

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ
СВЯЗАННОЙ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

Я. А. Каменярж

(Москва)

В рамках моделей упруго-пластических сред, не учитывающих тепловые эффекты, по заданному напряженному состоянию и скоростям деформаций однозначно определяются скорости изменения напряжений [1]. В работе рассматривается ограничение, которое следует наложить на модели связанной термопластичности, чтобы указанное свойство имелось и в этом случае. Для простейшей модели связанной термопластичности показано, что в случае пренебрежения теплопроводностью существует область напряженных состояний, при которых система уравнений пластического течения неэволюционна, а также область напряженных состояний, при которых происходит образование скачков из гладких начальных условий (опрокидывание простых волн). Эти свойства можно интерпретировать также как свойства несвязанной модели пластичности с неградиентальным законом пластического течения. Для полной системы уравнений пластического течения с учетом теплопроводности приводится пример неустойчивого решения.

1. Простейшая модель связанной термопластичности получается при следующих предположениях о свободной энергии F , некомпенсированном тепле dq' , поверхности текучести f и ассоциированном с ней законе:

$$\begin{aligned} \rho_0 F &= A^{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e + \alpha^{ij} \varepsilon_{ij}^e (T - T_0) - \frac{m}{2} (T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0) \\ dq' &= \frac{1}{\rho_0} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad f = f(\sigma_{ij}, T) = 0, \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}}, \quad d\lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь A^{ijkl} , α^{ij} , m , T_0 , ρ_0 , s_0 — постоянные, все обозначения общеприняты. Перемещения и деформации считаются малыми. Для такой модели [2]

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e + \alpha^{ij} (T - T_0), \quad s = -\frac{1}{\rho_0} \alpha^{ij} \varepsilon_{ij}^e + \frac{m}{\rho_0} (T - T_0) + s_0 \quad (1.2)$$

Получим одно необходимое условие существования решения задачи Коши для системы уравнений такой модели. Для этого рассмотрим задачу об определении $\partial \sigma_{ij} / \partial t$, $\partial T / \partial t$ в момент $t = t_0$ по заданным σ_{ij} , T и скоростям v_i . Предполагается, что начальные значения σ_{ij} , T удовлетворяют условию $f(\sigma_{ij}, T) = 0$, так как в противном случае из уравнений теории упругости $\partial \sigma_{ij} / \partial t$ и $\partial T / \partial t$ однозначно определяются.

Если в момент t_0 происходит пластическое деформирование, то из (1.1), (1.2), соотношения

$$e_{ij}^o \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t}$$

и уравнения второго закона термодинамики для определения $(\partial\sigma_{ij} / \partial t)_p$, $(\partial T / \partial t)_p$, $(\partial\lambda / \partial t)_p$ получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} \right)_p + \frac{\partial f}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p &= 0 \\ \left(\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial t} \right)_p &= A^{ijkl} e_{kl}^{\circ} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right)_p A^{ijkl} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{kl}} + \alpha^{ij} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p \\ -\alpha^{ij} \left[e_{ij}^{\circ} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right)_p \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} \right] + m \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_p &= \frac{1}{T_0} \frac{\partial q^e}{\partial t} + \frac{1}{T_0} \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right)_p \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если в момент $t = t_0$ происходит упругое деформирование, то аналогично найдем для $(\partial\sigma_{ij} / \partial t)_e$, $(\partial T / \partial t)_e$

$$\left(\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial t} \right)_e = A^{ijkl} e_{kl}^{\circ} + \alpha^{ij} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_e, \quad -\alpha^{ij} e_{ij}^{\circ} + m \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_e = \frac{1}{T_0} \frac{\partial q^e}{\partial t} \quad (1.4)$$

Отвлекаясь от случаев вырождения, можно считать, что каждая из систем (1.3), (1.4) имеет ровно одно решение. Кроме того, чтобы быть допустимым в упруго-пластической задаче, решение (1.3) должно удовлетворять неравенству $(\partial\lambda / \partial t)_p \geq 0$, а решение (1.4) — неравенству

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e \equiv \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} \right)_e + \frac{\partial f}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_e \leq 0$$

Здесь принято, что область в пространстве σ_{ij} , T , внутренняя по отношению к поверхности текучести, соответствует неравенству $f < 0$, внешняя — неравенству $f > 0$.

