Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.385

КРУЧЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. Назаров, А. А. Пучков

(Киев)

Для решения несимметричной системы уравнений, характеризующей чистое кручение тела вращения с переменными модулями сдвига, используются дифференциальный и интегральный операторы. Функции напряжений и перемещения выражаются сходящимися рядами, содержащими две произвольные аналитические функции комплексного переменного и коэффициенты вещественного аргумента, определенные через модули сдвига. В качестве примера рассматривается задача о кручении полого цилиндра со смешанными краевыми условиями.

Кручение изотропных стержней подробно рассмотрено в [1], а для анизотропных тел вращения в — [2, 3].

1. Исходные уравнения. Чистое кручение тела вращения, ось цилиндрической неоднородной анизотропии которого совпадает с геометрической осью тела, в цилиндрических координатах $r\ z\ \theta$ характеризуется линейной системой уравнений в частных производных эллиптического типа [2]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} - P(r)\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + Q(r)\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

$$P(r) = r^3 G_1(r), \qquad Q(r) = r^3 G_2(r) \tag{1.1}$$

Здесь φ — функция напряжений, ψ — функция перемещения, $G_{z\theta} = G_1(r)$, $G_{r\theta} = G_2(r)$ — модули сдвига соответствующих плоскостей, которые будем считать заданными (или найденными из эксперимента), ограниченными на интервале изменения, кусочно-непрерывными функциями от одной переменной r.

При кручении таких тел не равны нулю две составляющие напряжений $\tau_{z\theta} = \tau_1(r, z)$, $\tau_{r\theta} = \tau_2(r, z)$ и тангенциальное перемещение $u_\theta = v(r, z)$, которые определяются по формулам

$$\tau_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = rG_1(r)\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = rG_2(r)\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v = r\psi \tag{1.2}$$

В отличие от [1,2] ищем решение системы (1.1) в виде оператора

$$\varphi = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(r)\,w_k(\zeta), \qquad \psi = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(r)\,w_k(\zeta) \tag{1.3}$$

$$\zeta = \rho + iz, \qquad \rho = \int\sqrt{\frac{G_1(r)}{G_2(r)}}\,dr \tag{1.4}$$

Вещественные коэффициенты α_k, β_k, зависящие только от одной переменной r, и аналитические функции $w_k(\zeta)$ комплексного аргумента $\zeta = \rho + iz$ подберем так, чтобы оператор (1.3) удовлетворял системе уравнений (1.1).

Вносим соответствующие производные от функций (1.3), в систему (1.1). В результате придем к двум равенствам

$$\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\alpha_k' w_k + \left(\alpha_k\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} + P\beta_k\right)w_k'\right] = 0 \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\left[Q\beta_k' w_k + \left(Q\beta_k\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} + \alpha_k\right)w_k'\right] = 0$$

При этом учтены известные соотношения $\operatorname{Re} iF(\zeta) = -\operatorname{Im}F(\zeta)$, $\operatorname{Im} iF(\zeta) = \operatorname{Re}F(\zeta)$. Систему уравнений (1.5) можно удовлетворить двумя путями.

2. Решение в форме дифференциального оператора. Система уравнений (1.5) удовлетворится тождественно при произвольной аналитической функции $w_0 = w(\zeta)$, если на коэффициенты α_k, β_k и на функции $w_k(\zeta)$ наложить условия

$$\alpha_0' = \beta_0' = 0, \qquad \alpha_k' + P\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} = 0$$

$$Q\beta_k' + \alpha_{k-1} + Q\beta_{k-1}\sqrt{\frac{G_1}{G_2}} = 0, \qquad w_k = w_{k-1}' \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда находим

$$\alpha_0 = \alpha = \text{const}, \qquad \beta_0 = \beta = \text{const}, \qquad w_k = w^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_k^\circ - \int\left(P\beta_{k-1} + \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}\,\alpha_{k-1}\right)dr \tag{2.1}$$

$$\beta_k = \beta_k^\circ - \int\left(\frac{\alpha_{k-1}}{Q} + \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}\,\beta_{k-1}\right)dr \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

