2 i\tau)}{\Gamma(5/4 - 1/2 i\tau)} e^{-i\tau \ln r/R} d\tau = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{R^2}{r \sqrt{r^2 - R^2}}, & r > R \end{cases}$$

Для уравнений (2.4) решение ищем в форме

$$N(\tau) = \frac{(1/2 - i\tau) P_{-1/2+i\tau}^2(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^2(-\cos \alpha)}{2 \sqrt{\pi R} (1/4 + \tau^2)^2 \operatorname{ch} \pi \tau} \frac{\Gamma(3/4 + 1/2 i\tau)}{\Gamma(1/4 + 1/2 i\tau)} \int_0^R \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} e^{i\tau \ln t/R} dt \quad (3.3)$$

Аналогично предыдущему приходим к уравнению (3.2), но здесь

$$l(x) = -\frac{1}{2\mu} e^{1/2 x} \int_x^{\infty} \frac{g(Re^{-y}) e^{-2y}}{(e^{-2x} - e^{-2y})^{1/2}} dy$$

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^2(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^2(-\cos \alpha)}{[P_{-1/2+i\tau}^2(0)]^2} - 1 \right\} \cos \tau x d\tau$$

Уравнение (3.2) принадлежит к классу разрешимых по методу Винера — Хопфа. Однако применение этого метода к данному уравнению или к исходным парным уравнениям связано с факторизацией сложных функций и приводит к формулам, мало удобным для численных расчетов. Более рациональным поэтому является применение метода итераций, а также разложение в ряд по степеням малого параметра.

4. Решение задачи для случая большого угла раствора конуса. Метод малого параметра. Рассмотрим метод решения уравнения (3.2), основанный на разложении по степеням $\text{ctg}^2 \alpha$, приводящий к относительно простым формулам. В основе метода лежит формула разложения произведения сферических функций в ряд

$$\begin{aligned} \sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \alpha) &= \frac{1}{2^m \pi^2} \text{ch}^2 \pi \tau \times \\ &\times \frac{\Gamma^2(1/2 + i\tau + m) \Gamma^2(1/2 - i\tau + m)}{\Gamma^2(1 + m)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(m + 1/2)_k}{k!} \times \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{1}{2} - k + m, \frac{1}{2} + i\tau + m, \frac{1}{2} - i\tau + m; 2m + 1, m + 1; 1\right) \text{ctg}^{2k} \alpha \end{aligned} \quad (4.1)$$

где ${}_3F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Вывод этой формулы дан в приложении.

Воспользовавшись (4.1), можно представить ядро в виде

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\sin \alpha P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \alpha) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \alpha)}{[P_{-1/2+i\tau}^m(0)]^2} - 1 \right\} \times \\ &\times \cos \tau x d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x) \text{ctg}^{2k} \alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} G_k(x) &= (-1)^k \frac{(m + 1/2)_k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\omega_k(\tau) [P_{-1/2+i\tau}^m(0)]^2}{2^m \pi^2 (m!)^2} \cos \tau x d\tau \\ \omega_k(\tau) &= \frac{\Gamma^2(1/2 + i\tau + m) \Gamma^2(1/2 - i\tau + m)}{[P_{-1/2+i\tau}^m(0)]^2} \text{ch}^2 \pi \tau \times \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{1}{2} - k + m, \frac{1}{2} + i\tau + m, \frac{1}{2} - i\tau + m; 2m + 1, m + 1; 1\right) \end{aligned}$$

Ряд (4.2) быстро сходится при малых значениях $\text{ctg}^2 \alpha$, т. е. при α , близких к $1/2 \pi$ (конус большого раскрытия). Коэффициенты ряда могут быть найдены путем численного интегрирования, причем значения функции $\omega_k(\tau)$ определяются по формулам

$$\omega_0 = 2^m, \quad \omega_1 = \frac{8\Gamma^2(3/4 + 1/2m + 1/2i\tau)}{\Gamma^2(1/4 - 1/2m + 1/2i\tau)} \frac{\Gamma^2(3/4 - 1/2m + 1/2i\tau)}{\Gamma^2(1/4 + 1/2m + 1/2i\tau)} + \frac{1}{2} - 2\tau^2 - 2m^2$$

$$[(k + 1/2m + 1/2)^2 + 1/4m^2] \omega_{k+1} + [\tau^2 - 1/4 - 2k^2] \omega_k + [(k - 1/2m - 1/2)^2 + 1/4m^2] \omega_{k-1} = 0 \quad (4.3)$$

Разложение ядер $G(x)$ уравнения (3.2) в задаче с заданными перемещениями и в задаче с заданными касательными напряжениями получаются из (4.1) как частные случаи, если положить соответственно $m = 1$, $m = 2$.

Если искать решение рассматриваемых интегральных уравнений в форме

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \text{ctg}^{2k} \alpha \quad (4.4)$$

то для определения коэффициентов $\psi_k(x)$ получаем цепь рекуррентных соотношений

$$\psi_0(x) = l(x) \quad (4.5)$$

$$\psi_k(x) = - \sum_{n=1}^k \int_0^{\infty} G_n(|x-y|) \psi_{k-n}(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применение этого метода к конкретной задаче дано ниже.