Из (1.3), (1.4) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right)_p M, \quad M \equiv A^{ijkl} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{kl}} + \frac{1}{mT_0} \left(\alpha^{ij} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} + \frac{\partial f}{\partial T} \right) \times \\ &\quad \times \left(T_0 \alpha^{ij} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} - \sigma^{ij} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} \right) \end{aligned}$$

Для того, чтобы $\partial\sigma_{ij} / \partial t$, $\partial T / \partial t$ однозначно определялись при любых начальных данных σ_{ij} , T , v_i , $f(\sigma_{ij}, T) = 0$, необходимо $M \geq 0$. В противном случае для состояния, в котором $M(\sigma_{ij}, T) < 0$, можно указать такие начальные значения v_i , что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e &= A^{ijkl} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} e_{kl}^{\circ} + \frac{1}{mT_0} \left(\alpha^{ij} \frac{\partial f}{\partial\sigma^{ij}} + \frac{\partial f}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial q^e}{\partial t} + T_0 \alpha^{ij} e_{ij}^{\circ} \right) > 0 \\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right)_p &< 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, для такого начального состояния нельзя построить ни пластического ни упругого решения. В этом случае можно также задать начальные данные так, что $(\partial f / \partial t)_e < 0$, $(\partial\lambda / \partial t)_p > 0$ и, следовательно, $\partial\sigma_{ij} / \partial t$, $\partial T / \partial t$ в момент t_0 определяются неоднозначно.

Если $M > 0$, то $(\partial f / \partial t)_e$ и $(\partial\lambda / \partial t)_p$ имеют одинаковые знаки и обращаются в нуль лишь одновременно (в последнем случае решения (1.3) и (1.4) совпадают). В этом случае $\partial\sigma_{ij} / \partial t$ и $\partial T / \partial t$ определяются однозначно.

Таким образом, при построении моделей упруго-пластических сред следует обеспечивать выполнение неравенства $M \geq 0$.

Отметим некоторые частные случаи. Пусть форма $A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ положительно определена, $m > 0$, $\alpha^{ij} = -\alpha g^{ij}$.

Если уравнение поверхности текучести принять в форме Мизеса $1/2 \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k^2(T)$, $\sigma_{ij}' \equiv \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$, то

$$M = A^{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{k^2}{mT_0} \frac{dk^2}{dT}$$

Условие $M > 0$ накладывает ограничение на предположения о скорости уменьшения предела текучести с ростом температуры.

Если поверхность текучести не зависит от температуры, то

$$M = A^{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\alpha^2}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \right)^2 + \frac{\alpha}{mT_0} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}$$

Поскольку $\sigma_{ij} \partial f / \partial \sigma_{ij} \geq 0$ для сред с выпуклой поверхностью текучести, содержащей внутри себя точку $\sigma_{ij} = 0$, для выполнения условия $M \geq 0$ достаточно, чтобы $\alpha \partial f / \partial p \leq 0$, $p \equiv -1/3 \sigma_{kk}$. Это выполнено, в частности, для распространенного условия $1/2 \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = F(p)$, $dF/dp \geq 0$ при $\alpha > 0$.

В случае несвязанной теории пластичности ($\alpha_{ij} = 0$, $\partial f / \partial T = 0$) $M = A^{ijkl} (\partial f / \partial \sigma_{ij}) (\partial f / \partial \sigma_{kl})$, приходим к известному результату, полученному в [1] также и для поверхностей текучести с особенностями и для упрочняющихся сред.

2. Если среда изотропна, выражение для свободной энергии принимает вид

$$\rho_0 F = 1/2 \lambda (\varepsilon_{kk}^e)^2 + \mu \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e - \alpha (3\lambda + 2\mu) (T - T_0) \varepsilon_{kk}^e - 1/2 m (T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0)$$

Рассмотрим движения такой среды плоскими волнами при $v_3 = 0$, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$ (достаточно выполнение этих равенств в начальный момент). Условие текучести Мизеса $1/2 \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k^2$ сводится тогда к $3/4 (\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{12}^2 = k^2$.