(α_k°, β_k° — произвольные постоянные интегрирования). При этом решение (1.3) принимает форму дифференциального оператора, аналогичного приведенному в [4]

$$\varphi = \varphi_1 = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(r)\,w^{(k)}(\zeta), \qquad \psi = \psi_1 = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(r)\,w^{(k)}(\zeta) \tag{2.2}$$

В формулах (2.2) вместо ζ можно рассмотреть комплексно сопряженный аргумент $\bar\zeta = \rho - iz$, а также и аргументы вида $\zeta_1 = i\zeta$, $\bar\zeta_1 = i\bar\zeta$. В этих случаях коэффициенты (2.1) будут выражаться несколько иными формулами.

3. Решение в форме интегрального оператора. Систему уравнений (1.5) можно удовлетворить и иным образом при произвольной аналитической функции комплексного переменного $w_0 = f(\zeta)$. Для этого на функции $\alpha_k = a_k(r)$, $\beta_k = b_k(r)$ и $w_k = f_k(\zeta)$ (для удобства введены переобозначения) наложим условия вида

$$a_0\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}+Pb_0=0, \qquad Qb_0\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}+a_0=0$$

$$a_k\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}+Pb_k+a_{k-1}'=0, \quad Qb_k\sqrt{\frac{G_1}{G_2}}+a_k+Qb_{k-1}'=0 \tag{3.1}$$

$$f_k'(\zeta)=f_{k-1}(\zeta) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Отсюда приходим к равенствам

$$f_k=\sum_{m=1}^{k}\frac{C_m}{(k-m)!}r^{k-m}+\iint\ldots\int f(\zeta)\,d\zeta\,d\zeta\ldots d\zeta_k \tag{3.2}$$

$$a_0+\sqrt{PQ}\,b_0=0$$

$$a_{k-1}'-\sqrt{PQ}\,b_{k-1}'=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.3}$$

(C_m — произвольные постоянные интегрирования). Не нарушая общности, положим $C_m=0$ ($m=1,2,\ldots\ k$). Тогда решение (1.3) принимает форму интегрального оператора, аналогичного оператору Бергмана [5] (см. также [4])

$$\varphi=\varphi_2=\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(r)\int f(\zeta)\,d\zeta^k, \qquad \psi=\psi_2=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(r)\int f(\zeta)\,d\zeta^k \tag{3.4}$$

Здесь использовано условное обозначение k-кратного интеграла

$$I_k(\zeta)=\int f(\zeta)\,d\zeta^k=\iint\ldots\int f(\zeta)\,d\zeta\,d\zeta\ldots d\zeta_k \tag{3.5}$$

При $k=0$ интеграл в (3.5) отсутствует, и $I_0=f(\zeta)$, где $f(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция комплексного аргумента. В общем случае функции $f(\zeta)$ и $w(\zeta)$ независимы.

Коэффициенты a_k, b_k, входящие в (3.4), находятся из уравнений (3.3). В результате интегрирования получим

$$a_0=-D_0(r^6G_1G_2)^{1/4}, \qquad b_0=D_0(r^6G_1G_2)^{-1/4}$$

$$a_k=-Qb_{k-1}'-(PQ)^{1/4}\left[D_k-\frac{1}{2}\int\frac{(Qb_{k-1}')'}{(PQ)^{1/4}}dr\right]$$

$$b_k=(PQ)^{-1/4}\left[D_k-\frac{1}{2}\int\frac{(Qb_{k-1}')'}{(PQ)^{1/4}}dr\right] \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.6}$$

(D_k ($k=0,1,2,\ldots$) — произвольные постоянные интегрирования.) По аналогии с [4,5] можно доказать, что если $w(\zeta)$ и $f(\zeta)$ ограничены в некоторой области, то ряды, входящие в решения (2.2) и (3.4), абсолютно и равномерно сходятся в той же области. Здесь на этом не останавливаемся.

