УДК 531.01

О МЕТОДЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Э. Х. Назиев

(Киев)

Успехи, достигнутые в теории интегрирования уравнений движения голономных систем, естественно приводят к стремлению распространить основные положения этой теории на неголономные системы или, по меньшей мере, установить условия их применимости к неголономным системам. Вопросам подобного рода посвящено много работ разных авторов, в частности, известны неоднократные попытки распространения на неголономные системы метода интегрирования Гамильтона—Якоби (см. библиографию в конце [1]). Ниже обсуждаются вопросы, относящиеся к этой последней проблеме.

1. Первая попытка обобщения метода Гамильтона — Якоби на неголономные системы содержится в [2]. Предполагая наложенные на систему дифференциальные связи линейными, автор приводит уравнения движения к виду [1]

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + R_i \tag{1.1}$$

где R_i либо равны нулю, либо представляют собой квадратичные функции обобщенных импульсов, и формулирует теорему следующего содержания: для того, чтобы теорема Якоби осталась приложимой к неголономной системе, необходимо и достаточно, чтобы можно было дополнить обычное уравнение Якоби такой функцией φ, которая допускала бы $-R_i$ как частные производные по координатам x^i. При этом автор считает, что функция φ зависит от координат и импульсов системы. Примера, иллюстрирующего теорему, автор не привел.

В заметке [3] сформулирована точно такая же теорема для неголономных систем с нелинейными связями $f_\sigma(t, x^i, \dot{x}^i) = 0$, уравнения движения которых записаны при помощи неопределенных множителей в виде (1.1), где

$$R_i = \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^i}$$

в предположении, что связи принадлежат к типу Аппеля—Четаева.

Между тем легко показать, что указанная выше теорема не имеет места ни в том, ни в другом случаях.

Действительно, пусть существует функция φ такая, что

$$R_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{1.2}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial a^i} = b_i = \mathrm{const}\ (a^i = \mathrm{const}), \qquad \frac{\partial V}{\partial x^i} = p_i \tag{1.3}$$

дают полную систему решений уравнений (1.1), если $V(t, x^i, a^i)$ является полным интегралом уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + \varphi = 0 \tag{1.4}$$

Покажем, что эти предположения приводят к противоречию.

Дифференцируя обе части первой группы равенств (1.3) по времени и принимая во внимание первую группу уравнений (1.1), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a^i \partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \equiv 0 \tag{1.5}$$

---

[1] Используемые индексы принимают следующие значения: $i, j = 1, \ldots, n$; $k, s = 0, 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$; $\nu, \gamma = 0, 1, \ldots, m$; $\sigma = m + 1, \ldots, n$. По дважды встречающимся индексам производится суммирование.

Дифференцируя по a^i левую часть уравнения (1.4) в предположении, что туда подставлен полный интеграл V и принимая во внимание вторую группу равенств (1.3), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial a^i} + \frac{\partial (H + \varphi)}{\partial p_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial a^i} \equiv 0 \tag{1.6}$$

Вычитая (1.6) из (1.5), получим систему n линейных однородных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial a^i} \equiv 0 \tag{1.7}$$

относительно n функций $d\varphi/dp_j$. Но так как V — полный интеграл уравнения (1.4), то

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial a^i} \right| \neq 0$$

и из системы (1.7) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \equiv 0 \tag{1.8}$$

т. е. функция φ не содержит импульсов p_j. Дифференцируя (1.2) и (1.8) соответственно по по p_j и x^i, получим

$$\frac{\partial R_i}{\partial p_j} \equiv 0$$

т. е. R_i также не содержат импульсов p_j.

Однако, как в случае линейных, так и в случае нелинейных связей величины R_i существенно зависят от импульсов. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

2. В [4] совершенно справедливо и вполне обоснованно утверждается, что метод Гамильтона — Якоби в общем случае к неголономным системам не применим, хотя и существуют неголономные системы, уравнения движения которых либо непосредственно интегрируются методом Гамильтона — Якоби, либо этот метод оказывается применимым после некоторых преобразований уравнений движения. Там же указаны необходимые и достаточные условия частичной (ниже будет пояснено) применимости метода к неголономным системам с линейными дифференциальными связями, уравнения движения которых записаны в виде уравнений Ферреса с множителями связей. Укажем сейчас аналогичные условия для более общего случая уравнений движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева.

