

**ВАРИАНТ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НЕОДНОРОДНОЙ  
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

**Е. А. Ильюшина**

(Москва)

Рассматривается одномерная сплошная среда, состоящая из множества периодически повторяющихся однородных областей, в каждой из которых движение задается динамическими уравнениями упругости, начальными условиями и условиями сопряжения на границах областей. Доказывается, что перемещения границ областей определяются некоторыми непрерывными функциями, конечно-разностные уравнения для которых в длинноволновом приближении тем точнее описывают частотный спектр неоднородной среды, чем больше полевых функций введено для смещений однотипных границ. Таким образом, предлагается вариант моментной теории упругости, в котором среднее значение перемещений границ областей можно трактовать как перемещение некоторого макроскопического однородного тела, относительные перемещения границ (которые могут быть названы моментами) определяют взаимодействие областей и, в частности, концентрацию напряжений за счет неоднородности структур.

1. Рассмотрим смещение  $u(x, t)$  упругого стержня длины  $L$ , состоящего из  $N$  различных однородных участков. Начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = U_1(t), \quad u(L, t) = U_{N+1}(t) \end{aligned}$$

Для удобства будем считать, что

$$U_1(t) = U_{N+1}(t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

Смещение каждого  $j$ -го участка  $U_j(\xi_j, t)$  определяется волновым уравнением, начальными условиями и условиями сопряжения на границах областей

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial \eta_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ u_j(\eta_j, 0) &= \dot{u}_j(\eta_j, 0) = 0 \\ u_j(0, t) &= U_j(t), \quad u_j(\lambda_j, t) = U_{j+1}(t) \\ U_j(t) &= 0 \quad \text{при } t < 0 \\ s_j &= \kappa_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial \eta_j} \right)_{\eta_j=0} = \kappa_{j-1} \left( \frac{\partial u_{j-1}}{\partial \eta_{j-1}} \right)_{\eta_{j-1}=\lambda_{j-1}} \\ s_{j+1} &= \kappa_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial \eta_j} \right)_{\eta_j=\lambda_j} = \kappa_{j+1} \left( \frac{\partial u_{j+1}}{\partial \eta_{j+1}} \right)_{\eta_{j+1}=0} \\ \eta_j &= \frac{\xi_j}{c_j}, \quad \lambda_j = \frac{l_j}{c_j}, \quad \kappa_j = \frac{E_j F_j}{c_j} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $c_j$  — скорость звука для  $j$ -го участка,  $l_j$  — длина  $j$ -го участка,  $\xi_j$  — местная (внутренняя координата) по оси  $x$ , отсчитанная от левой границы  $j$ -го участка,  $s_j$  и  $s_{j+1}$  — напряжения на левой и правой границах  $j$ -го участка соответственно,  $E_j$  и  $F_j$  — модуль Юнга и сечение  $j$ -го участка.

Решая краевые задачи с условиями сопряжения (1.1) при помощи преобразования Лапласа — Карсона [1]

$$u^*(p) = p \int e^{-pt} u(t) dt$$

получим следующие рекуррентные соотношения для лаплас-образов перемещений границ  $U_j^*(p)$ :

$$\frac{\kappa_j}{\operatorname{sh} \lambda_j p} U_{j+1}^*(p) - (\kappa_j \operatorname{cth} \lambda_j p + \kappa_{j-1} \operatorname{cth} \lambda_{j-1} p) U_j^*(p) + \frac{\kappa_{j-1}}{\operatorname{sh} \lambda_{j-1} p} U_{j-1}^*(p) = 0$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (1.2) представляют собой лаплас-образы следующих уравнений:

$$-\frac{\kappa_j + \kappa_{j-1}}{2} U_j(t) + \kappa_j \sum_{n=1,3,5,\dots} U_{j+1}(t - n\lambda_j) + \kappa_{j-1} \sum_{n=1,3,5,\dots} U_{j-1}(t - n\lambda_{j-1}) =$$

$$= \kappa_j \sum_{m=2,4,6,\dots} U_j(t - m\lambda_j) + \kappa_{j-1} \sum_{m=2,4,6,\dots} U_j(t - m\lambda_{j-1}) \quad (1.3)$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1$$