Решения в форме (2.2) и (3.4) независимы между собой. Линейная интегро-дифференциальная комбинация этих решений также служит решением системы (1.1).

Коэффициенты в (2.1) и (3.6) выражаются аналитически или табулируются в зависимости от параметров $G_1(r)$ и $G_2(r)$. По аналогии с [4] можно показать, что в (2.1) и (3.6) коэффициенты $\overset{\circ}{\alpha}_k$, $\overset{\circ}{\beta}_k$, D_k не являются существенными. Тогда, не нарушая общности, достаточно ограничиться частными решениями, т. е. положить $\alpha_n^\circ = \beta_n^\circ = D_n = 0$ $(n = 1,2,\ldots)$, что и будем считать выполненным в дальнейшем.

Например, рассмотрим случай, когда модули сдвига выражаются степенными функциями [3]

$$G_1 = g_1 r^p, \qquad G_2 = g_2 r^q \tag{3.7}$$

где g_1, g_2 — фиксированные постоянные, p, q — любые заданные числа.

Далее, полагая для простоты в (2.1) еще и $\alpha = 0$, $\beta = 1$, найдем

$$\alpha_1 = -g_1 \frac{r^{p+4}}{p+4}, \quad \beta_1 = -\rho, \quad \rho = \frac{a}{A} r^A \quad \left(A = \frac{p-q}{2} + 1,\ a = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\right)$$

$$\alpha_k = (-1)^k \frac{g_1 (2k-3+s)!!}{A(s-1)(k-1)!(k+s-1)!} r^{p+4} \rho^{k-1} \tag{3.8}$$

$$\beta_k = (-1)^k \frac{(s-2)(2k-3+s)!!}{(s-3)(k-2+s)!\,k!} \rho^k$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \ s = (p+4)/A \neq 1; 2; 3)$$

Для изотропного тела $g_1 = g_2$, $p = q = 0$, $s = 4$, $\rho = r$. Аналогично могут быть вычислены и коэффициенты a_k, b_k по формулам (3.6).

Отметим, что из (3.8) следует, что если между p и q будет существовать связь, выражаемая одним из равенств

$$(2n-1) A + p + 4 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

то формулы (2.2) становятся конечными суммами, и вопрос о сходимости рядов вообще отпадает.

Например, если в (3.9) положить $n = 1$, то придем к равенствам

$$A = -(p+4), \qquad q = 3p + 10$$

В этом случае формулы (1.4) и (2.2) будут иметь вид

$$\varphi = \operatorname{Im} \alpha_1 w', \quad \psi = \operatorname{Re}(\beta w + \beta_1 w'), \quad \rho = -\frac{a}{p+4} r^{-(p+4)} \tag{3.10}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (3.10) удовлетворяют системе (1.1).

4. Кручение полого неоднородного стержня со смешанными краевыми условиями на боковых поверхностях. Пусть имеем стержень кругового сечения длины l с соосно расположенными цилиндрическими поверхностями радиусов R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$.

Рассмотрим задачу, когда на одной из поверхностей заданы напряжения, а на второй — перемещения в виде функций от координаты z. Пусть торцы стержня свободны от напряжений, а модули сдвига заданы в виде кусочно-непрерывных функций от радиуса.

С учетом формулы (1.2) имеем внутреннюю смешанную задачу в замкнутой области, на одной части границы которой заданы условия Дирихле для функции перемещения, а на второй ее части имеем условия Неймана для функции напряжения

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{z=l} = 0$$

$$v_t|_{r=R_1} = R_1 f_1(z) \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{r=R_2} = -R_2^2 f(z) = f_2(z)$$

Здесь $f_1(z)$, $f_2(z)$ — заданные кусочно-непрерывные функции, имеющие ограниченные изменения на интервале $(0, l)$.