Введем новую переменную θ

$$\sigma_{12} = k \sin \theta, \quad 1/2 \sqrt{3} (\sigma_{11} + p) = k \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

В рассматриваемом случае система (1.1), (1.2) и уравнений движения, описывающая пластическое течение среды, приводится к виду

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2k \sin \theta}{\sqrt{3}} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = k \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + 3\alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad \left(K \equiv \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\cos \theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{k}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$k \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\sin \theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \geq 0 \quad (2.4)$$

Уравнение второго закона термодинамики запишем, определяя приток тепла законом Фурье

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = 3\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2k^2}{T_0} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\kappa}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (c \equiv m + 9\alpha^2 K) \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала соответствующую идеальную систему, описывающую крупномасштабные явления (2.1) — (2.5). Переход к идеальной системе осуществляется пренебрежением членами с высшими производными и в данном случае эквивалентен рассмотрению адиабатических процессов или предположению $\kappa = 0$. В этом случае уравнению (2.2) при помощи (2.4), (2.5) можно придать вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{K_1} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k_1}{k} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\sin \theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{K_1} \equiv \frac{1}{K} - \frac{9\alpha^2}{c},$$

$$k_1 \equiv \frac{6\alpha k^2}{c\Gamma_0} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.1) — (2.3), (2.6) образуют замкнутую идеальную систему уравнений пластического течения. Отметим, что эту систему можно рассматривать как уравнения несвязанной теории пластичности для среды с той же поверхностью текучести, но с неградиентальным законом пластического течения. От уравнений несвязанной теории пластичности с градиентальным законом рассматриваемая система отличается лишь введением K_1 вместо K и наличием последнего члена в (2.6). Отношения k_1/k и $(K_1 - K)/K$, например для стали, имеют порядок 10^{-3} , поэтому во многих случаях оправдано пренебрежение тепловыми эффектами. Но, как показано ниже, для плоских волн, в которых касательные напряжения на площадках параллельных фронту близки к k , их учет имеет принципиальное значение.

Действительно, рассмотрим характеристическое уравнение системы (2.1) — (2.3), (2.6)

$$D(C) \equiv (\rho_0 C^2)^2 - \beta \rho_0 C^2 + K_1 \mu \left(\cos \theta - \frac{k_1}{k \sqrt{3}} \right) \cos \theta = 0 \quad (2.7)$$

$$\beta \equiv K_1 + \frac{4\mu}{3} \sin^2 \theta + \mu \cos^2 \theta - \frac{k_1 K_1}{k \sqrt{3}} \cos \theta$$

Здесь C — характеристическая скорость. Уравнение (2.7) имеет две пары корней $\pm C_+$, $\pm C_-$ ($C_+^2 > C_-^2$). Если $\alpha = 0$, то корни (2.7) C_+^0 , C_-^0 — действительные, причем $C_+^0 \geq \sqrt{\mu/\rho_0}$, а C_-^0 обращается в нуль при $\theta = \pi/2$ ($3\pi/2$) [3]. В случае $\alpha \neq 0$ малые по сравнению с K изменения коэффициентов (2.7) вызывают малые отклонения величин C , $dC/d\theta$ от C^0 , $dC^0/d\theta$. Эти отклонения, однако, могут оказаться существенными вблизи точек, в которых $C^0 = 0$ или $dC^0/d\theta = 0$. Так, из (2.7) получаем, что $\rho_0 C_-^2 < 0$ при

$$\theta_* < \theta < \pi/2 \quad (3\pi/2 < \theta < 2\pi - \theta_*), \quad \theta_* = \arccos k_1/k\sqrt{3}$$

Характеристические скорости становятся мнимыми.

