

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости. В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела (к 60-летию академика В. В. Новожилова). Л., «Судостроение», 1970.
2. Черепанов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
3. Naue A. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. — ZAMM, 1954, Bd 34, H 1/2.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
5. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Черепанов Г. П., Кулиев В. Д. Решение одной динамической задачи теории упругости. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1972, № 4.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛЬНО  
НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. М. Куршин, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Изучается влияние нелинейного характера осесимметричного деформирования полубесконечной круговой цилиндрической оболочки, обжимаемой по торцу равномерным поперечным усилием, на ее устойчивость по отношению к бесконечно малым несимметричным возмущениям, удовлетворяющим на торце условиям шарнирного опирания.

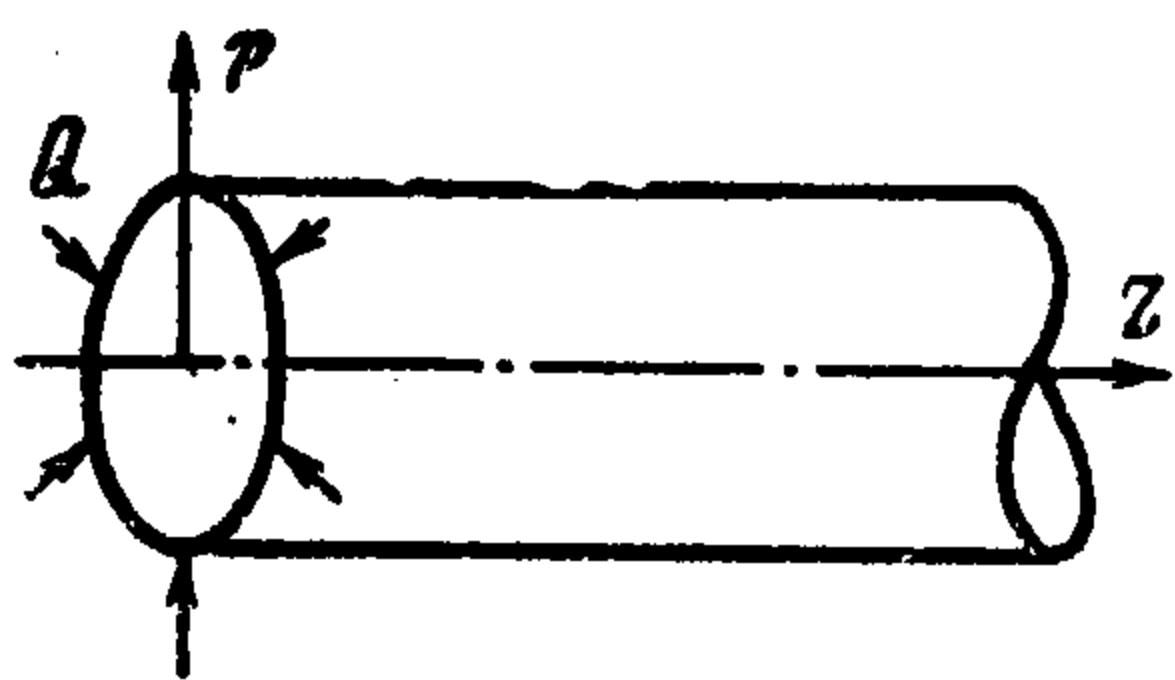
При нагружении круговой цилиндрической оболочки кольцевой нагрузкой, при ее нагреве со скачкообразным изменением температуры на опорах или между опорами и при других сосредоточенных по некоторому поперечному сечению воздействиях в оболочке возникает осесимметричное напряженное состояние, локализуемое на части ее длины. Такое состояние может оказаться неустойчивым, в том смысле, что по достижении нагрузкой (температурой и пр.) некоторого критического уровня оболочка перейдет в смежное состояние равновесия с образованием волн в окружном направлении. Известно, что смежное (выпученное) состояние, как и начальное (докритическое), носит ярко выраженный локальный (в осевом направлении) характер.

В первых теоретических исследованиях по проблеме устойчивости цилиндрических оболочек, находящихся в условиях локального осесимметричного напряженного состояния, была использована классическая постановка этой проблемы, которая не учитывает изменения формы оболочки, вызванного докритической деформацией [1-3]. Вопрос о необходимости более общей постановки задач рассматриваемого класса был поднят в работе [4], где уравнения устойчивости цилиндрической оболочки, нагреваемой между холодными диафрагмами, были записаны с учетом докритического искривления ее образующей. При этом изменение продольной кривизны оболочки к моменту потери устойчивости было определено по линейной формуле. Позднее в такой постановке были получены решения целого ряда задач [5-10], которые показали высокую чувствительность критического уровня внешних воздействий к изменению формы оболочки перед потерей устойчивости.

