Интегралами системы являются

$$\psi + \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\varphi = \alpha_1, \qquad t - \frac{\partial\beta}{\partial h}\varphi = t_0$$

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = \frac{\alpha}{\sin\lambda} - \beta\operatorname{ctg}\lambda, \qquad y_3 = \beta$$

Функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ находятся при помощи квадратур из написанных выше выражений для $\xi^{\cdot}$ и $\eta^{\cdot}$.

Полученному частному решению соответствует движение, при котором переменные ψ и φ изменяются с течением времени по линейному закону, а ξ и η изменяются периодически с течением времени. Так как $\theta = \text{const}$, то ось O_1z описывает вокруг вертикали, проходящей через центр диска, конус вращения. Следовательно, полученному частному решению соответствует равномерное круговое качение диска. Этот случай движения диска подробно разобран в [6].

Поступила 23 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
2. Quanjel J. Les équations génerales de la mécanique dans le cas des liaisons non-holonomes. Rend. der Circ. Mat. di Palermo, 1906, t. 22.
3. Ghori Q. K. Hamilton — Jacobi theorem for non-linear nonholonomic dynamical systems. ZAMM, 1970, Bd 50, H. 9.
4. Аржаных И. С. Поле импульсов. Ташкент, «Наука», 1965.
5. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
6. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч, 2. М., Изд-во иностр. лит. 1951.

УДК 531

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Е. Д. Жительзейф

(Ленинград)

Устанавливаются достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для систем вида

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -g(x) - f_0(x)y - \ldots - f_n(x)y^n$$

при $n = 2$ и $n = 2m + 1$. Условия теоремы существования и единственности решения предполагаются выполненными.

1. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -y[f_1(x)y + f_0(x)] - g(x) \tag{1.1}$$

Введем обозначения

$$F_1(x) = \exp\left(\int_0^x f_1(x)\,dx\right), \qquad F(x) = 2\int_0^x F_1(x) f_0(x)\,dx - \lambda \int_0^x \frac{dx}{F_1(x)}$$

$$r(x) = 2\int_0^x F_1^2(x)\,g(x)\,dx + \int_0^x F_1(x)\,F(x)\,f_0(x)\,dx$$

$$Q(x) = r(x) - \frac{1}{4}F^2(x), \qquad G(x) = \int_0^x g(x)\,dx$$

Теорема 1. Система (1.1) имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл, если выполнены следующие условия:

1°. Существуют числа $a < b < 0 < c < d$ и $\lambda > 0$ такие, что для функций $F(x)$ и $g(x)$ имеет место следующее чередование знаков:

$$\begin{array}{llll} g(x) < 0 & \text{при } x \in (a, 0), & g(x) > 0 & \text{при } x \in (0, d) \\ F(x) < 0 & \text{при } x \in (a, b), & F(x) > 0 & \text{при } x \in (b, 0) \\ F(x) < 0 & \text{при } x \in (0, c), & F(x) > 0 & \text{при } x \in (c, d) \end{array}$$

2°. $M = \min\{Q(a), Q(d)\} > Q(x) + [\sqrt{-\lambda^{-1}F_1^3(x)\,F(x)\,g(x)} + {}^1/_2\,|F(x)|]^2$ при $x \in [b, c]$

3°. $f_0(0) < 0$

Доказательство. Рассмотрим семейство кривых

$$\Phi(x, y) = F_1^2(x)\,y^2 + F_1(x)\,F(x)\,y + r(x) = C \tag{1.2}$$

Отсюда

$$y_{1,2} = \frac{1}{F_1(x)}\left[-\frac{1}{2}F(x) \pm \sqrt{C - Q(x)}\right] \tag{1.3}$$

Пусть $m = \sup\{Q(x)\}$ для $b \leqslant x \leqslant c$, $M = \min\{Q(a), Q(d)\}$. При помощи рассуждений, аналогичных проведенным в работе [1], можно показать, что для $C \in (m, M]$ уравнение (1.2) определяет семейство простых, замкнутых, вложенных одна в другую кривых, содержащих внутри начало координат и таких, что при переходе от внутренних кривых к внешним C увеличивается.

Дифференцируя (1.2) в силу системы (1.1) и замечая, что $F_1'(x) - F_1(x) f_1(x) = 0$, имеем

$$d\Phi / dt = -\lambda y^2 - F_1(x)\,F(x)\,g(x) \tag{1.4}$$

Покажем, что $d\Phi / dt < 0$ на кривой $\Phi(x, y) = M$.

В интервалах (a, b) и (c, d), согласно усовияю 1°, $F_1(x)\,F(x)\,g(x) > 0$. Следовательно, $d\Phi / dt < 0$ на тех частях этой кривой, которые лежат между прямыми $x = a$ и $x = b$ и между прямыми $x = c$ и $x = d$.