5. Кручение упругого пространства с жестким коническим включением. Рассмотрим задачу о кручении упругого пространства с включением в виде жесткого тонкого конуса (фигура). Представим касательное смещение в виде суммы смещения, возникающего при кручении однородного пространства, и добавочного смещения, вызванного присутствием конуса

$$u_\varphi = 1/2 \gamma r^2 \sin 2\theta + u$$

где γ — постоянный угол закручивания на единицу длины. Тогда задача сводится к решению задачи, рассмотренной в п. 3, при

$$f(r) = \theta r - 1/2 \gamma r^2 \sin 2\alpha$$

Здесь θ — неизвестный угол поворота конуса. Значение этого угла должно быть найдено из условия равенства нулю момента, создаваемого касательными напряжениями, действующими на конус.

Применяя развитую выше методику, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\psi(x) = 16\theta e^{-3/2x} + 3\pi\gamma R \sin 2\alpha e^{-5/2x} - \int_0^{\infty} G(|x-y|) \psi(y) dy, \quad 0 \leq x < \infty$$

где ядро $G(x)$ определяется равенством (4.2) при $m = 1$.

Решение последнего уравнения удобно представить в форме

$$\psi(x) = 64\theta\psi_1(x) - 15\pi\gamma R \sin 2\alpha\psi_2(x)$$

Здесь $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — соответственно решения уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 4e^{-3/2x} - \int_0^{\infty} G(|x-y|) \psi_1(y) dy \\ \psi_2(x) &= 5e^{-5/2x} - \int_0^{\infty} G(|x-y|) \psi_2(y) dy \end{aligned}$$

Функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ выражаются в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,1}(x) \operatorname{ctg}^{2k} \alpha \\ \psi_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,2}(x) \operatorname{ctg}^{2k} \alpha \end{aligned}$$

Вычисления коэффициентов этих рядов производились по схеме п. 4, для чего использовалась БЭСМ-4.

После определения функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ результирующий момент, приложенный к конусу, дается формулой

$$M = 3\pi^2 R^2 \mu \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} [64\theta\psi_1(x) - 15\pi\gamma R \sin^2 \alpha \psi_2(x)] e^{-5/2x} dx$$

Требование $M = 0$ приводит теперь к искомому соотношению между углом θ и заданным углом закручивания γ

$$\frac{\theta}{\gamma} k = \int_0^{\infty} \psi_2(x) e^{-5/2x} dx \bigg/ \int_0^{\infty} \psi_1(x) e^{-5/2x} dx$$

$$k = 64 (15\pi R \sin 2\alpha)^{-1}$$

Для значений α , близких к $1/2 \pi$, получается выражение простого вида в форме разложения по степеням $\operatorname{ctg}^2 \alpha$

$$\theta / \gamma k = 1 + 0.3578 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 0.0976 \operatorname{ctg}^4 \alpha + \dots$$

Приложение. Приведем краткий вывод формулы (4.1). В качестве исходного воспользуемся интегральным представлением¹

$$P_\nu^m(\cos \alpha) P_\nu^m(-\cos \alpha) = (-1)^{m-1} \frac{2^m \Gamma(m + 1/2)}{\pi \sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \sin^{2m} \alpha \sin \pi \nu \int_1^{\infty} \frac{(t+1)^{1/2m} P_\nu^m(t) dt}{(t-1)^{1/2m+1/2} (t-\cos 2\alpha)^{m+1/2}}$$

$$(-1 < \operatorname{Re} \nu < 0)$$

Подставляя сюда разложение

$$\frac{(t+1)^{1/2m} (t-\cos 2\alpha)^{-m-1/2}}{(t-1)^{1/2m}} = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)^{m+1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{(t^2-1)^{1/2m+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(m+1/2)_k (t-1)^k}{k! (t+1)^k} \operatorname{ctg}^{2k} \alpha$$

и интегрируя почленно, находим

$$P_\nu^m(\cos \alpha) P_\nu^m(-\cos \alpha) = (-1)^{m-1} \frac{2^m \Gamma(m + 1/2)}{\pi \sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \sin^{2m} \alpha \sin \pi \nu (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)^{m+1/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(m+1/2)_k}{k!} \operatorname{ctg}^{2k} \alpha \int_1^{\infty} \frac{P_\nu^m(t) (t-1)^k dt}{(t^2-1)^{1/2m+1/2} (t+1)^k}$$

Воспользовавшись известными формулами теории гипергеометрических функций [2] для вычисления интеграла, стоящего в правой части этого равенства, получаем при $\nu = -1/2 + i\tau$ формулу (4.1). Частный случай этой формулы, соответствующий $m = 0$, был приведен в работе [1].

В заключение автор выражает глубокую признательность Н. Н. Лебедеву и Я. С. Уфляндю за полезные советы и обсуждения работы.

Поступила 5 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская. Распределение электричества на тонком конечном конусе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 6.
2. Bailey W. N. Generalized hypergeometric Series. Cambr. Tracts in Math. and Math. Physics, 1935, vol. 32, p. 108.

¹ Это представление было сообщено автору Н. Н. Лебедевым и И. П. Скальской.