Знак $dC_{\pm}^0/d\theta$ совпадает со знаком $\pm \sin \theta \cos \theta$. Дифференцируя (2.7) по θ , находим

$$\operatorname{sgn} \frac{d(\rho_0 C_{\pm}^2)}{d\theta} =$$

$$= \pm \operatorname{sgn} \left[\rho_0 C_{\pm}^2 \left(\frac{2\mu \cos \theta}{3} + K_1 \cos \theta_* \right) \sin \theta + K_1 \mu (2 \cos \theta - \cos \theta_*) \sin \theta \right]$$

Отсюда видно, что $d(\rho_0 C_-^2) / d\theta$ меняет знак при $\theta = \theta_1 \in (\theta_*, \pi/2)$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и в симметричных им относительно $\theta = \pi$ точках; $d(\rho_0 C_+^2) / d\theta$ меняет знак при $\theta = \theta_2 \in (\pi/2, \pi - \arccos [3K_1 k_1 / 2\sqrt{3}k\mu])$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и в симметричных им точках.

Зависимость характеристических скоростей от θ иллюстрируется фигурой (для сравнения приведены также соответствующие зависимости при $\alpha = 0$). Величина $\rho_0 C_+^2$ достигает максимума $K_1 + 4\mu/3$ при $\theta = \theta_2$, минимума $-K_1(1 - k_1/k\sqrt{3})$ при $\theta = 0$ и имеет локальный минимум $K_1(1 + k_1/k\sqrt{3})$ при $\theta = \pi$. При $\pi < \theta < 2\pi$ графики симметричны приведенным относительно прямой $\theta = \pi$.

Существенной особенностью рассматриваемой идеальной системы является наличие мнимой характеристической скорости. Задача Коши для такой системы поставлена некорректно [4]. Этот факт можно интерпретировать либо как следствие выбора неградиентального закона течения в несвязанной модели, либо как результат пренебрежения теплопроводностью в связанной модели.

Если теплопроводность учитывается, то система по сравнению с идеальной теряет пару мнимых характеристических скоростей, остальные характеристические скорости действительные.

Покажем, что система (2.1) — (2.5) эволюционна, т. е., что $\text{Im } \omega(l)$ ограничена сверху, здесь $\omega(l)$ — корни дисперсионного уравнения системы, соответствующие действительным l . Дисперсионное уравнение имеет вид

$$-i\omega D\left(\frac{\omega}{l}\right) + \frac{\kappa K_1}{cT_0 K} l^2 D^\circ\left(\frac{\omega}{l}\right) = 0 \quad (2.8)$$

Здесь D определено (2.7); через D° обозначено D при $\alpha = 0$, $D^\circ(C) = 0$ — характеристическое уравнение несвязанной модели.

Уравнение (2.8) алгебраическое, поэтому неограниченность $\text{Im } \omega$ возможна лишь при $\omega \rightarrow \infty$. Одновременно должно быть и $l \rightarrow \infty$. Если при этом ω/l ограничено, то

$$D^\circ\left(\frac{\omega}{l}\right) = -\frac{1}{l} \left[\frac{icKT_0}{\kappa K_1} \frac{\omega}{l} D\left(\frac{\omega}{l}\right) \right]$$

где выражение в скобке ограничено и, следовательно, $\omega/l = C_\pm^\circ + O(l^{-1})$, $\text{Im } \omega = O(1)$. Если $\omega/l \rightarrow \infty$, то $D(\omega/l) / D^\circ(\omega/l) \rightarrow 1$ и из (2.8) следует, что

$$-\frac{i\omega}{l^2} = \frac{\kappa K_1}{cT_0 K} + o(1), \quad \text{Im } \omega \rightarrow -\infty$$

Таким образом, система (2.1) — (2.5) эволюционна.

При исследовании устойчивости постоянных решений системы (2.1) — (2.5) (для них, в частности, $\partial\lambda / \partial t = 0$) искать возмущение в виде $Ae^{i(lx - \omega t)}$ нельзя, так как при таких возмущениях в начальный момент имеются отрезки, на которых $(\partial\lambda / \partial t)_p > 0$, и отрезки с $(\partial\lambda / \partial t)_p < 0$. В последующие моменты картина течения будет иметь сложную структуру из чередующихся пластических и упругих областей, примыкающим, согласно п. 1, к соответствующим отрезкам. Однако такой способ применим к исследованию

дованию устойчивости пластических решений, в которых $\partial\lambda / \partial t \geq \psi > 0$ относительно малых возмущений, не сводящих σ_{ij} , T с поверхности течучести.