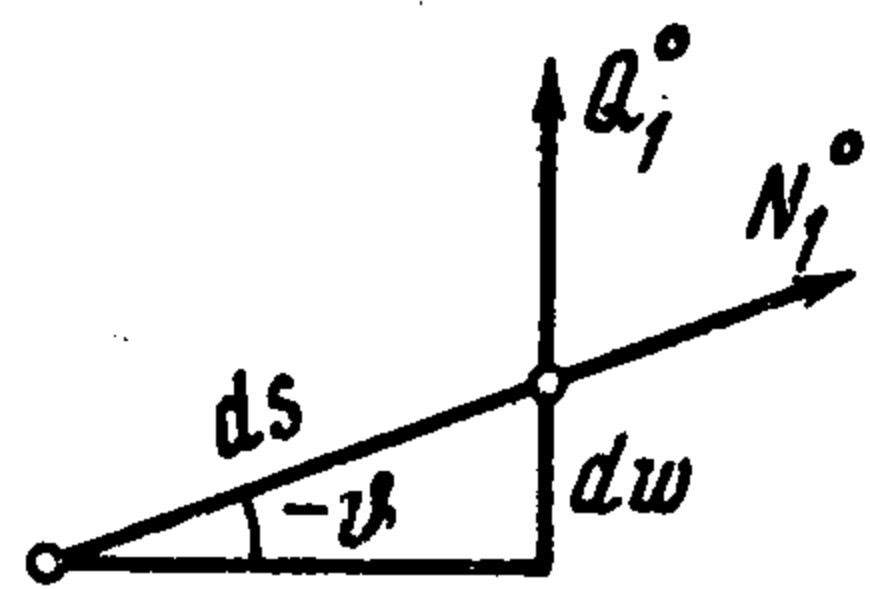
Так, в задаче об устойчивости при равномерном нагреве цилиндрической оболочки, соединенной на торце с жесткой холодной диафрагмой, значения параметра  $\tau$  в формуле

для критического перепада температур  $\theta = \tau \mu^2 / \alpha$  ( $\mu^2 = h / R \sqrt{3(1-\nu^2)}$ ,  $h$  и  $R$  — толщина и радиус оболочки,  $\nu$  и  $\alpha$  — коэффициенты поперечного и температурного расширения), полученные с учетом докритического изгиба, составляют для разных видов шарнирного опирания 40.5 [5], 39 [6], 34.6 [7]. Решение тех же задач в классической постановке приводит к значениям 8.74 [5], 8,56 [6], 8.85 [7]. При ступенчатом изменении температуры вдоль образующей для  $\tau$  найдены значения 30.2 [5], 32.5 [7], 33.9 [8], 34.6 [9], 29.8 [10] с учетом докритического изгиба и значения 7.6 [3], 7.4 [5], 7.82 [7], 7.28 [8] без такого учета. В каждой из этих задач эффект, вызываемый докритическим искривлением образующей, становится основным и приводит к изменению критического значения параметра  $\tau$  в 3.5—4.5 раза.

Докритический изгиб оболочки вызывает поворот ее образующей в месте соединения с диафрагмой на угол, абсолютная величина которого равна  $\tau \mu$ . Следовательно,



Фиг. 1



у не слишком тонких оболочек к моменту потери устойчивости этот угол становится весьма большим. По отношению к таким оболочкам возникает сомнение в допустимости линеаризации выражений, определяющих компоненты докритической изгибной деформации. В связи с этим ниже рас-

смотрена одна из характерных задач локальной устойчивости цилиндрических оболочек, причем для определения докритического состояния использованы нелинейные уравнения, описывающие деформацию с произвольными углами поворота. Некоторые соображения о целесообразности нелинейного определения докритического состояния высказывались ранее в работе [11].

1. Пусть полубесконечная круговая цилиндрическая оболочка нагружена на свободном торце равномерным поперечным усилием  $Q$  (фиг. 1). Обозначим через  $M_\alpha$ ,  $N_\alpha$ ,  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\kappa_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) соответственно удельные изгибающие моменты, нормальные усилия, компоненты тангенциальной и изгибной деформации, причем индекс 1 будем относить к направлению вдоль образующей, а индекс 2 — к окружному направлению.

Из соотношений

$$dw^\circ / ds = -\sin\vartheta, \quad \varepsilon_2^\circ = w^\circ / R$$

где  $w^\circ$  — прогиб,  $\vartheta$  — угол поворота образующей, следует условие совместности осесимметричных деформаций

$$R d\varepsilon_2^\circ / ds + \sin\vartheta = 0$$

Здесь  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль деформированной образующей. Статические и геометрические характеристики осесимметричного докритического состояния условимся отмечать верхним нулевым индексом.