Чтобы избавиться от сумм в системе уравнений (1.3), сделаем следующее: запишем эту систему в момент времени  $t^* = t + 2\lambda_j$  и вычтем из соответствующих уравнений уравнения (1.3), записанные в момент времени  $t$ ; затем сделаем для полученных после вычитания уравнений аналогичную процедуру, составляя разность для моментов времени  $t$  и  $t^{**} = t + 2\lambda_{j-1}$ . В результате найдем

$$\frac{\kappa_j + \kappa_{j-1}}{2} \Delta_{\mu_j} U_j - \frac{\kappa_j - \kappa_{j-1}}{2} \Delta_{\nu_j} U_j = \kappa_j \Delta_{\lambda_{j-1}} U_{j+1} + \kappa_{j-1} \Delta_{\lambda_j} U_{j-1} \quad (1.4)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta_\alpha U_j(t) = U_j(t + \alpha) - U_j(t - \alpha)$$

Таким образом, динамическое поведение неоднородного стержня описывается системой разностных по времени уравнений, из которых можно определить перемещения всех внутренних границ при заданных перемещениях концов стержня.

2. В работе [2] для одномерной сплошной среды, построенной на основании линейной неоднородной цепочки, было показано, что с увеличением числа полевых функций, вводимых для смещений однотипных частиц (другими словами, с увеличением числа тождественных частиц или ячеек, включаемых в макроячейку), спектр сплошной среды в длинноволновом приближении с достаточной точностью совпадает со спектром исходной

неоднородной цепочки. Как было указано выше, аналогичный результат может быть получен для полевых функций, соответствующих перемещениям однотипных границ областей в неоднородном стержне с периодической структурой.

С этой целью рассмотрим сначала двухкомпонентный стержень, состоящий из периодически повторяющихся однородных участков двух типов. Система (1.4) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma}{2} \Delta_{\mu} U_j + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_{\nu} U_j &= \gamma \Delta_{\lambda_2} U_{j+1} + \Delta_{\lambda_1} U_{j-1}, & j = 3, 5, 7, \dots \\ \frac{1+\gamma}{2} \Delta_{\mu} U_j + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_{\nu} U_j &= \gamma \Delta_{\lambda_2} U_{j-1} + \Delta_{\lambda_1} U_{j+1}, & j = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad \mu = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \nu = \lambda_1 - \lambda_2$$

Спектральное уравнение для такого стержня получится при подстановке в систему (2.1)

$$\begin{aligned} U_{2j} &= U_1 \exp i \{kj (l_1 + l_2) - \omega t\} \\ U_{2j+1} &= U_2 \exp i \{k [j (l_1 + l_2) - l_2] - \omega t\} \\ & \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\cos k (l_1 + l_2) = \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega - \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma} \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \quad (2.3)$$

В самом простом случае малых волновых чисел  $k$  и частот  $\omega$  это уравнение переходит в следующее:

$$k^2 (l_1 + l_2)^2 = \omega^2 \left[ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \right]$$

Отсюда видно, что скорость распространения звука  $c$  в двухкомпонентном стержне для малых  $k$  и  $\omega$  имеет вид

$$c = (l_1 + l_2)^2 \left[ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \right]^{-1}$$

Из (2.3) следует, что не для всех частот  $\omega$  будут существовать действительные волновые числа  $k$ . Разрешенные частоты должны удовлетворять неравенству