Рассмотрим, например, устойчивость простейшего непостоянного решения системы (2.1) — (2.5)

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 = \text{const}, \quad p = p_0 + p_1 t, \quad v_1 = \frac{1}{2} A \sqrt{3} \text{ctg } \theta_0 x \\ v_2 &= Ax, \quad T = \frac{1}{6\alpha} \left[A \sqrt{3} \text{ctg } \theta_0 t 2p_1 t / K + \left(bA + \frac{cT_0}{\kappa K_1} p_1 \right) x^2 + H \right] \\ \frac{\partial\lambda}{\partial t} &= \frac{A}{2k \sin \theta_0} > 0, \quad b \equiv \frac{\sqrt{3} (cT_0 \cos \theta_0 - 2 \sqrt{3} \alpha k)}{2 \sin \theta_0 \kappa} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $A > 0$, H , p_1 — произвольные постоянные. Можно рассматривать (2.9) при $-\infty < x < \infty$ как решение задачи Коши с соответствующими начальными данными для v_1, v_2, p, θ или при $-L \leq x \leq L$ — как решение краевой задачи с граничными условиями

$$v_1 = \pm \frac{1}{2} AL \sqrt{3} \text{ctg } \theta_0, \quad v_2 = \pm AL, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \pm (6\alpha)^{-1} \left(bA + \frac{c}{\kappa K_1} T_0 p_1 \right) L$$

при $x = \pm L$

Для исследования устойчивости этого решения линеаризуем около него систему (2.1) — (2.5). Коэффициенты системы зависят лишь от θ , поэтому линеаризованная система имеет тот же вид, что и система (2.1) — (2.5), но в коэффициенты вместо θ следует подставить θ_0 . Кроме того, при линеаризации возникает новый член, именно: в левой части уравнения (2.3) добавляется $A (2 \sin \theta_0)^{-1} \theta$. Под θ, v_1, v_2, p, T понимаются при этом малые добавки к решению (2.9).

Аналогичное изменение происходит при составлении определителя $D^*(\omega, l)$ для подсчета дисперсионного уравнения линеаризованной системы: в строке, соответствующей уравнению (2.3), в столбце, соответствующем θ , вместо $ik\omega / 2\mu$ появляется член $ik\omega / 2\mu + A (2 \sin \theta_0)^{-1}$. Таким образом, уравнение $D^*(\omega, l) = 0$, кроме всех членов дисперсионного уравнения системы (2.1) — (2.5) содержит дополнительные члены, порожденные добавкой $A (2 \sin \theta_0)^{-1}$. При этом наряду со всяким дополнительным членом вида $aA (2 \sin \theta_0)^{-1} \omega^{p+lq}$ имеется член $aik (2\mu)^{-1} \omega^{p+lq}$, присутствовавший и в дисперсионном уравнении системы (2.1) — (2.5). При $\omega \rightarrow \infty$ дополнительным членом можно пренебречь по сравнению с $aik (2\mu)^{-1} \omega^{p+lq}$, поэтому уравнение $D^*(\omega, l) = 0$ так же, как и (2.8), не может иметь корней $\omega(l)$ с неограниченной сверху $\text{Im } \omega$. Следовательно, скорость роста малых возмущений решения (2.9) ограничена.