Для компонент изгибной деформации в соответствии с их определением будем использовать точные выражения

$$\kappa_1^\circ = dv / ds, \quad \kappa_2^\circ = (\cos\vartheta - 1) / R$$

В силу отсутствия осевых нагрузок уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид ( $Q_1^\circ$  — радиальное усилие)

$$N_1^\circ = -Q_1^\circ \sin\vartheta, \quad N_2^\circ = R dQ_1^\circ / ds, \quad dM_1^\circ / ds - Q_1^\circ \cos\vartheta = 0$$

При помощи соотношений упругости

$$\varepsilon_2^\circ = A (N_2^\circ - \nu N_1^\circ), \quad M_1^\circ = D (\kappa_1^\circ + \nu \kappa_2^\circ) \quad (A = 1 / Eh, \quad D = Eh^3 / 12 (1 - \nu^2))$$

выразим величины  $\varepsilon_2^\circ$  и  $M_1^\circ$  через функции  $Q_1^\circ$  и  $\vartheta$ .

Условие совместности и последнее из уравнений равновесия дают нелинейную систему для этих функций. Обозначив

$$s = \sqrt{2CR}x, \quad Q_1^\circ = (D/CR)\eta(x), \quad C = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad \mu = \sqrt{2C/R}$$

запишем нелинейную систему в виде

$$\eta'' + \mu\nu(\eta \sin \vartheta)' + 2 \sin \vartheta = 0, \quad \vartheta'' + \mu\nu(\cos \vartheta)' - 2\eta \cos \vartheta = 0$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $x$ . На нагруженном крае должны выполняться условия

$$Q_1^\circ = Q, \quad M_1^\circ = 0$$

которые принимают вид

$$\eta = \mu q, \quad \vartheta' + \mu\nu(\cos \vartheta - 1) = 0 \quad (x = 0), \quad q = 2AQ/\mu^3$$

где  $q$  — безразмерный параметр нагрузки. Кроме того, будем требовать ограниченности функций  $\eta$  и  $\vartheta$  на бесконечности.

Для тонких оболочек  $\mu\nu \ll 1$ , что дает возможность сформулировать поставленную краевую задачу в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \eta'' + 2 \sin \vartheta = 0, \quad \vartheta'' - 2\eta \cos \vartheta = 0 \quad (0 \leq x \leq \infty) \\ \eta = \mu q, \quad \vartheta' = 0 \quad (x = 0), \quad \eta = \vartheta = 0 \quad (x = \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вводя новые переменные

$$\varphi = \frac{\eta}{\mu}, \quad \chi = \frac{\sin \vartheta}{\mu}, \quad t = \int_0^x \cos \vartheta dx$$

вместо (1.1) получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} + 2\chi - \mu^2\chi(\varphi^{(2)}\chi + \varphi^{(1)}\chi^{(1)}) = 0, \quad \chi^{(2)} - 2\varphi = 0 \quad (0 \leq t \leq \infty) \\ \varphi = q, \quad \chi^{(1)} = 0 \quad (t = 0), \quad \varphi = \chi = 0 \quad (t = \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь индекс в круглых скобках показывает порядок производной по  $t$ . При такой записи явно выделяется кубическая нелинейность зависимых переменных. Исключая из (1.2) функцию  $\varphi$ ; приходим к следующей краевой задаче для функции  $\chi$ :

$$\chi^{(4)} + 4\chi - \mu^2\chi(\chi^{(4)}\chi + \chi^{(3)}\chi^{(1)}) = 0 \quad (0 \leq t \leq \infty) \quad (1.3)$$

$$\chi^{(2)} = 2q, \quad \chi^{(1)} = 0 \quad (t = 0), \quad \chi^{(2)} = \chi = 0 \quad (t = \infty) \quad (1.4)$$

Следуя [12], решение задачи ищем в виде

$$\chi = a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \mu^2(a_3\zeta_1^3 + a_4\zeta_1^2\zeta_2 + a_5\zeta_1\zeta_2^2 + a_6\zeta_2^3) + \dots \quad (1.5)$$

где  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — ограниченные на бесконечности] линейно независимые решения уравнения  $\zeta^{(4)} + 4\zeta = 0$ , имеющие вид

$$\zeta_\alpha(t) = \exp(\lambda_\alpha t), \quad \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i, \quad i = \sqrt{-1}$$

Коэффициенты  $a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$  последовательно определяются из уравнения (1.3) через постоянные  $a_1$  и  $a_2$ . В частности

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{40} a_1^3, \quad a_4 = -\frac{1+3i}{20} a_1^2 a_2 \\ a_5 = -\frac{1-3i}{20} a_1 a_2^2, \quad a_6 = \frac{1}{40} a_2^3 \end{aligned}$$

Граничные условия при  $t = 0$  дают нелинейную алгебраическую систему для определения этих постоянных