Пусть положение механической системы определяется переменными $x^1, \ldots, x^n$. Определим бесконечно малые перемещения системы совокупностью независимых операторов

$$X_\nu = \xi_\nu{}^s (x^k) \frac{\partial}{\partial x^s}, \qquad x^0 = t, \qquad \xi_0{}^0 = 1, \qquad \xi_\alpha{}^0 = 0 \tag{2.1}$$

так, чтобы изменение произвольной функции $F(x^k)$ на некотором действительном (возможном) перемещении системы определялось равенством

$$dF = \eta^\nu X_\nu F dx^b \quad (\delta F = \omega^\alpha X_\alpha F), \qquad \eta^0 = x^{\cdot 0} = 1 \tag{2.2}$$

Независимые параметры η^α (ω^α) характеризуют действительные (возможные) перемещения системы, а их число равно числу ее степеней свободы. Будем предполагать, что совокупность операторов (2.1) незамкнута. Это означает, что соответствующая система пфаффовых форм неинтегрируема. Эти формы, будучи приравненными нулю, представляют собой дифференциальные неинтегрируемые связи системы, так что при сделанном предположении рассматриваемая система неголономна.

Используя формулы (2.1) и (2.2), для функций $F^k = x^k$ получаем

$$x^{\cdot k} = \xi_\nu{}^k \eta^\nu \tag{2.3}$$

Так как операторы (2.1) независимы, то из матрицы $\| \xi_\nu^k \|$ можно вырезать квадратную $(m+1) \times (m+1)$ матрицу, определитель которой отличен от нуля. Пусть это будет матрица $\| \xi_\nu^\gamma \|$. Тогда из первых $m+1$ уравнений (2.3) найдем

$$\eta^\nu = b_\gamma^{\ \nu} x^{\cdot\gamma} \tag{2.4}$$

Подставляя эти выражения в остальные $n-m$ уравнений (2.3), получим уравнения дифференциальных неинтегрируемых связей системы

$$x^{\cdot\sigma} = B_\gamma^{\ \sigma} x^{\cdot\gamma} \tag{2.5}$$

Пусть $L(x^k, x^{\cdot i})$ — функция Лагранжа свободной от связей системы и $L'(x^k, \eta^\alpha)$ — функция Лагранжа, выраженная при помощи (2.3) через независимые параметры. Вводя в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H' = y_\alpha \eta^\alpha - L', \qquad y_\alpha = \frac{\partial L'}{\partial \eta^\alpha}$$

можно записать уравнения движения системы в виде [1]

$$y_\alpha^{\cdot} = -X_\alpha H' + \eta^\nu \left[\Omega_{\nu\alpha}^\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot\sigma}} \right)^* - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta y_\beta \right], \qquad \eta^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial y_\alpha} \tag{2.6}$$

$$\Omega_{\nu\alpha}^\sigma = \xi_\alpha^{\ \gamma} X_\nu B_\gamma^{\ \sigma} - \xi_\nu^{\ \gamma} X_\alpha B_\gamma^{\ \sigma} \tag{2.7}$$

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = b_\gamma^{\ \beta} (X_\alpha \xi_\nu^{\ \gamma} - X_\nu \xi_\alpha^{\ \gamma})$$

которые легко преобразуются к виду

$$y_\alpha^{\cdot} = -X_\alpha H' + \eta^\nu (X_\nu \xi_\alpha^{\ i} - X_\alpha \xi_\nu^{\ i}) \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot i}} \right)^*, \qquad \eta^\alpha = \frac{\partial H'}{\partial y_\alpha} \tag{2.8}$$

Обозначение $(\ \ )^*$ показывает, что соответствующие функции выражены через переменные x^i, y_α.

Уравнения (2.6) и (2.8) только способом записи отличаются от известных уравнений движения в неголономных координатах [1]. Метод неголономных координат и метод переменных Пуанкаре — Четаева по существу тождественны, различие состоит лишь в терминологии. Здесь используется более удачная терминология Пуанкаре — Четаева, понятия которой имеют конкретный механический смысл.

Составим уравнение

$$X_0 V + H'(x^k, X_\alpha V) = 0 \tag{2.9}$$

(уравнение Н. Г. Четаева [5]) и докажем следующую теорему.

Теорема. Если существует интеграл $V(x^k, a^\lambda)$ уравнения (2.9), содержащий некоторое число входящих в него не аддитивно произвольных постоянных a^λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ и удовлетворяющий условиям

$$(X_\nu \xi_\alpha^{\ i} - X_\alpha \xi_\nu^{\ i}) \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot i}} \right)^* - \frac{\partial V}{\partial x^i} \right] = 0 \tag{2.10}$$

то равенства

$$y_\alpha = X_\alpha V, \qquad \frac{\partial V}{\partial a^\lambda} = b_\lambda = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

представляют собой интегралы канонических уравнений движения. В уравнениях (2.10) входящие в функции $(\partial L / \partial x^{\cdot i})^*$ величины y_α предполагаются замененными на $X_\alpha V$, согласно первой группе равенств (2.11).