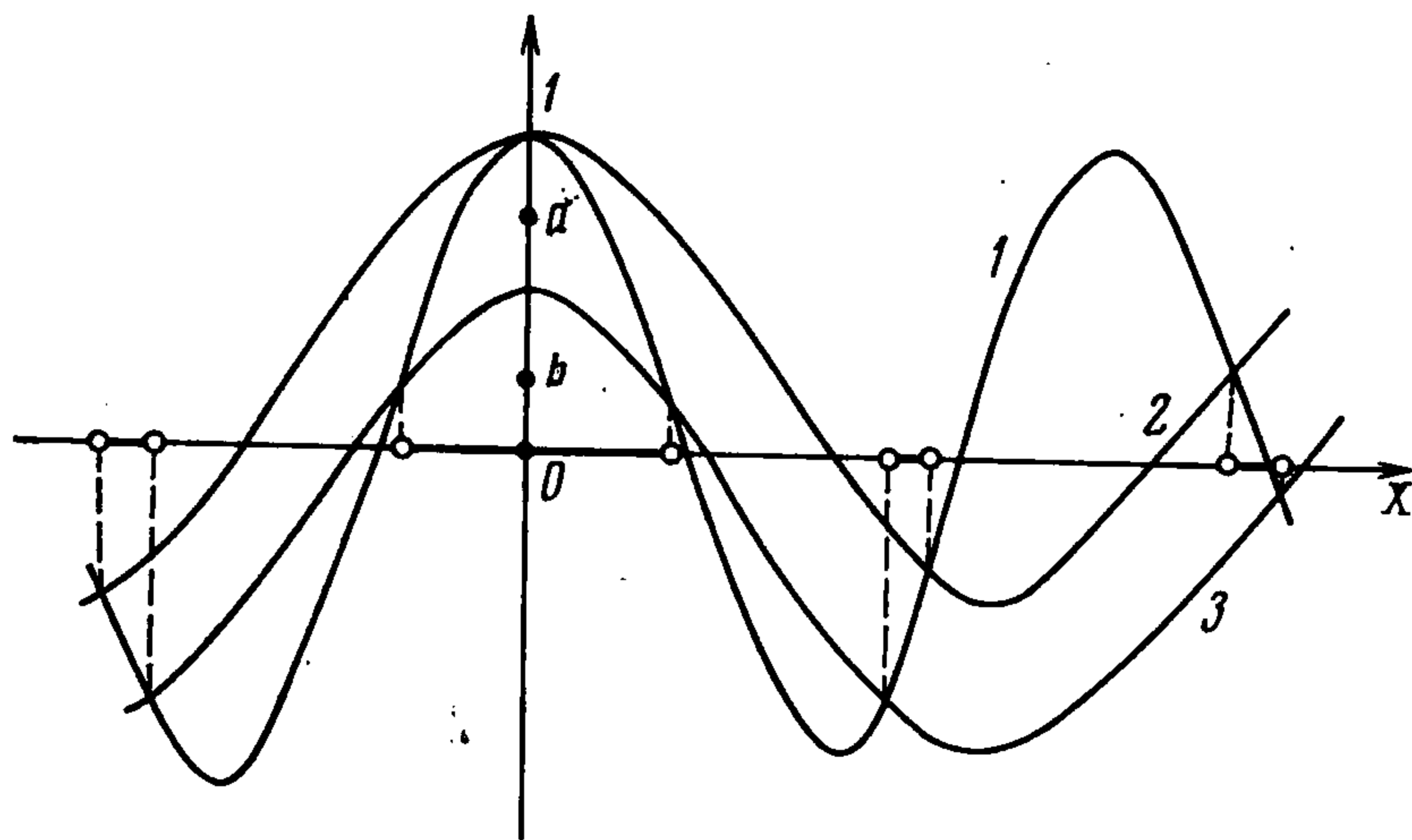
$$\begin{aligned} \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) \omega - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} &\leq \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega \leq \\ &\leq \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) \omega + \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для случая  $3 - 2\sqrt{2} \leq \gamma \leq 3 + 2\sqrt{2}$  области частот, удовлетворяющие условию (2.4), изображены на фигуре отрезками сплошных жирных линий. Здесь

$$X = (\lambda_1 + \lambda_2) \omega, \quad a = \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2, \quad b = \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}, \quad \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Кривым 1—3 соответствуют: 1 —  $\cos X$ , 2 —  $a \cos \alpha X + b$ , 3 —  $a \cos \alpha X - b$ . Для остальных значений  $\gamma$  отличие от приведенного графика будет состоять в том, что  $b > a$ .

Таким образом, рассматриваемый двухкомпонентный периодический стержень представляет собой своеобразный волновой фильтр, пропускающий волны с частотами, принадлежащими бесконечному множеству областей разрешенных частот (2.4). Уравнение, аналогичное уравнению (2.3), определяет в квантовой механике энергетические уровни частицы, находящейся в периодическом потенциальном поле, что моделирует поведение электрона в одномерном кристалле [3,4].



