

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Д. Кулиев

(Москва)

Рассматривается аналог решения Лэмба для полубесконечного плоского разреза. Предполагается, что однородное и изотропное упругое тело, занимающее внешность разреза $y = 0$, $x < 0$, в начале покоится. В начальный момент времени $t = 0$ на обоих берегах разреза в точке с координатой $x = -l$ действует мгновенный сосредоточенный импульс P . Эта задача со смешанными граничными условиями на полуплоскости решается методом Винера — Хопфа. Сначала строится решение для аналогичного стационарного случая, а затем на его основе — решение нестационарной задачи. Путем использования последнего решения в качестве функции Грина строится решение более общей динамической задачи с произвольным распределением нагрузки по щели.

1. Стационарная задача. Рассмотрим стационарный волновой процесс в плоскости xy , считая, что физические величины задаются в виде $f(x, y) \exp(-i\omega t)$, где $f(x, y)$ — некоторая функция, ω — частота колебаний, t — время. Уравнения динамической теории упругости имеют вид

$$\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_2^2\Psi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — потенциалы продольной и поперечной волн, k_1 и k_2 — волновые числа, Δ — оператор Лапласа, x, y — прямоугольные декартовы координаты. Компоненты тензора напряжений и вектора смещения выражаются через волновые потенциалы $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2\mu} &= -\left(\frac{1}{2}k_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} \\ \frac{\tau_{xy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k_2^2\right)\Psi \\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь σ_y и τ_{xy} — напряжения, v — составляющая смещения по оси y , μ — модуль сдвига (множитель $\exp(-i\omega t)$ в формулах (1.2) опущен).

Рассмотрим следующую сингулярную граничную задачу для полубесконечного разреза:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -P\delta(x+l)\exp(-i\omega t) \quad \text{при } y=0, \quad x < 0 \\ v &= 0 \quad \text{при } y=0, \quad x > 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } y=0, \quad -\infty < x < \infty \\ \Phi &= O(r^{3/2}), \quad \Psi = O(r^{3/2}) \quad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

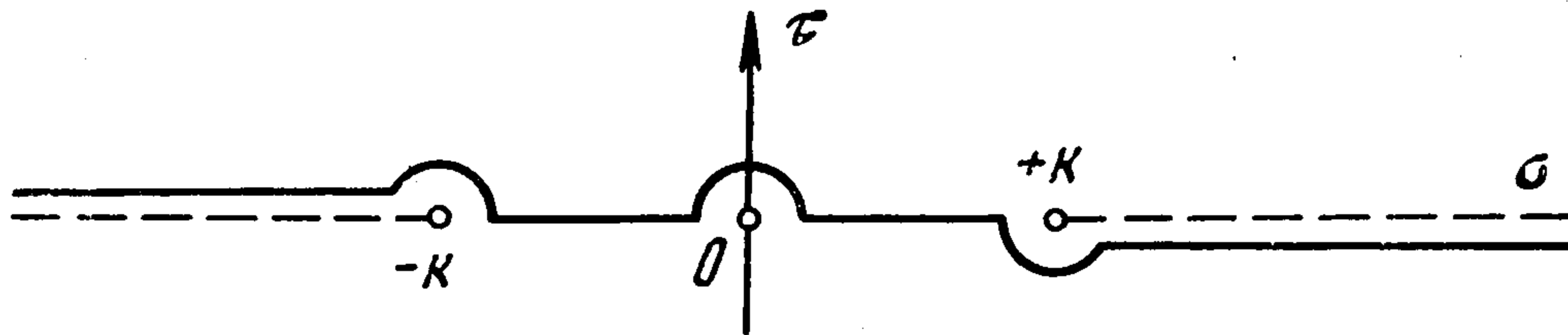
(условие на ребре [1,2]).

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Задача считается симметричной относительно оси x .

Следуя [2], решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) \left(\frac{1}{2}k_2^2 - \lambda^2\right) e^{i(\lambda x + \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}y)} d\lambda \\ \Psi(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) \lambda \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} e^{i(\lambda x + \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}y)} d\lambda \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $R(\lambda)$ — неизвестная функция; функция $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ аналитична в комплексной плоскости λ с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -k)$ и (k, ∞) подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при $-k < \lambda < k$, т. е. положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (1.4) показан на фиг. 1.