В интервале $[b, c]$ определим знак $d\Phi / dt$ отдельно на верхней $y = y_1(x)$ и нижней $y = y_2(x)$ дугах кривой, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ определены формулой (1.3), в которой берутся знаки плюс и минус соответственно.

Пусть $b < x < 0$. Тогда $F(x) > 0$ и из условия 2°

$$y_1(x) > \sqrt{-\lambda^{-1}F_1(x)\,F(x)\,g(x)}$$

Отсюда и из равенства (1.4) следует, что $d\Phi / dt < 0$ на дуге $y = y_1(x)$. Далее, поскольку $F(x) > 0$, то $-y_2(x) > y_1(x)$. Следовательно, $d\Phi / dt < 0$ на дуге $y = y_2(x)$.

Таким образом, $d\Phi / dt < 0$ при $x \in (b, 0)$ как на верхней, так и на нижней дуге кривой $\Phi(x, y) = M$. Аналогично можно убедиться в том, что $d\Phi / dt < 0$ на этой кривой в интервале $(0, c)$.

Рассмотрим другое семейство кривых

$$\varphi(x, y) = {}^1/_2\,y^2 + G(x) = C \tag{1.5}$$

Видно, что это тоже семейство вложенных одна в другую простых замкнутых кривых, содержащих внутри начало координат и таких, что при переходе от внутренних кривых к внешним C увеличивается.

Дифференцируя (1.5) в силу системы (1.1), имеем

$$d\varphi \,/\, dt = -y^2 [y f_1(x) + f_0(x)]$$

В точке $O\,(0, 0)$ получим $y f_1(x) + f_0(x) = f_0(0) < 0$ (по условию 3°). Следовательно, $d\varphi \,/\, dt \geqslant 0$ на кривых семейства (1.5), соответствующих достаточно малым C.

Взяв одну из кривых семейства (1.5), на которой $d\varphi \,/\, dt \geqslant 0$, и кривую $\Phi(x, y) = M$, на которой $d\Phi \,/\, dt < 0$, получим между этими кривыми кольцевую область, в которую направлены все траектории системы (1.1). В этой области нет особых точек, поэтому в ней содержится хотя бы один устойчивый предельный цикл.

Из доказательства ясно, что $d\Phi \,/\, dt < 0$ не только на кривой $\Phi(x, y) = M$, но и на всякой кривой $\Phi(x, y) = C$, где $C \in (m, M]$, если только неравенство в условии 2° будет выполняться при замене в нем M на C. В частности, $d\Phi \,/\, dt < 0$ на кривой $\Phi(x, y) = N$, где

$$N = \sup \{Q(x) + [\sqrt{-\lambda^{-1} F_1^3(x) F(x) g(x)} + {}^1/_2 |F(x)|]^2\}, \quad \text{если } N > 0$$

Таким образом, получаем некоторую оценку местоположения предельного цикла на фазовой плоскости: он лежит в области, ограниченной кривой $\Phi(x, y) = N$.

2. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -y f(x, y) - g(x) \tag{2.1}$$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{2m} f_k(x) y^k$$

Теорема 2. Система (2.1) имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл, если выполнены следующие условия:

1°. Существует такое число K, что $f_{2m}(x) > K > 0$ при всех x

2°. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{-(2m-k)} f_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m - 1$

3°. $f_0(0) < 0, \quad f_0(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$

4°. $x g(x) > 0$ при $x \neq 0, \quad \int\limits_0^x g(x)\, dx \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$

Доказательство. Примем за топографическое семейство для системы (2.1) семейство кривых

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int\limits_0^x g(x)\, dx = C$$

Дифференцируя это уравнение в силу системы (2.1), получим

$$d\Phi \,/\, dt = -y^2 f(x, y) \tag{2.2}$$

Покажем, что существует такое число $R > 0$, что на всякой окружности $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, для которой $r > R$, будет $f(x, y) > 0$.

В точках окружности имеем

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{2m} r^k \sin^k \theta f_k(r\cos\theta) = F(r, \theta) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r < +\infty \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Исследуем знак этой функции в верхней полуплоскости, т. е. при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

В силу условия $f_0(\pm\infty) = +\infty$ найдется такое число r_1, что при $r > r_1$ будут выполняться неравенства $F(r, 0) > 0$ и $F(r, \pi) > 0$. Вследствие непрерывности функции $F(r, \theta)$ существует такое число θ_1, что $F(r, \theta) > 0$ для $\theta \in [0, \theta_1]$ и $\theta \in [\pi - \theta_1, \pi]$ при $r > r_1$. Из равенства (2.3), согласно условию 1° теоремы 2 следует, что существует такое число r_2, что $F(r, \pi/2) > 0$ при $r > r_2$. Но в таком случае найдется число θ_0, что $F(r, \theta) > 0$ при $\theta \in (\pi/2 - \theta_0, \pi/2 + \theta_0)$ и $r > r_2$.