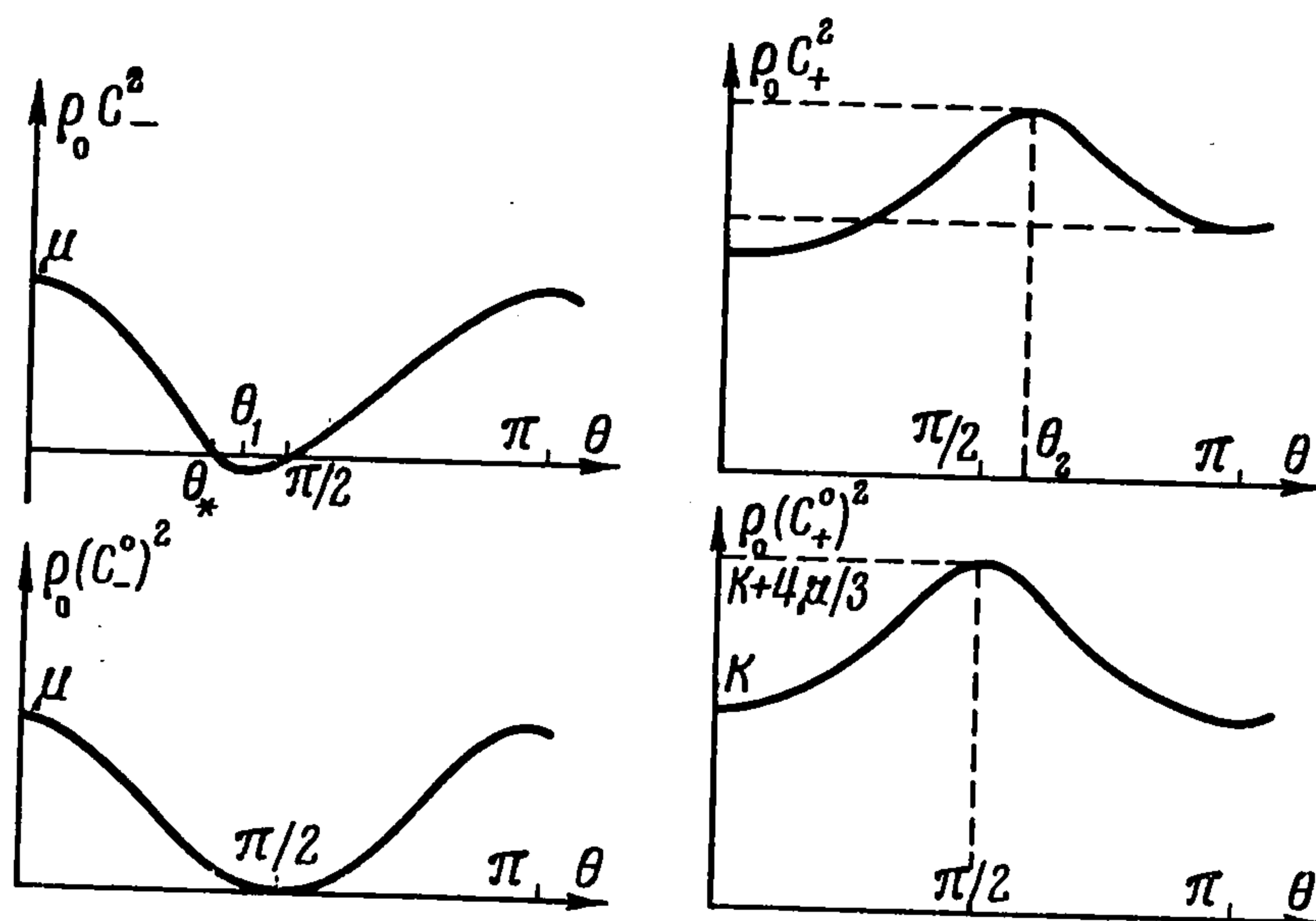
Дисперсионное уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\begin{aligned} c\rho_0^2 K_1^{-1} \Omega^5 + \rho_0^2 \left(\frac{\kappa l^2}{KT_0} + \frac{cA_1}{K_1 \sin \theta_0} \right) \Omega^4 + \rho_0 l^2 \left(\frac{c\beta}{K_1} + \frac{\kappa\rho_0 A_1}{kT_0 \sin \theta_0} \right) \Omega^3 + \\ + \rho_0 l^2 \left[\frac{\kappa\beta^\circ}{KT_0} l^2 + \frac{A_1}{\sin \theta_0} \left(\frac{6k\alpha \cos \theta_0}{\sqrt{3} T_0} - c \right) \right] \Omega^2 + \\ + l^4 \left[\frac{c \cos \theta_0}{\mu} \left(\cos \theta_0 - \frac{k_1}{k \sqrt{3}} \right) + \frac{\rho_0 \kappa A_1}{T_0 \sin \theta_0} \right] \Omega + \\ + \frac{\mu \kappa \cos^2 \theta_0}{T_0} l^6 = 0, \quad \Omega \equiv -i\omega, \quad A_1 = \frac{\mu A}{k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где β определено (2.7), через β° обозначено β при $\alpha = 0$.