Фиг. 1

Решение в виде (1.4) удовлетворяет волновым уравнениям (1.1) и граничному условию $\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$. Остальные граничные условия и условия на ребре определяют функцию $R(\lambda)$.

Подставляя (1.4) в (1.2), имеем (при $y = 0$)

$$\frac{\sigma_y}{2\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad v = \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) B(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (1.5)$$

$$A(\lambda) = \lambda^2 \sqrt{(k_1^2 - \lambda^2)(k_2^2 - \lambda^2)} + (1/2 k_2^2 - \lambda^2)^2$$

$$B(\lambda) = -1/2 i k_2^2 \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$$

Применение обратного преобразования Фурье к соотношениям (1.5) дает

$$A(\lambda) R(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = \Omega^+(\lambda) + \Omega^-(\lambda)$$

$$B(\lambda) R(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = V^+(\lambda) + V^-(\lambda) \quad (1.6)$$

$$\Omega^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx, \quad \Omega^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$$V^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx, \quad V^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (v)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

причем искомые функции $\Omega^-(\lambda)$ и $V^+(\lambda)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного λ .

Согласно граничным условиям (1.3), имеем

$$\Omega^+(\lambda) = -\frac{P}{4\pi\mu} e^{i\lambda l}, \quad V^-(\lambda) = 0 \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и исключая $R(\lambda)$, приходим к следующему функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} F(\lambda) V^+(\lambda) = \Omega^-(\lambda) - \frac{P e^{i\lambda l}}{4\pi\mu}$$

$$F(\lambda) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left[\lambda^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} k_2^2 - \lambda^2 \right)^2}{\sqrt{(k_1^2 - \lambda^2)(k_2^2 - \lambda^2)}} \right] \quad (1.8)$$

Функции $F(\lambda)$ и $\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ представим в виде

$$F(\lambda) = F^+(\lambda) F^-(\lambda), \quad \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} = \sqrt{k_2 + \lambda} \sqrt{k_2 - \lambda} \quad (1.9)$$

где функции $F^+(\lambda)$ и $F^-(\lambda)$ аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im } \lambda > 0$ и $\text{Im } \lambda < 0$. Согласно выбору ветви функции $\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости λ -плоскости, $\sqrt{k_2 + \lambda}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0, -k_2 > \lambda > -\infty$), а $\sqrt{k_2 - \lambda}$ — в нижней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0, \infty > \lambda > k_2$).

Воспользуемся результатом факторизации функции $F(\lambda)$, приведенным в [3]

$$F^\pm(\lambda) = \frac{\lambda_R \pm \lambda}{k_2 \pm \lambda} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{\mp k_1}^{\mp k_2} \text{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2} k_2^2 - \xi^2 \right)^2}{\xi^2 \sqrt{(\xi^2 - k_1^2)(k_2^2 - \xi^2)}} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \right] \quad (1.10)$$

$(\lambda_R = \omega/c_R, \quad c_R < c_2)$

Здесь c_R — скорость распространения поверхностных волн Рэлея; выбираются одновременно либо верхние, либо нижние знаки.

С учетом факторизации уравнение Винера — Хопфа (1.8) можно записать в виде

$$i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \sqrt{k_2 + \lambda} F^+(\lambda) V^+(\lambda) = \frac{\Omega^-(\lambda)}{F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} - \frac{P \exp(i\lambda l)}{4\pi\mu F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} \quad (1.11)$$

Для того, чтобы применить стандартную процедуру Винера — Хопфа к уравнению (1.11), необходимо преобразовать второе слагаемое в правой части, так как это слагаемое представляет расходящуюся волну на бесконечности при $\text{Im } \lambda < 0$.

Функция $F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}$ имеет нуль при $\lambda = \lambda_R$ и точку ветвления при $\lambda = k_1$. Кроме того, в силу поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [4], функция будет регулярной при $\lambda = k_2$.