Введем теперь непрерывные дифференцируемые полевые функции  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ , которые связаны с функциями  $U_j(t)$  следующими соотношениями:

$$u_2(x, t) = U_j(t), \quad j = 3, 5, 7 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - \frac{1}{2}\right)(l_1 + l_2) \quad (2.5)$$

$$u_1(x, t) = U_j(t), \quad j = 2, 4, 6 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - 1\right)(l_1 + l_2) + l_1$$

и удовлетворяют при любых значениях  $x$  уравнениям

$$\frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_2(x) + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_2(x) = \gamma \Delta_{\lambda_2} u_1(x + l_1) + \Delta_{\lambda_1} u_1(x - l_2) \quad (2.6)$$

$$\frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_1(x) + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_1(x) = \gamma \Delta_{\lambda_2} u_2(x - l_1) + \Delta_{\lambda_1} u_2(x + l_2)$$

совпадающим с (2.1) при  $x$  из (2.5). Длинноволновым приближением уравнений (2.1) назовем уравнения (2.6), в которых  $u_1(x + l_1, t)$ ,  $u_1(x - l_2, t)$ ,  $u_2(x + l_2, t)$  и  $u_2(x - l_1, t)$  разложены по степеням  $l$  с точностью до  $l^2$  включительно

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_2 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_2 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_1 + \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_1' + \gamma \frac{l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_1'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_1 - l_2 \Delta_{\lambda_2} u_1' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_1'' \\ \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_1 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_1 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_2 - \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_2' + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_2'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_2 + l_2 \Delta_{\lambda_1} u_2' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_2'' \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь штрих означает производную по  $x$ .

Спектральное уравнение, соответствующее системе (2.7), имеет вид

$$1 - \frac{1}{2} k^2 (l_1 + l_2)^2 = \cos(\lambda_1 + \lambda_2) \omega - \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma} \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \quad (2.8)$$

Оно представляет собой разложение по  $k$  около точки  $k = 0$  точного спектрального уравнения (2.3). Разрешенные частоты уравнения (2.8), полученные из условия  $k^2 > 0$ , должны удовлетворять следующему неравенству:

$$\cos(\lambda_1 + \lambda_2) \omega \leq \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} + \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2) \omega$$

Очевидно, что разрешенные частоты, соответствующие другим значениям  $k$ , например

$$k = \frac{\pi}{l_1 + l_2}, \quad k = \frac{\pi}{2(l_1 + l_2)}, \quad k = \frac{3\pi}{2(l_1 + l_2)}$$

в рассматриваемом случае двух полевых функций не выявляются.

Предлагаемый метод уточнения описания динамики неоднородной среды при помощи полевых функций в длинноволновом приближении состоит в том, что для однотипных границ областей, частиц вводятся дополнительные различные полевые функции; другими словами, создается макроячейка с периодом, превосходящим минимальный период структуры и кратным ему. Для каждой границы частицы макроячейки вводится своя полевая функция.

В соответствии с изложенным рассмотрим двухкомпонентный стержень с макроячейкой, включающей четыре последовательных участка, т. е. введем четыре полевые функции  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$ ,  $u_4(x, t)$  такие, что

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= U_j(t), \quad j = 2, 6, 10 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - 1\right)(l_1 + l_2) + l_1 \\ u_2(x, t) &= U_j(t), \quad j = 3, 7, 11 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - \frac{1}{2}\right)(l_1 + l_2) \\ u_3(x, t) &= U_j(t), \quad j = 4, 8, 12 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - 1\right)(l_1 + l_2) + l_1 \\ u_4(x, t) &= U_j(t), \quad j = 5, 9, 13 \dots \quad \text{при } x = \left(\frac{j}{2} - \frac{1}{2}\right)(l_1 + l_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

удовлетворяющие в длинноволновом приближении уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_1 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_1 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_4 - \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_4' + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_4'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_2 + l_2 \Delta_{\lambda_1} u_2' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_2'' \\ \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_2 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_2 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_3 + \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_3' + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_3'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_1 - l_2 \Delta_{\lambda_1} u_1' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_1'' \\ \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_3 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_3 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_2 - \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_2' + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_2'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_4 + l_2 \Delta_{\lambda_1} u_4' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_4'' \\ \frac{1+\gamma}{2} \Delta_\mu u_4 + \frac{1-\gamma}{2} \Delta_\nu u_4 &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_1 + \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u_1' + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u_1'' + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_3 - l_2 \Delta_{\lambda_1} u_3' + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u_3'' \end{aligned} \quad (2.10)$$