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 a_1 + \lambda_2^2 a_2 + \mu^2 g_1(a_1, a_2) &= 2q, & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu^2 g_2(a_1, a_2) &= 0 \\ g_1 &= \frac{9}{40} \lambda_1^2 a_1^3 - \frac{13+9i}{10} a_1^2 a_2 - \frac{13-9i}{10} a_1 a_2^2 + \frac{9}{40} \lambda_2^2 a_2^3 + \dots \\ g_2 &= \frac{3}{40} \lambda_1 a_1^3 + \frac{3+4i}{10} a_1^2 a_2 + \frac{3-4i}{10} a_1 a_2^2 + \frac{3}{40} \lambda_2 a_2^3 + \dots \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся выписанным конечным числом членов ряда (1.5). Постоянные  $a_1$  и  $a_2$  приближенно определим из уравнений

$$\lambda_1^2 a_1 + \lambda_2^2 a_2 = 2q - \mu^2 g_1(c_1, c_2), \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = -\mu^2 g_2(c_1, c_2)$$

где  $c_\alpha$  — решение линейной системы

$$\lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 = 2q, \quad \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0.$$

При таком определении постоянных  $a_1$  и  $a_2$  полученное приближенное решение в точности соответствует двум первым членам разложения решения краевой задачи (1.3), (1.4) по малому параметру  $\mu^2$ . В этом же приближении будем иметь

$$t = \int_0^x \left( 1 - \frac{\mu^2 \chi_0^2}{2} \right) dx, \quad \chi_0 = \chi_1(x) = c_1 \zeta_1(x) + c_2 \zeta_2(x)$$

так что переменная  $t$  является известной функцией от  $x$ .

После отделения вещественных и мнимых частей у введенных комплексных выражений получаем необходимые в дальнейшем функции, определяющие окружное усилие в оболочке и кривизну образующей докритического состояния

$$\varphi^{(1)} = -q e^{-t} [(\alpha + \beta) \cos t - (\alpha - \beta) \sin t + p^2 e^{-2t} \times \\ \times (27 \sin 3t + 62 \cos t + 34 \sin t)], \quad (\alpha = 1 - 13p^2/2)$$

$$\chi^{(1)} = q e^{-t} [(\alpha - \beta) \cos t + (\alpha + \beta) \sin t + p^2 e^{-2t} \times \\ \times (3 \cos 3t - 14 \cos t + 2 \sin t)] \quad (\beta = 1 - 47p^2/2)$$

$$p^2 = \mu^2 q^2 / 40, \quad t = x - 5p^2 [3 - e^{-2x} (2 + \cos 2x + \sin 2x)]$$

Формальным отбрасыванием членов с множителем  $\mu^2$  получаем решение линеаризованной задачи

$$\begin{aligned} \varphi_0' &= -2q e^{-x} \cos x, & \varphi_0 &= q e^{-x} (\cos x - \sin x) \\ \chi_0' &= 2q e^{-x} \sin x, & \chi_0 &= -q e^{-x} (\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

2. С учетом локального характера выпучивания уравнения устойчивости деформированной цилиндрической оболочки можно записать в форме, предлагаемой теорией пологих оболочек [13]. Вводя функцию  $v$ , определяющую приращения нормальных усилий в виде

$$N_2 = -B \nabla_1^2 v, \quad N_1 = -B \nabla_2^2 v \quad (B = CEh)$$

и функцию  $w$ , определяющую приращения изгибных деформаций в виде

$$\kappa_1 = -\nabla_1^2 w, \quad \kappa_2 = -\nabla_2^2 w$$

придем к следующей записи уравнений устойчивости:

$$C \nabla^2 \nabla^2 v + (R^{-1} + \kappa_2^0) \nabla_1^2 w + \kappa_1^0 \nabla_2^2 w = 0$$

$$C \nabla^2 \nabla^2 w - (R^{-1} + \kappa_2^0) \nabla_1^2 v - \kappa_1^0 \nabla_2^2 v - B^{-1} (N_1^0 \nabla_1^2 w + N_2^0 \nabla_2^2 w) = 0$$

$$\left( \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad \nabla_2^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial s}, \quad \nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2 \right)$$

Здесь  $r(s)$  — расстояние от оси до точки на деформированной поверхности оболочки,  $\vartheta$  — угловая координата.

Используя выражения

$$\frac{dr}{ds} = -\sin \vartheta, \quad \frac{1}{R} + \kappa_2^\circ = \frac{1}{R} \cos \vartheta, \quad \kappa_1^\circ = \frac{d\vartheta}{ds}$$

$$N_1^\circ = -\frac{B}{R} \eta \sin \vartheta, \quad N_2^\circ = B \frac{d\eta}{ds}$$

переходя к переменной  $x$  и полагая ( $n$  — целое число)

$$v = \sum_n v_n(x) \exp(iny), \quad w = \sum_n w_n(x) \exp(iny)$$

получаем для каждого значения  $n$  систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P_n^2 \vartheta_n'' + 2 \cos \vartheta w_n'' - 2\mu^{-1} \vartheta' (\gamma^2 w_n + \mu \sin \vartheta w_n') = 0$$

$$P_n^2 w_n'' - 2 \cos \vartheta v_n'' + 2\mu^{-1} \vartheta' (\gamma^2 v_n + \mu \sin \vartheta v_n') +$$

$$+ 2\eta \sin \vartheta w_n'' + 2\mu^{-1} \eta' (\gamma^2 w_n + \mu \sin \vartheta w_n') = 0$$

$$\left( P_n = \frac{d^2}{dx^2} - \mu \sin \vartheta \frac{d}{dx} - \gamma^2, \quad \gamma = \mu n \right)$$