Уравнение (1.11) после тождественного преобразования второго слагаемого в правой части принимает вид

$$\begin{aligned} & i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \sqrt{k_2 + \lambda} F^+(\lambda) V^+(\lambda) + \\ & + \frac{PG(\lambda)}{4\pi\mu(\lambda_R - \lambda)} [e^{i\lambda l} \sqrt{k_2 - \lambda} - \alpha(\lambda) e^{ik_1 l} - \beta(\lambda) e^{i\lambda_R l}] = \\ & = \frac{\Omega^-(\lambda)}{F^-(\lambda) \sqrt{k_2 - \lambda}} - \frac{PG(\lambda)}{4\pi\mu(\lambda_R - \lambda)} [\alpha(\lambda) e^{ik_1 l} + \beta(\lambda) e^{i\lambda_R l}] \\ G(\lambda) = & \exp \left[- \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \text{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2} k_2^2 - \xi^2 \right)^2}{\xi^2 \sqrt{(\xi^2 - k_1^2)(k_2^2 - \xi^2)}} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \right] \\ \alpha(\lambda) = & \sqrt{\frac{k_2 - k_1}{(\lambda - k_1)(k_2 - \lambda_R)}} [\sqrt{k_2 - \lambda_R} (\sqrt{\lambda - k_1} - \sqrt{k_2 - k_1}) - \\ & - \sqrt{k_2 - \lambda} (\sqrt{\lambda_R - k_1} - \sqrt{k_2 - k_1})] \\ \beta(\lambda) = & \sqrt{\frac{(k_2 - \lambda)(\lambda_R - k_1)}{\lambda - k_1}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости λ -плоскости, а правая часть — функцию, аналитическую в нижней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями друг друга. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости λ , в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [5] и условие на ребре ($\Phi = O(r^{3/2}), \Psi = O(r^{3/2})$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$), нетрудно по-

казать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости λ . Таким образом, получаем $\Omega^-(\lambda)$, $V^+(\lambda)$.

При помощи преобразования Фурье восстанавливается напряжение σ_y на продолжении разреза и смещение его берегов v , отвечающее исходной граничной задаче

$$\sigma_y = -P\delta(x+l) + \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k_2 - \lambda}} [\alpha(\lambda) e^{ik_1 l} + \beta(\lambda) e^{i\lambda R l}] e^{i\lambda x} d\lambda \quad (1.13)$$

$$v = \frac{iP}{4\pi\mu(1 - k_1^2/k_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F(\lambda)(k_2 - \lambda)\sqrt{k_2 + \lambda}} [e^{i\lambda l} \sqrt{k_2 - \lambda} - \alpha(\lambda) e^{ik_1 l} - \beta(\lambda) e^{i\lambda R l}] e^{i\lambda x} d\lambda \quad (1.14)$$

Определим коэффициент интенсивности напряжений K , который представляет основной интерес для механики разрушения. Используя условие в конце трещины

$$\sigma_y = K / \sqrt{2\pi x} \quad \text{при } x \rightarrow +0$$

имеем

$$\Omega^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_y}{2\mu} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = \frac{K}{4\pi\mu \sqrt{2}} e^{-i\pi/4} (\lambda)^{-1/2} \quad (1.15)$$

При этом считается, что λ стремится к бесконечности, оставаясь в нижней полуплоскости.

С другой стороны, при $\lambda \rightarrow \infty$ находим

$$\Omega^-(\lambda) = -\frac{P \sqrt{k_1}}{4\pi\mu} (iM e^{ik_1 l} + N e^{i\lambda R l}) (\lambda)^{-1/2} \quad (1.16)$$

$$M = \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{c_2}} \left[1 - \frac{\sqrt{c_2(c_1 - c_R)} - \sqrt{c_R(c_1 - c_2)}}{\sqrt{c_1(c_2 - c_R)}} \right]$$

$$N = -\sqrt{\frac{c_1 - c_R}{c_R}}$$

С учетом опущенного ранее экспериментального множителя по формулам (1.15), (1.16) окончательно находим

$$K = \operatorname{Re} [\bar{K}(\omega) e^{-i\omega t}] = -P \sqrt{k_1} \operatorname{Re} [(1+i)(iM e^{ik_1 l} + N e^{i\lambda R l}) e^{-i\omega t}] \quad (1.17)$$

2. Нестационарная задача. Коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины для нестационарного случая вычисляется по формуле [2]

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \quad (2.1)$$

Здесь функция $\bar{K}(\omega)$ дается формулой (1.17).