Доказательство. Пусть найден интеграл V уравнения (2.9), удовлетворяющий условиям теоремы. Покажем, что производные по времени от первой группы равенств

[1] См. Назиев Э. Х. Некоторые вопросы аналитической динамики. Диссертация. Изд-во МГУ, 1969.

(2.11) сводятся к тождествам в силу уравнений (2.8) (или (2.6)), самих этих равенств и уравнений (2.10).

Дифференцируя по времени обе части указанных равенств и принимая во внимание первую группу уравнений (2.8) и соотношение

$$(X_\nu, X_\alpha)\, V = (X_\nu \xi_\alpha{}^i - X_\alpha \xi_\nu{}^i)\, \frac{\partial V}{\partial x^i}$$

получим

$$X_\alpha H' + \eta^\nu \left\{ X_\alpha X_\nu V + (X_\nu \xi_\alpha{}^i - X_\alpha \xi_\nu{}^i) \left[\frac{\partial V}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)^* \right] \right\} = 0$$

Так как V — интеграл уравнения (2.9), удовлетворяющий условиям теоремы, то вторые слагаемые в квадратных скобках каждого из полученных равенств тождественно обращаются в нуль. Поэтому, воспользовавшись второй группой уравнений (2.8) и первой группой равенств (2.11), получаем

$$X_\alpha X_0 V + X_\alpha H' + \frac{\partial H'}{\partial (X_\beta V)}\, X_\alpha X_\beta V = 0$$

Но последние равенства представляют собой тождества, так как получаются в результате применения операции X_α к левой части уравнения (2.9), куда подставлен известный интеграл V, и требуемое доказано.

Покажем, что при выполнении условий теоремы производные по времени от левых частей второй группы равенств (2.11) тождественно обращаются в нуль в силу уравнений (2.8) и первой группы равенств (2.11).

В силу уравнений (2.8) имеем

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial V}{\partial a^\lambda} = X_0 \frac{\partial V}{\partial a^\lambda} + \frac{\partial H'}{\partial y_\beta} X_\beta \frac{\partial V}{\partial a^\lambda}$$

Так как V — интеграл уравнения (2.9), удовлетворяющий условиям теоремы, то, согласно первой части доказательства, имеет место первая группа равенств (2.11). Поэтому, если учесть, что последовательность выполнения операций X_ν и $\partial/\partial a^\lambda$ не имеет значения, предыдущие равенства можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial V}{\partial a^\lambda} = \frac{\partial}{\partial a^\lambda} X_0 V + \frac{\partial H'}{\partial (X_\beta V)} \frac{\partial}{\partial a^\lambda} X_\beta V$$

Но правые части последних равенств суть тождественные нули, так как представляют собой частные производные по a^λ от левой части уравнения (2.9), куда вместо V подставлен известный интеграл. Следовательно

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial V}{\partial a^\lambda} \equiv 0$$

что и требовалось доказать.

Можно показать, что уравнения (2.10) удовлетворяются тождественно, если система голономна (совокупность операторов (2.1) замкнута). Тогда знание полного интеграла уравнения (2.9) позволяет получить общее решение задачи. Если же система неголономна, то задача сводится к исследованию совместности системы уравнений в частных производных первого порядка (2.9), (2.10). Совместность последней имеет место далеко не всегда. В тех же случаях, когда она оказывается совместной, общее решение задачи, вообще говоря, получить невозможно. Поэтому имеет смысл говорить лишь о частичной применимости метода интегрирования Гамильтона — Якоби к неголономным системам.

3. Существуют неголономные системы, уравнения движения которых можно интегрировать непосредственно методом Гамильтона — Якоби. Это — системы типа Чап-

лыгина, для которых в уравнениях движения (2.6)

$$\Omega^{\sigma}_{\nu\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot\sigma}}\right)^{*}\equiv 0$$

что при $\Omega^{\sigma}_{\nu\alpha}\neq 0$ может иметь место при определенной структуре функции Лагранжа L. Покажем, что в подобных случаях система уравнений (2.9), (2.10) всегда совместна.