Вводя для докритического состояния вместо функций  $\eta, \vartheta$  функции  $\varphi, \chi$  и учитывая приближенный характер решения нелинейной задачи, приходим к окончательной записи уравнений устойчивости

$$P_n^2 \vartheta_n'' + 2(1 - \mu^2 \chi_0^2) w_n'' - 2\chi^{(1)} (\gamma^2 w_n + \mu^2 \chi_0 w_n') = 0$$

$$P_n^2 w_n'' - 2(1 - \mu^2 \chi_0^2) v_n'' + 2\chi^{(1)} (\gamma^2 v_n + \mu^2 \chi_0 v_n') +$$

$$+ 2\mu^2 \varphi_0 \chi_0 w_n'' + 2\varphi^{(1)} \sqrt{1 - \mu^2 \chi_0^2} (\gamma^2 w_n + \mu^2 \chi_0 w_n') = 0$$

На крае  $x = 0$  зададим для возмущенного состояния граничные условия шарнирного опирания ( $u_2$  — окружное перемещение)

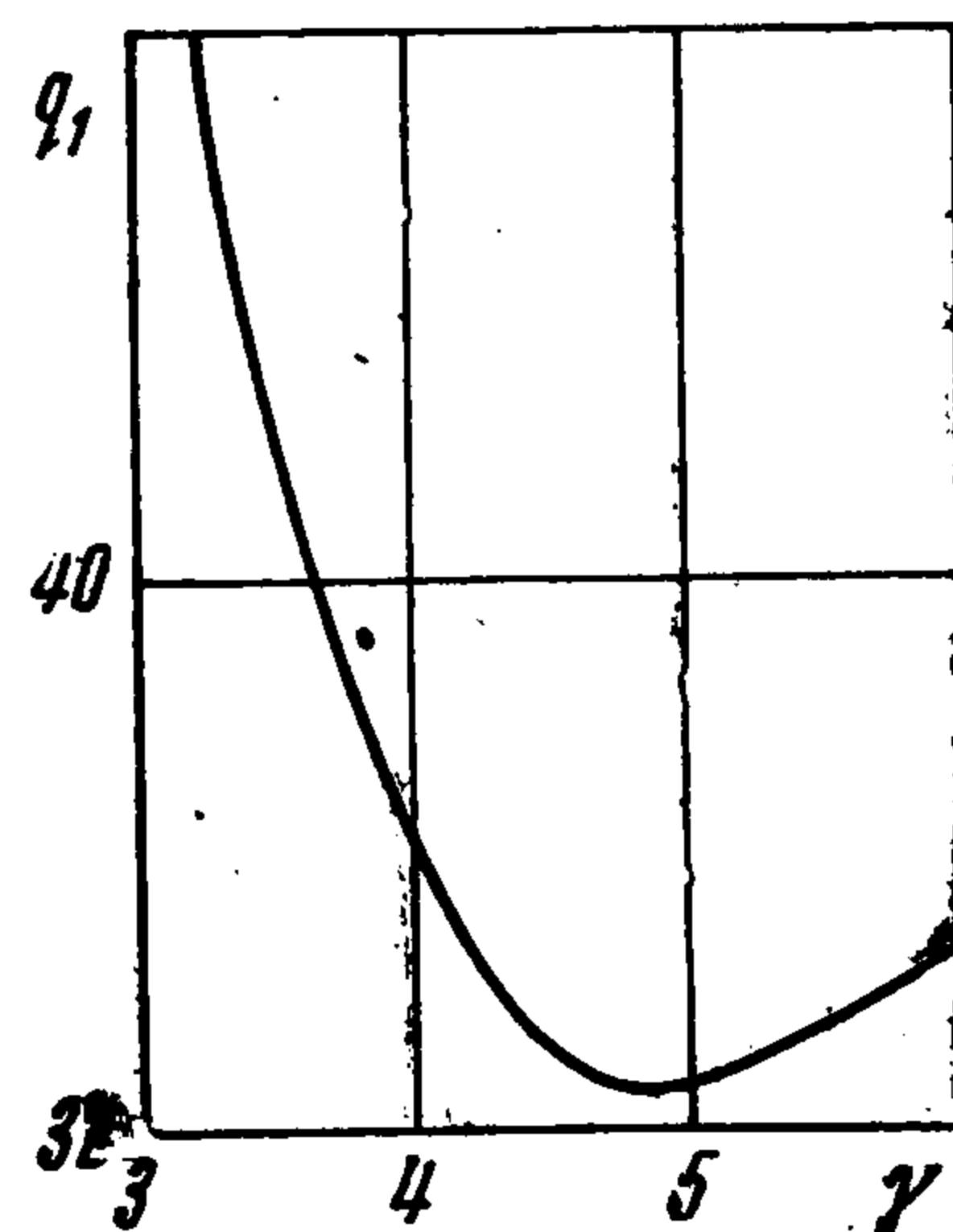
$$N_1 = u_2 = w = M_1 = 0$$

На бесконечности решение должно исчезать.