Подставляя (1.17) в (2.1) и вычисляя интеграл, получим

$$K(t) = -\frac{PQ}{(t - l/c_1)^{3/2}} \quad \text{при } t > \frac{l}{c_1}$$

$$K(t) = 0 \quad \text{при } t < \frac{l}{c_1} \quad (2.2)$$

$$(Q = M / \sqrt{2\pi c_1})$$

Рассматривая полученный результат как функцию Грина, находим коэффициент интенсивности напряжений в случае произвольного распределения нагрузки на щели

$$K(t) = -Q \int_0^{\infty} \int_{x/c_1}^t \frac{p(x, t)}{(t - x/c_1)^{3/2}} dt dx \quad (2.3)$$

3. Примеры. 1°. Пусть функция $p(x, t)$ имеет вид

$$p(x, t) = -P\delta(x - l)H(t) \quad (3.1)$$

Здесь $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, P — некоторая постоянная.

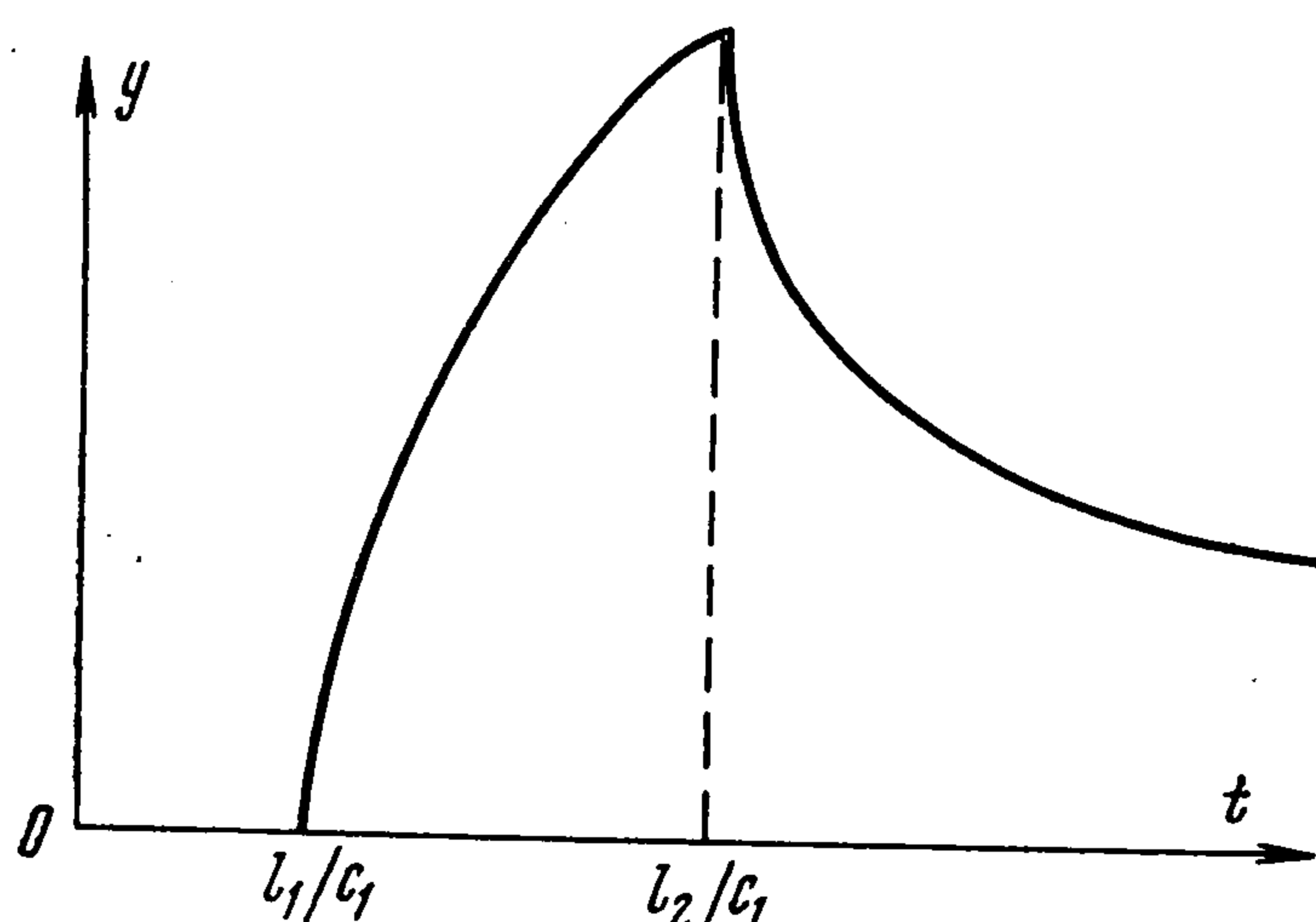
Решение этой автомодельной задачи, согласно [(2.3)], будет следующим:

$$K(t) = -\frac{2PQ}{(t - l/c_1)^{1/2}} \quad (3.2)$$

В частности, при $l \rightarrow 0$ имеем

$$K(t) = -\frac{2PQ}{\sqrt{t}} \quad (3.3)$$

Этот результат совпадает с решением, приведенным в работе [6], если в последнем положить $c \rightarrow 0$, $T =$



Фиг. 2

$= -P$, где c — скорость распространения трещины.