Спектральное уравнение в этом случае распадается на два уравнения

$$\pm \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 (l_1 + l_2)^2 \right] = \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega - \frac{(1 - \gamma)^2}{2\gamma} \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \quad (2.11)$$

Одно из уравнений (2.11) совпадает с уравнением (2.8), а другое — с разложением точного спектрального уравнения (2.3) по  $k$  около точки  $k = \pi / (l_1 + l_2)$ . Определяемые системой (2.11) разрешенные частоты находятся из условия  $k^2 > 0$  и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) \omega - \frac{4\gamma}{(1 + \gamma)^2} &\leq \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega \leq \\ &\leq \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) \omega + \frac{4\gamma}{(1 + \gamma)^2} \end{aligned}$$

Дальнейшее уточнение спектра двухкомпонентного стержня достигается введением восьми полевых функций  $u_m(x, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, 8$ . Уравнения для них в длинноволновом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1 + \gamma}{2} \Delta_{\mu} u_j + \frac{1 - \gamma}{2} \Delta_{\nu} u_j &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_{j-1} - \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u'_{j-1} + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u''_{j-1} + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_{j+1} + l_2 \Delta_{\lambda_1} u'_{j+1} + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u''_{j+1}, \quad j = 3, 5, 7 \\ \frac{1 + \gamma}{2} \Delta_{\mu} u_j + \frac{1 - \gamma}{2} \Delta_{\nu} u_j &= \gamma \Delta_{\lambda_2} u_{j+1} + \gamma l_1 \Delta_{\lambda_2} u'_{j+1} + \frac{\gamma l_1^2}{2} \Delta_{\lambda_2} u''_{j+1} + \\ &+ \Delta_{\lambda_1} u_{j-1} - l_2 \Delta_{\lambda_1} u'_{j-1} + \frac{l_2^2}{2} \Delta_{\lambda_1} u''_{j-1}, \quad j = 2, 4, 6, 8 \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этой системе при  $j = 1$  функция  $u_{j-1}(x, t)$  должна быть заменена на  $u_8(x, t)$ , а при  $j = 8$  функция  $u_{j+1}(x, t)$  — на  $u_1(x, t)$  в соответствующих точках.

Спектральное уравнение системы (2.12) распадается на четыре следующих:

$$\begin{aligned} \pm \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 (l_1 + l_2)^2 \right] &= \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega - \frac{(1 - \gamma)^2}{2\gamma} \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \quad (2.13) \\ \pm k (l_1 + l_2) &= \cos (\lambda_1 + \lambda_2) \omega - \frac{(1 - \gamma)^2}{2\gamma} \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \end{aligned}$$

Два первых уравнения из (2.13) совпадают с (2.8) и (2.11), а два других являются разложением точного спектрального уравнения (2.3) по  $k$  около точек

$$k = \frac{\pi}{2(l_1 + l_2)}, \quad k = \frac{3\pi}{2(l_1 + l_2)}$$

соответственно.

Итак, при увеличении числа полевых функций, вводимых для смещений однотипных границ двухкомпонентной системы, в длинноволновом приближении уточняется ее спектральная характеристика, причем при удвоении числа полевых функций находим спектральное уравнение около точек

$$k = 0, \quad k = \frac{\pi}{l_1 + l_2}, \quad k = \frac{3\pi}{2(l_1 + l_2)}, \quad k = \frac{\pi}{2(l_1 + l_2)}$$

и других, получаемых делением пополам предшествующих интервалов.

Использованный выше приём удвоения числа частиц, включаемых в макроячейку, непосредственно показывает, что предшествующие диапазоны частот всегда содержатся в последующих, т. е. в пределе истинный спектр точно определяется. Однако, и любой другой метод увеличения числа участков в макроячейке в пределе приведёт к тому же результату.

Установленный факт является основой предлагаемого метода построения моментной теории упругости, как теории, которая при помощи конечного числа полевых функций уточняет обычную макроскопическую картину в усреднённо-однородных и изотропных упругих системах и поликристаллических телах.

Применительно к двухкомпонентному неоднородному стержню полевые уравнения двухчастичной (2.7), четырёхчастичной (2.11) и восьмичастичной (2.14) макроячеек являются системами линейных дифференциальных второго порядка по координатам и конечно-разностных по времени уравнений относительно перемещений внутренних границ. Дальнейшее упрощение этих систем путём разложения по времени с сохранением кубичных членов целесообразно только при достаточно медленном изменении нагрузок или перемещений границ области (концов стержня). В общем же случае это приводит к потере некоторых существенных особенностей частотного спектра системы.