Таким образом, имеем однородную краевую задачу, зависящую от параметра нагрузки  $q$ . Наименьшее собственное значение этого параметра определяет критическую величину внешнего усилия  $Q$ . Поэтому будем называть его критическим значением.

Заметим, что решение поставленной задачи на собственные значения дает одновременно решение задачи об устойчивости при нагреве цилиндрической оболочки, шарнирно соединенной на торце с холодной жесткой диафрагмой. Такая оболочка теряет устойчивость за счет окружных напряжений, вызванных ограничением температурных деформаций в опорном сечении. При этом критическое значение введенного выше параметра  $\tau$  совпадает с критическим значением параметра  $q$ .

3. Задача об определении критического значения параметра нагрузки  $q$  была решена в конечных разностях методом матричной прогонки [14]. Прежде всего, были проведены расчеты при  $\mu = 0$ , что соответствует линеаризации уравнений докритического состояния оболочки. На фиг. 2 для этого случая представлена кривая зависимости первого собственного значения  $q_1$  от параметра  $\gamma$ , связанного с числом окружных волн. Кривая имеет точку минимума, для которой  $\gamma = \gamma^* \approx 4.9$ ,  $q_1 = q^* \approx 32.7$ . При счете варьировалась длина [интервала и шаг интег-



Фиг. 2

рирования. Результаты получены при длине интервала  $1.5\pi$  и шаге  $\pi/120$ , что обеспечило вычисление первого собственного значения  $q_1$  с точностью до 0.5%.

Таким образом, при определении докритического состояния по линейной теории критическая нагрузка вычисляется по формуле

$$Q^* = q^* \mu^3 E h / 2$$

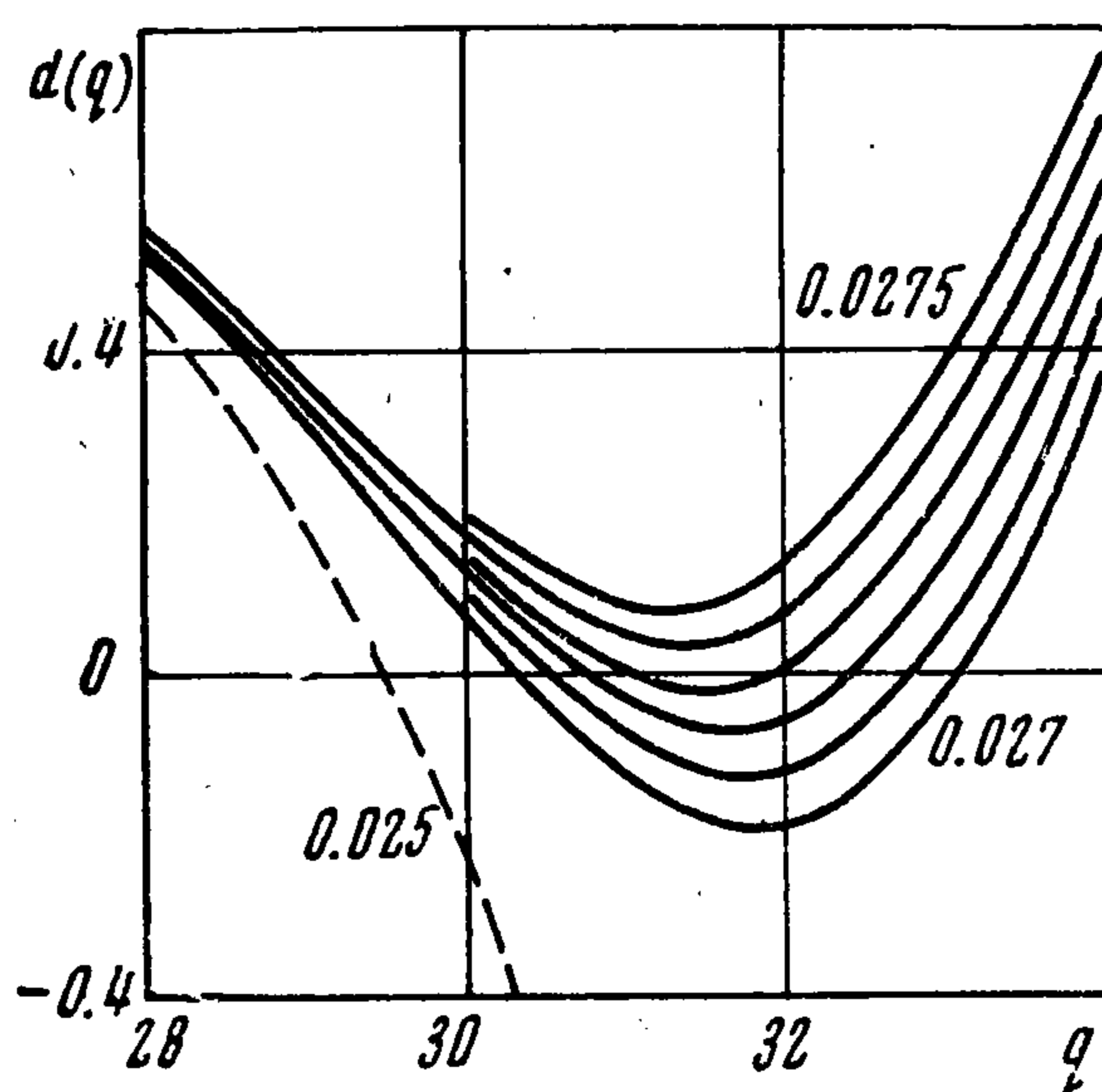
где  $q^* = \text{const} \cong 32.7$ .