У уравнения (2.10) есть корни, лежащие в правой полуплоскости. В противном случае все его коэффициенты имели бы одинаковые знаки, но коэффициент при Ω^5 положителен, а при Ω отрицателен, если $\theta_* < \theta < \pi/2$ и A достаточно мало.

Таким образом, уравнение $D^*(\omega, l) = 0$ имеет корни $\omega = i\Omega$, $\text{Im } \omega > 0$. Следовательно, решение (2.9) задачи Коши при $-\infty < x < \infty$ неустойчиво. Уравнение (2.10) инвариантно относительно замены l на $-l$, поэтому из существования корней ω , $\text{Im } \omega > 0$ следует также глобальная неустойчивость (2.9) как решения краевой задачи при достаточно большом L [5].



Рассмотрим, наконец, вопрос об опрокидывании простых волн системы (2.1) — (2.3), (2.6). Уравнения, описывающие простые волны, в качестве параметра которых можно принять θ^1 , имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 C \frac{dv_1}{d\theta} &= \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{2k}{\sqrt{3}} \sin \theta, & -\rho_0 C \frac{dv_2}{d\theta} &= k \cos \theta \\ \frac{dv_1}{d\theta} &= \frac{k\sqrt{3}}{2\mu} \frac{\rho_0 C^2 - \mu \cos^2 \theta}{\rho_0 C \sin \theta} \\ \frac{dv_1}{d\theta} &= \frac{C}{K_1} \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{k_1}{2k} \sin \theta \frac{dv_2}{d\theta} + \frac{k_1 \cos \theta}{k\sqrt{3}} \frac{dv_1}{d\theta} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{\mu - \rho_0 C^2}{2\mu \rho_0 C^2} \text{ctg } \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где C определяется из характеристического уравнения (2.7).

Из (2.7) находим

$$\rho_0 C_-^2 \leq \mu, \quad \rho_0 C_+^2 \geq K_1 \left(1 - \frac{k_1}{\sqrt{3}k}\right)$$

Здесь предполагается, что $K/\mu > 4/3$, и, следовательно, $\rho_0 C_+^2 > \mu$ при достаточно малых k_1/k . В силу этих неравенств из (2.11) следует, что знак $\partial \theta / \partial t$ совпадает со знаком $\text{ctg } \theta$ в медленных простых волнах и противоположен ему в быстрых. Учитывая это соотношение и знак производной $d(\rho_0 C_{\pm}^2)/d\theta$ (см. фигуру), получаем, что условие опрокидывания волн,

¹ Простые волны, в которых θ нельзя принять за параметр ($\theta = \text{const}$), распространяются без изменения формы.

распространяющихся вправо, $\partial C / \partial t > 0$, выполнено при $\pi / 2 < \theta < \theta^2$ ($2\pi - \theta_2 < \theta < 3\pi / 2$) для быстрых пластических волн.

Таким образом, учет тепловых эффектов приводит к необходимости рассмотрения скачков в пластической области в отличие от несвязанной модели [6]. В тех случаях, когда скачок имеет достаточно малую интенсивность, например, если он возник в результате опрокидывания простой волны и $\theta_2 - \pi / 2$ мало (для стали эта величина порядка 10^{-3}), в качестве приближенных условий на скачке можно использовать соотношения между величинами в соответствующей простой волне, а скорость распространения разрыва приближенно считать равной полусумме значений соответствующей характеристической скорости перед и за скачком.

Автор приносит глубокую благодарность А. Г. Куликовскому за ценные советы и Л. И. Седову за полезное обсуждение работы.

Поступила 19 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. К о й т е р В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды, т. 2, М., «Наука», 1970.
3. Т и н г Т., Н а н Н. Плоские волны в полупространстве, обусловленные совместным действием сжимающих напряжений и напряжений сдвига. Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е., 1969, т. 36, № 42.
4. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
5. К у л и к о в с к и й А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
6. К а м е н я р ж Я. А. О простых волнах и распаде разрыва в упруго-пластической среде с условием Мизеса. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.