Решение краевых задач для конечного стержня на основании (2.6), (2.10) и (2.12) возможно как при помощи обычного представления Фурье

$$u_j(x, t) = X_j(x) T_j(t)$$

так и преобразования Лапласа — Карсона и других интегральных преобразований, причём во всех случаях существенно используются спектральные уравнения соответственно (2.7), (2.11) и (2.13).

3. Наиболее общий случай одномерной кусочно-однородной периодической упругой среды представляет собой система, состоящая из периодически повторяющихся групп участков (слоев). Приведем полевые уравнения для смещений границ участков внутри группы в длинноволновом приближении, которые получаются при помощи (1.6) аналогично п. 2. Через  $u_j(x, t)$  обозначено полевое смещение, соответствующее истинному смещению левой границы  $j$ -го участка внутри группы из  $n$  участков

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_j + \kappa_{j-1}}{2} \Delta_{\mu_j} u_j - \frac{\kappa_j - \kappa_{j-1}}{2} \Delta_{\nu_j} u_j = \kappa_j \Delta_{\lambda_{j-1}} u_{j+1} + \kappa_j l_j \Delta_{\lambda_{j-1}} u'_{j+1} + \\ & + \frac{\kappa_j l_j^2}{2} \Delta_{\lambda_{j-1}} u''_{j+1} + \kappa_{j-1} \Delta_{\lambda_j} u_{j-1} - \kappa_{j-1} l_{j-1} \Delta_{\lambda_j} u'_{j-1} + \frac{\kappa_{j-1} l_{j-1}^2}{2} \Delta_{\lambda_j} u''_{j-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь для  $j = 1$  функция  $u_{j-1}(x, t)$  должна быть заменена на  $u_n(x, t)$ , а для  $j = n$  функция  $u_{j+1}(x, t)$  — на  $u_1(x, t)$  в соответствующих точках.

В рассматриваемом варианте моментной теории упругости система (3.1) является наиболее общей, так как из нее могут быть получены уравнения для всех частных видов одномерных периодических структур. Действительно, пусть минимальная группа периодически повторяющихся участков состоит из  $m$  участков и пусть введено  $q$  полевых функций для каждого из действительно различных участков; тогда, выбирая  $n = qt$ , получим из (3.1) систему полевых уравнений макроячейки.

В качестве примера рассмотрена неоднородная среда, состоящая из четырех периодически повторяющихся различных слоев, для которой получено следующее

спектральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 2 \cos k (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = & 2 \cos \lambda_1 \omega \cos \lambda_2 \omega \cos \lambda_3 \omega \cos \lambda_4 \omega + (\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_4) \times \\
 & \times \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_2 \omega \sin \lambda_3 \omega \sin \lambda_4 \omega - (\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 \gamma_4) \sin \lambda_2 \omega \sin \lambda_4 \omega \cos \lambda_1 \omega \cos \lambda_3 \omega - \\
 & - (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_2 \gamma_3) \sin \lambda_1 \omega \sin \lambda_3 \omega \cos \lambda_2 \omega \cos \lambda_4 \omega - \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma_i^2 + 1}{\gamma_i} \sin \lambda_i \omega \sin \lambda_{i-1} \omega \times \\
 & \times \cos \lambda_{i+1} \omega \cos \lambda_{i+2} \omega \\
 \gamma_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_4}, \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad \gamma_3 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}, \quad \gamma_4 = \frac{\kappa_4}{\kappa_3} & \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Это уравнение в длинноволновом приближении содержит, очевидно, в качестве частных случаев спектральные уравнения двухкомпонентной среды как для двухчастичной, так и для четырехчастичной макроячеек.

Поступила 3 VIII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
2. И л ь ю ш и н а Е. А. Одна из моделей сплошной среды с учетом микроструктуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
3. Ф р е н к е л ь Я. И. Введение в теорию металлов. М. — Л., Гостехтеориздат, 1950.
4. Г о л ь д м а н И. И., К р и в ч е н к о в В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехтеориздат, 1957.