Остается убедиться, что $F(r, \theta) > 0$ при достаточно большом r, когда $\theta \in (\theta_1, \pi/2 - \theta_0)$ и $\theta \in (\pi/2 + \theta_0, \pi - \theta_1)$. Согласно условию 2° теоремы 2 для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число r_3, что для всех значений θ из этих двух интервалов и при $|r\cos\theta| > r_3$, а следовательно, и при $r > r_3$, будет выполняться неравенство

$$|f_k(r\cos\theta)| < r^{2m-k}|\cos\theta|^{2m-k}\varepsilon < r^{2m-k}\varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2m-1).$$

Для указанных r и θ имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{2m-1} r^k \sin^k\theta\, f_k(r\cos\theta)\right| \leqslant r^{2m}\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = (2m-1)\varepsilon \tag{2.4}$$

Очевидно, в каждом из этих двух интервалов $\sin\theta > \sin\theta_1$. Поэтому, учитывая условие 1°, имеем

$$\sin^{2m}\theta f_{2m}(r\cos\theta) - \varepsilon_1 > \sin^{2m}\theta_1 \cdot K - \varepsilon_1$$

Если положить $\varepsilon_1 < K\sin^{2m}\theta_1$, то

$$\sin^{2m}\theta\, f_{2m}(r\cos\theta) - \varepsilon_1 > 0 \tag{2.5}$$

при $r > r_3$, $\theta \in (\theta_1, \pi/2 - \theta_0)$, $\theta \in (\pi/2 + \theta_0, \pi - \theta_1)$. По условию 3° существует число $M > 0$ такое, что

$$f_0(r\cos\theta) + M \geqslant 0$$

при любых значениях произведения $r\cos\theta$, т. е. при любых r и θ. Учитывая это неравенство и неравенство (2.5) можно утверждать, что найдется такое число r_4, что при $r > r_4$ будет

$$r^{2m}\,[\sin^{2m}\theta\, f_{2m}(r\cos\theta) - \varepsilon_1] + [f_0(r\cos\theta) + M] - M > 0 \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) следует

$$r^{2m}\sin^{2m}\theta\, f_{2m}(r\cos\theta) + f_0(r\cos\theta) > r^{2m}\varepsilon_1 \geqslant \left|\sum_{k=1}^{2m-1} r^k\sin^k\theta\, f_k(r\cos\theta)\right| \tag{2.7}$$

при $r > \max\{r_3, r_4\}$, $\theta \in (\theta_1, \pi/2 - \theta_0)$, $\theta \in (\pi/2 + \theta_0, \pi - \theta_1)$.

Согласно равенству (2.3), определяющему функцию $F(r, \theta)$, неравенство (2.7) равносильно тому, что $F(r, \theta) > 0$ при указанных выше r и θ.

Если положить $R_1 = \max\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, то $f(r, \theta) > 0$ при $\theta \in [0, \pi]$ и $r > R_1$.

Аналогично доказывается, что существует такое число R_2, что $F(r, \theta) > 0$ при $r > R_2$ и $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Таким образом, если $R = \max\{R_1, R_2\}$, то $F(r, \theta) > 0$ при $r > R$ и $\theta \in [0, 2\pi]$. Это значит, что $f(x, y) > 0$ на любой окружности с центром в начале координат и радиусом $r > R$, т. е. $f(x, y) > 0$ во всех точках плоскости, лежащих вне круга радиуса R. В частности, $f(x, y) > 0$ на любой кривой семейства $\Phi(x, y) = C$, лежащей вне этого круга. Но тогда, согласно (2.2), $d\Phi / dt \leqslant 0$ на этих кривых.

С другой стороны, $f(0, 0) = f_0(0) < 0$ по условию 3°. Следовательно, $f(x, y) < 0$ в достаточно малой окрестности начала координат и, значит, согласно (2.2), $d\Phi / dt \geqslant 0$ на кривых $\Phi(x, y) = C$ при достаточно малых значениях C.

Взяв одну из таких кривых и какую-нибудь кривую того же семейства, лежащую вне круга радиуса R, получим между этими двумя кривыми кольцевую область, в которую направлены все траектории системы (2.1). В этой области нет особых точек, поэтому в ней лежит хотя бы один устойчивый предельный цикл.

Поступила 29 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Жительзейф Е. Д. Об одной теореме существования периодического решения уравнения Льенара. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.