2°. Пусть нагрузка $p(x, t)$ дается в виде

$$p(x, t) = \begin{cases} -PH(t) & \text{при } l_1 < x < l_2 \\ 0 & \text{при } x < l_1, x > l_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Эта задача также автомодельна и имеет следующее решение:

$$K(t) = -4c_1QP \operatorname{Re} [\sqrt{t - l_1/c_1} - \sqrt{t - l_2/c_1}] \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что при $l_1/c_1 < t < l_2/c_1$ коэффициент интенсивности напряжений прямо пропорционален $(t - l_1/c_1)^{1/2}$, а при $t > l_2/c_1$ — прямо пропорционален $(\sqrt{t - l_1/c_1} - \sqrt{t - l_2/c_1})$.

График функции $y = \operatorname{Re} (\sqrt{t - l_1/c_1} - \sqrt{t - l_2/c_1})$ изображен на фиг. 2.

3°. Для функции $p(x, t)$, имеющей вид

$$p(x, t) = \begin{cases} -P\delta(t) & \text{при } l_1 < x < l_2 \\ 0 & \text{при } x < l_1, x > l_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

решение, согласно общей формуле (2.3), таково:

$$K(t) = -2c_1PQ \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{t - l_2/c_1} - \sqrt{t - l_1/c_1}}{\sqrt{(t - l_1/c_1)(t - l_2/c_1)}} \right] \quad (3.7)$$

Автор благодарит Г. П. Черепанова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 16 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости. В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела (к 60-летию академика В. В. Новожилова). Л., «Судостроение», 1970.
2. Черепанов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
3. Нае А. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. — ZAMM, 1954, Bd 34, H 1/2.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
5. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Черепанов Г. П., Кулиев В. Д. Решение одной динамической задачи теории упругости. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1972, № 4.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛЬНО
НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. М. Куршин, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Изучается влияние нелинейного характера осесимметричного деформирования полубесконечной круговой цилиндрической оболочки, обжимаемой по торцу равномерным поперечным усилием, на ее устойчивость по отношению к бесконечно малым несимметричным возмущениям, удовлетворяющим на торце условиям шарнирного опирания.

При нагружении круговой цилиндрической оболочки кольцевой нагрузкой, при ее нагреве со скачкообразным изменением температуры на опорах или между опорами и при других сосредоточенных по некоторому поперечному сечению воздействиях в оболочке возникает осесимметричное напряженное состояние, локализуемое на части ее длины. Такое состояние может оказаться неустойчивым, в том смысле, что по достижении нагрузкой (температурой и пр.) некоторого критического уровня оболочка перейдет в смежное состояние равновесия с образованием волн в окружном направлении. Известно, что смежное (выпученное) состояние, как и начальное (докритическое), носит ярко выраженный локальный (в осевом направлении) характер.

В первых теоретических исследованиях по проблеме устойчивости цилиндрических оболочек, находящихся в условиях локального осесимметричного напряженного состояния, была использована классическая постановка этой проблемы, которая не учитывает изменения формы оболочки, вызванного докритической деформацией [1-3]. Вопрос о необходимости более общей постановки задач рассматриваемого класса был поднят в работе [4], где уравнения устойчивости цилиндрической оболочки, нагреваемой между холодными диафрагмами, были записаны с учетом докритического искривления ее образующей. При этом изменение продольной кривизны оболочки к моменту потери устойчивости было определено по линейной формуле. Позднее в такой постановке были получены решения целого ряда задач [5-10], которые показали высокую чувствительность критического уровня внешних воздействий к изменению формы оболочки перед потерей устойчивости.

Так, в задаче об устойчивости при равномерном нагреве цилиндрической оболочки, соединенной на торце с жесткой холодной диафрагмой, значения параметра τ в формуле