Действительно, уравнения (2.10) можно привести в таких случаях к виду

$$(\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\xi_{\beta}{}^{\sigma}+X_{\nu}\xi_{\alpha}{}^{\sigma}-X_{\alpha}\xi_{\nu}{}^{\sigma})\frac{\partial V}{\partial x^{\sigma}}=0$$

Эти уравнения удовлетворяются любой функцией V, не зависящей от переменных x^{σ}. Так как последние не входят в коэффициенты уравнения (2.9), в операторах (2.1) можно отбросить члены, содержащие частные производные по этим переменным, и записать уравнение (2.9) в виде

$$\xi_0{}^{\nu}\frac{\partial V}{\partial x^{\nu}}+H'\left(x^{\gamma},\xi_{\alpha}{}^{\nu}\frac{\partial V}{\partial x^{\nu}}\right)=0$$

После определения полного интеграла этого уравнения решение задачи сводится к алгебраическим операциям и нахождению функций $x^{\sigma}(t)$ при помощи квадратур из уравнений (2.5). Ясно, что решение задачи получается общим.

Замечание. Не следует думать, что аналогичная ситуация имеет место для систем типа Чаплыгина в случае, когда

$$(X_{\nu}\xi_{\alpha}{}^{i}-X_{\alpha}\xi_{\nu}{}^{i})\left(\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot i}}\right)^{*}=0$$

в уравнениях (2.8). В этом случае уравнения (2.10) записываются в виде

$$(X_{\nu}\xi_{\alpha}{}^{i}-X_{\alpha}\xi_{\nu}{}^{i})\frac{\partial V}{\partial x^{i}}=0$$

Совместность последних с уравнением (2.9) ниоткуда не следует.

4. *Пример.* Рассмотрим движение по горизонтальной плоскости однородного диска радиуса a с острой кромкой. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат, оси $O\xi$ и $O\eta$ которой лежат в плоскости, а ось $O\zeta$ направлена вертикально вверх. В качестве подвижной системы координат выберем систему осей O_1xyz, начало которой помещено в центр диска, ось O_1x лежит в плоскости диска и параллельна линии пересечения этой плоскости с плоскостью $O\xi\eta$, ось O_1y направлена по восходящему диаметру, проходящему через точку касания диска с плоскостью, ось O_1z перпендикулярна плоскости диска. В качестве переменных определяющих положение диска, выберем координаты ξ, η, ζ центра диска в системе $O\xi\eta\zeta$, угол θ между осью O_1z и вертикалью, проходящей через центр диска, угол ψ между осью $O\xi$ и линией пересечения плоскости диска с плоскостью $O\xi\eta$, угол φ, образуемый некоторым фиксированным радиусом диска с осью O_1x.

Функция Лагранжа и уравнения дифференциальных связей имеют вид

$$L_0={}^1/_2m(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2}+\zeta^{\cdot 2})+{}^1/_2A(\theta^{\cdot 2}+\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta)+{}^1/_2C(\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\cos\theta)^2-mga\sin\theta$$

$$\xi^{\cdot}=a(\theta^{\cdot}\sin\psi\sin\theta-\psi^{\cdot}\cos\psi\cos\theta-\varphi^{\cdot}\cos\psi)$$

$$\eta^{\cdot}=-a(\theta^{\cdot}\cos\psi\sin\theta+\psi^{\cdot}\sin\psi\cos\theta+\varphi^{\cdot}\sin\psi)$$

$$\zeta^{\cdot}=a\theta^{\cdot}\cos\theta$$

Уравнение последней связи интегрируется. Исключая $\zeta^{\cdot}$ из функции L_0, получим

$$L={}^1/_2m(\xi^{\cdot 2}+\eta^{\cdot 2})+{}^1/_2(A+ma^2\cos^2\theta)\theta^{\cdot 2}+{}^1/_2A\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta+{}^1/_2C(\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\cos\theta)^2-$$
$$-mga\sin\theta$$

Выберем в качестве параметров, определяющих действительные перемещения диска, величины

$$\eta^1 = \theta^{\cdot}, \quad \eta^2 = \psi^{\cdot} \sin \theta, \quad \eta^3 = \varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot} \cos \theta$$

Тогда

$$x^{\cdot 1} = \theta^{\cdot} = \eta^1, \quad x^{\cdot 2} = \psi^{\cdot} = \frac{\eta^2}{\sin \theta}, \quad x^{\cdot 3} = \varphi^{\cdot} = \eta^3 - \eta^2 \operatorname{ctg} \theta$$

$$x^{\cdot 4} = \xi^{\cdot} = a(\eta^1 \sin \psi \sin \theta - \eta^3 \cos \psi)$$

$$x^{\cdot 5} = \eta^{\cdot} = -a(\eta^1 \cos \psi \sin \theta + \eta^3 \sin \psi)$$