Для решения задачи воспользуемся линейной интегро-дифференциальной комбинацией формул (2.2) и (3.4)

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k(r)\, w^{(k)}(\zeta) + a_k(r) \int f(\zeta)\, d\zeta^k \right] \tag{4.2}$$

$$v = r(\psi_1 + \psi_2) = r \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\beta_k(r)\, w^{(k)}(\zeta) + b_k(r) \int f(\zeta)\, d\zeta^k \right]$$

Выберем в качестве функций $w(\zeta)$ и $f(\zeta)$ ряды

$$w(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\omega\zeta}, \qquad f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n\omega\zeta} \tag{4.3}$$

(A_n, B_n — произвольные постоянные, ω — фиксированная константа)

Вычисляем соответствующие производные и интегралы от (4.3) и вносим их в формулы (4.2). В итоге, после выделения вещественной и мнимой частей, получим

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_n^{\alpha}(r) A_n + \delta_n^{a}(r) B_n) \sin n\omega z$$

$$v = r \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_n^{\beta}(r) A_n + \delta_n^{b}(r) B_n) \cos n\omega z \tag{4.4}$$

Здесь произведена перестановка знаков суммирования и введены обозначения

$$\Delta_n^{\alpha}(r) = e^{-n\omega\rho} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n\omega)^k \alpha_k(r)$$

$$\delta_n^{a}(r) = e^{-n\omega\rho} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k(r)}{(n\omega)^k} \tag{4.5}$$

(Δ_n^{β} и δ_n^{b} выражаются теми же формулами (4.5), в которые только вместо α_k и a_k нужно внести соответственно β_k и b_k).

Положим в формулах (4.4) $\omega = \pi / l$. Тогда, учитывая первую формулу (1.2), замечаем, что два первых условия (4.1) выполняются автоматически. Выполняются и два другие условия (4.1), если коэффициенты A_n, B_n на интервале $0 \leqslant z \leqslant l$ определены из условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_1^{\beta} A_n + \delta_1^{b} B_n) \cos n\omega z = f_1(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\omega) (\Delta_2^{\alpha} A_n + \delta_2^{a} B_n) \cos n\omega z = f_2(z)$$

(Δ_1^{β}, δ_1^{b}, Δ_2^{α}, δ_2^{a} — постоянные, которые получим, если в формулы (4.5) соответственно внести R_1 и R_2).

Разлагаем на промежутке $(0, l)$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в ряды Фурье по косинусам. Затем используем обычный метод Фурье, в результате которого находим коэффициенты A_n, B_n

$$A_n = \frac{1}{\Delta}(n\omega c_n \delta_2{}^a - d_n \delta_1{}^b), \quad B_n = \frac{1}{\Delta}(d_n \Delta_1{}^\beta - n\omega c_n \Delta_2{}^\alpha)$$
$$\Delta = n\omega(\Delta_1{}^\beta \delta_2{}^a - \Delta_2{}^\alpha \delta_1{}^b), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

В формулах (4.6) коэффициенты c_n и d_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(z)\cos n\omega z\, dz, \qquad d_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_2(z)\cos n\omega z\, dz \tag{4.7}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

При этом $c_0 = d_0 = 0$, что приводит к определенным условиям, налагаемым на функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$f_1(z) = h_1 + h_2 z^2, \qquad f_2 = k_0 + k_1 z + k_2 z^2$$

(h_1, h_2, k_0, k_1, k_2 — постоянные). Тогда по формулам (4.7) получим

$$c_n = (-1)^n \frac{2h_2}{n\omega}, \qquad d_n = \frac{2}{n\omega l}\{[(-1)^n - 1]\, k_1 + (-1)^n l k_2\} \tag{4.8}$$

$$h_1 = -\frac{l^3 h_2}{3}, \qquad k_0 = -l\left(\frac{k_1}{2} + \frac{l^2 k_2}{3}\right) \tag{4.9}$$

Соотношения (4.9) налагают ограничения на коэффициенты h и k.

Поступила 6 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
3. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971.
4. Назаров Г. И. Точное решение уравнений газовой динамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
5. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М., «Мир», 1964.