Учет нелинейности докритического состояния приводит к зависимости  $q^*$  от параметра  $\mu$ . Численные значения  $q^*$  для ряда значений  $\mu$  даны ниже.

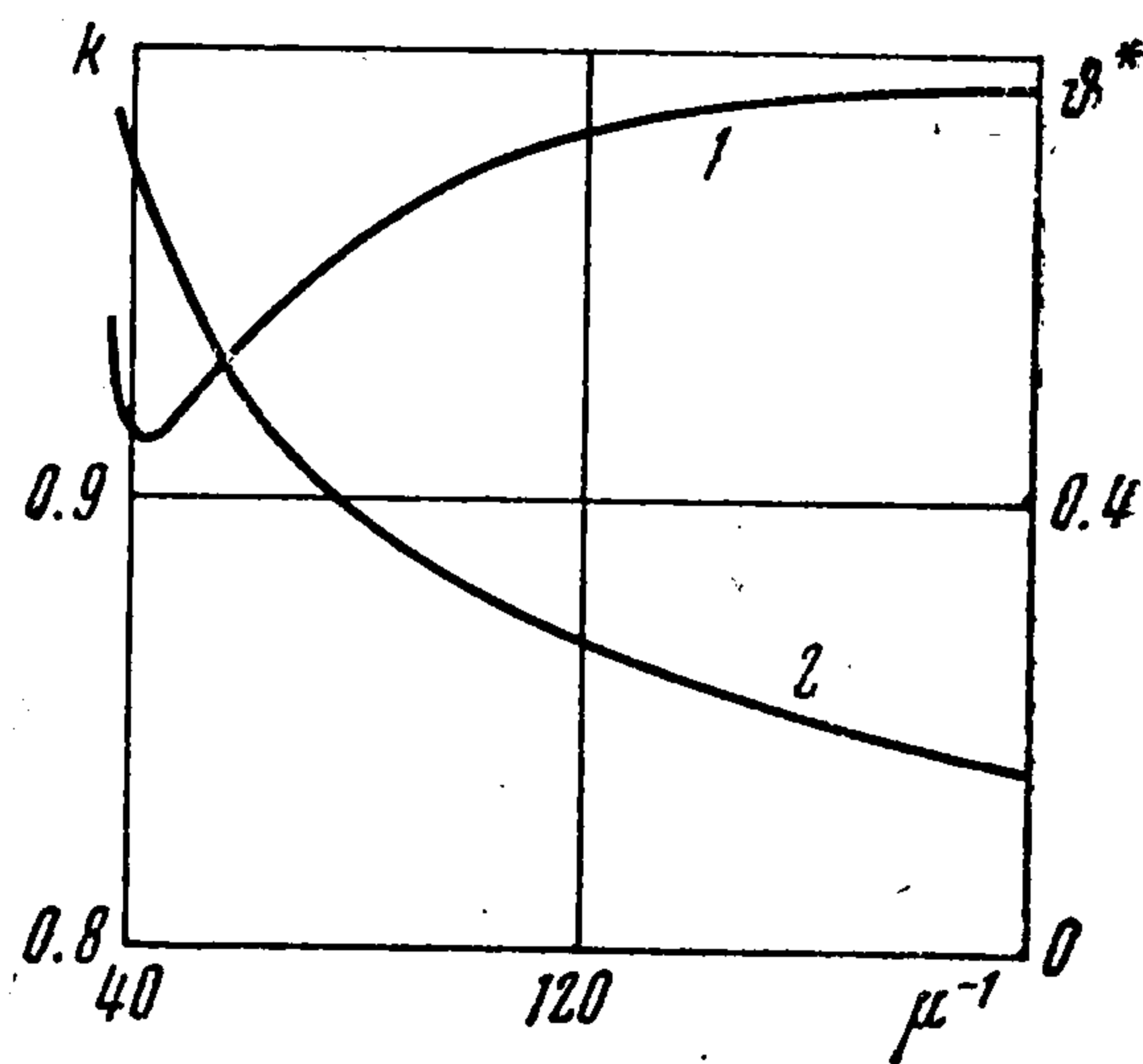
$\mu$	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.026	0.027
$\gamma^*$	4.85	4.8	4.7	4.6	4.4	4.45	4.5
$q^*$	32.5	31.9	30.9	30.1	29.9	30.1	30.7
$\vartheta^*$	0.162	0.315	0.451	0.572	0.685	0.710	0.740