Операторы бесконечно малых перемещений диска имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} + a \sin \psi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \cos \psi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$X_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi} - a \cos \psi \frac{\partial}{\partial \xi} - a \sin \psi \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Выражая функцию Лагранжа L через независимые переменные, получим

$$L' = {}^1/_2 (A + ma^2)(\eta^1)^2 + {}^1/_2 A (\eta^2)^2 + {}^1/_2 (C + ma^2)(\eta^3)^2 - mga \sin \theta$$

$$y_1 = \frac{\partial L'}{\partial \eta^1} = (A + ma^2)\eta^1, \quad y_2 = \frac{\partial L'}{\partial \eta^2} = A\eta^2, \quad y_3 = \frac{\partial L'}{\partial \eta^3} = (C + ma^2)\eta^3$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H' = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{A + ma^2} + \frac{y_2^2}{A} + \frac{y_3^2}{C + ma^2}\right) + mga \sin \theta$$

Так как рассматриваемая система склерономна, то уравнению (2.9) можно удовлетворить функцией $V = -ht + W$. Уравнение в частных производных относительно функции W записывается в виде

$$\frac{1}{A + ma^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + a \sin\psi \sin\theta \frac{\partial W}{\partial \xi} - a \cos \psi \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\sin \theta}\frac{\partial W}{\partial \psi} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{C + ma^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} - a \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \xi} - a \sin \psi \frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + 2mga \sin \theta = 2h \qquad (4.1)$$

Система уравнений (2.10) состоит из одного уравнения

$$\sin \psi \frac{\partial W}{\partial \xi} - \cos \psi \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{ma \sin \theta}{A + ma^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \qquad (4.2)$$

Два других уравнения сводятся к тождествам.

В общем случае система двух последних уравнений несовместна.

Рассмотрим частный случай, когда $\partial W / \partial \theta = 0$, что соответствует движению, при котором $\theta^{\cdot} = 0$, $\theta = \lambda = \text{const}$. Тогда системе (4.1), (4.2) можно удвлетворить функцией W, не зависящей от ξ и η, и задача сводится к отысканию полного интеграла уравнения

$$\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\sin \lambda}\frac{\partial W}{\partial \psi} - \operatorname{ctg} \lambda \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{C + ma^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2(h - mga \sin \lambda)$$

Этот интеграл имеет вид $W = \alpha\psi + \beta\varphi$, где α и β — постоянные, связанные между собой и с постоянной h уравнением

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{\sin \lambda} - \beta \operatorname{ctg} \lambda\right)^2 + \frac{\beta^2}{C + ma^2} = 2(h - mga \sin \lambda)$$

Интегралами системы являются

$$\psi + \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\varphi = \alpha_1, \qquad t - \frac{\partial\beta}{\partial h}\varphi = t_0$$

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = \frac{\alpha}{\sin\lambda} - \beta \operatorname{ctg}\lambda, \qquad y_3 = \beta$$

Функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ находятся при помощи квадратур из написанных выше выражений для $\xi^{\cdot}$ и $\eta^{\cdot}$.

Полученному частному решению соответствует движение, при котором переменные ψ и φ изменяются с течением времени по линейному закону, а ξ и η изменяются периодически с течением времени. Так как $\theta = \text{const}$, то ось O_1z описывает вокруг вертикали, проходящей через центр диска, конус вращения. Следовательно, полученному частному решению соответствует равномерное круговое качение диска. Этот случай движения диска подробно разобран в [6].

Поступила 23 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
2. Quanjel J. Les équations génerales de la mécanique dans le cas des liaisons nonholonomes. Rend. der Circ. Mat. di Palermo, 1906, t. 22.
3. Ghori Q. K. Hamilton — Jacobi theorem for non-linear nonholonomic dynamical systems. ZAMM, 1970, Bd 50, H. 9.
4. Аржаных И. С. Поле импульсов. Ташкент, «Наука», 1965.
5. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2.
6. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 2, ч, 2. М., Изд-во иностр. лит. 1951.

УДК 531

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Е. Д. Жительзейф

(Ленинград)

Устанавливаются достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для систем вида

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -g(x) - f_0(x)\,y - \ldots - f_n(x)\,y^n$$

при $n = 2$ и $n = 2m + 1$. Условия теоремы существования и единственности решения предполагаются выполненными.

1. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = -y\,[f_1(x)\,y + f_0(x)] - g(x) \tag{1.1}$$