Здесь же указаны отвечающие  $q^*$  значения параметра  $\gamma$  и абсолютные значения докритического угла поворота  $\vartheta$  в точке  $x = 0$  ( $\vartheta^* = |\vartheta(0)|$  при  $q = q^*$ ). Для линейного докритического состояния  $\vartheta^* = \mu q^*$ . Как видим, учет нелинейности не существенно сказывается на величине критической нагрузки. Однако он позволяет обнаружить такое значение  $\mu$ , которое ограничивает область существования критической нагрузки.

В рассматриваемой задаче исчезновение критической нагрузки произошло между значениями  $\mu = 0.027$  и  $\mu = 0.0275$ . Поэтому было проведено специальное исследование поведения корней характеристического определителя  $d(q)$  в промежутке  $0.027 \leq \mu \leq 0.0275$  при  $\gamma^2 = 20$ . Результаты этого исследования представлены на фиг. 3. Сплошные кривые относятся к значениям  $\mu$ , отличающимся друг от друга на 0.0001,



Фиг. 3



Фиг. 4

причем нижней кривой отвечает значение 0.0270, а верхней — 0.0275. Изображенная картина свидетельствует о том, что с ростом  $\mu$  происходит сближение корней определителя (первого и второго собственных чисел задачи) до полного их слияния при  $\mu = \mu_0 \cong 0.0273$ . При  $\mu > \mu_0$  определитель корней не имеет. С уменьшением  $\mu$  от  $\mu_0$  расстояние между корнями быстро увеличивается, о чем свидетельствует характер пунктирной кривой, отвечающей значению  $\mu = 0.025$ .

Наглядное представление об отличии результатов, отвечающих постановке с учетом нелинейности докритического состояния (когда  $q^* = q^*(\mu)$ ) и постановке с его линеаризацией ( $q^* = q^*(0)$ ) дает фиг. 4. Кривой 1 здесь представлено в зависимости от величины  $\mu^{-1} = [3(1 - \nu^2)]^{1/4} (R/h)^{1/2}$  отношение  $k = q^*(\mu) / q^*(0)$ . Решению с линеаризацией докритического состояния отвечает полубесконечная прямая  $k \equiv 1$ . Еще более упрощенная постановка, когда докритическое искривление образующих вообще не учитывается, дает  $q^* = 8.5$  при  $\gamma^* = 1.4$ , что совпадает с результатом [1]. Кривая 2 на фиг. 4 определяет значения величины  $\vartheta^*$ , отвечающие нелинейной задаче.

Из приведенных результатов следует, что решение, отвечающее линейному докритическому состоянию, является асимптотически точным при  $\mu \rightarrow 0$ , но пригодно лишь для весьма тонких оболочек ( $R/h \geq 800$  при  $\nu = 0.3$ ).

Поступила 20 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hoff N. J. Buckling of thin cylindrical shell under hoop stresses varying in axial direction. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
2. Балабух Л. И., Марченко В. М. Устойчивость тонкостенной оболочки, нагруженной местными усилиями. Сб. работ по прочности авиационных конструкций. М., БНИ ЦАГИ, 1958.
3. Кабанов В. В. Устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии, внутреннем давлении и неравномерном нагреве по длине. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, № 4. Киев, «Наукова думка», 1964.
4. Куршин Л. М. Об устойчивости при нагреве цилиндрической оболочки с холодными диафрагмами. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, № 3. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
5. Мяченков В. И., Пахомова Л. А. Локальная устойчивость цилиндрических оболочек при нагреве. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 2.
6. Липовцев Ю. В. К устойчивости вязкоупругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 5.
7. Бадрухин Ю. И., Кабанов В. В. Влияние нагрева на устойчивость оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
8. Кожевников А. А. Локальная устойчивость оболочек вращения. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5.
9. Мяченков В. Н., Репин А. А. Устойчивость цилиндрической оболочки при совместном действии осевого сжатия и нагрева. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
10. Липовцев Ю. В. Особенности применения метода прогонки к решению задач устойчивости оболочек и пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
11. Колобов Ю. А., Куршин Л. М., Лампер Р. Е. Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии осевого сжатия, внутреннего давления и нагрева. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
12. Погорелов А. В. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии. Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
13. Муштар Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек, Казань, Таткнигоиздат, 1957.
14. Huang N. C. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3.