Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 532.593

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НАД ВОЛНИСТЫМ ДНОМ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Рассматривается задача о плоских установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости над волнистым дном при постоянном вдоль поверхности давлении. Предполагается, что волнистое дно пересекается с вертикальной плоскостью по периодической кривой, называемой линией дна и заданной в форме некоторого бесконечного тригонометрического ряда. Приводится строгое решение задачи, сводящее ее к системе нелинейных интегральных и трансцендентных уравнений. Устанавливается теорема существования и единственности решения этой системы в предположении, что амплитуда линии дна — малая величина. Указывается метод доказательства этой теоремы и дается способ построения решения в любом приближении. Решение строится в виде рядов по степеням малого безразмерного параметра, пропорционального амплитуде первой гармоники линии дна. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

Рассматривается и тот особый случай, когда длина дуги волны линии дна совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока при горизонтальном плоском дне и постоянном давлении вдоль поверхности. В этом случае значение параметра основного интегрального уравнения оказывается равным одному из собственных значений ядра этого уравнения, и решение строится в виде рядов по степеням корня кубического из указанного выше малого параметра.

В работе [1] впервые была рассмотрена аналогичная задача методом Леви — Чивита, сводящим ее к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Однако в этой работе не был исследован указанный выше особый случай. Капиллярно-гравитационные волны над волнистым дном были рассмотрены в работах [2, 3]. В работе [2] только доказана теорема существования решения методами функционального анализа при больших скоростях потока. В работе [3], кроме топологического доказательства существования и единственности решения, указан алгоритм его построения, но расчет приближений только намечен.

В предлагаемой работе в отличие от [3] уравнение линии дна берется в форме, позволяющей представлять любые приближения в виде конечных сумм, и дается исследование основной системы нелинейных интегральных и трансцендентных уравнений аналитическими методами Ляпунова — Шмидта и их развитием.

Рассмотренные здесь и в указанных работах волны обусловлены волнистостью поверхности дна. Если дно обращается в горизонтальную плоскость, то эти волны перестают существовать и течение переходит в равномерный поток. Такие волны назовем вынужденными в отличие от свободных, которые существуют при горизонтальном дне и особых значениях скоростей потока.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление p предполагается постоянным и равным p_0; снизу жидкость считается ограниченной волнистым дном, которое пересекается вертикальной плоскостью течения по некоторой заданной периодической, дважды дифференцируемой кривой L, называемой линией дна. Предполагается, что волнообразная линия L симметрична относительно вертикалей у ее гребней и у середин ее впадин. Предположим, что поток обладает постоянной заданной средней горизонтальной скоростью c при $y = 0$ (см. ниже) и направленной слева направо.

Благодаря периодичности линии дна свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость — c.

Пусть гребень искомой волны и гребень кривой L будут расположены на одной и той же вертикали и пусть волна и линия L обладают симметрией относительно этой вертикали и вертикали линии L у середины ее впадины. Совместим ось y прямоугольной системы координат xy с осью симметрии у гребня и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y с линией L, а ось x направим слева направо по горизонтальной касательной к линии дна. Пусть период по x (или длина волны) линии L равен λ. На протяжении одной волны по середине между двумя гребнями имеется по крайней мере одна впадина (в общем случае на протяжении одной волны может быть несколько гребней и впадин). Предполагается, что линия L имеет горизонтальные касательные в точках $x = 0$ и $x = \pm {}^1/_2\, \lambda$. Будем считать угол с осью x, образованный касательной к линии L, заданным в виде функции $\Theta(s)$ длины дуги s, отсчитываемой от нуля. Положительное направление на касательной выбрано соответствующим увеличению длины дуги s. Через $2l$ обозначим длину дуги линии L за период по x, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \lambda$. При $x = -{}^1/_2\, \lambda$ и $x = {}^1/_2\, \lambda$ длины дуг соответственно равны $s = -l$ и $s = l$. Так как $\Theta(s)$ — непрерывная функция от s, меняющая знак при переходе через вершины гребней и середины впадин, то

$$\Theta(0) = \Theta(l) = \Theta(-l) = 0 \tag{1.1}$$

В силу наложенного условия симметрии имеем

$$\Theta(-l + s) = -\Theta(l - s) \tag{1.2}$$

При эффективном решении задачи понадобится аналитическое выражение для функции $\Theta(s)$. Предполагая наклон линии L малым, будем считать в согласии с условием периодичности и условиями (1.1) и (1.2), что функция $\Theta(s)$ задается в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\Theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \beta_n \sin \frac{n\pi s}{l} \tag{1.3}$$

Здесь ε — малый безразмерный положительный параметр, β_n — заданные действительные числа, причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \beta_n$$

сходится в круге радиуса $\varepsilon_0 > 0$.

Зная функцию $\Theta(s)$, можно получить параметрическое уравнение линии дна в виде

$$x = \int_0^s \cos\Theta(s)\,ds, \qquad y = \int_0^s \sin\Theta(s)\,ds \tag{1.4}$$

При этом, очевидно, λ — длина волны линии L — определяется формулой

$$\lambda = \int_0^{2l} \cos\Theta(s)\,ds \tag{1.5}$$

Из формул (1.3) и (1.5) вытекает, что λ будет следующей известной функцией ε:

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n, \qquad \lambda_0 = 2l, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{\beta_1^2 l}{2}, \qquad \lambda_3 = 0 \tag{1.6}$$

где λ_n $(n = 4, 5, \ldots)$ — полиномы относительно β_i.

Предполагается, что длина искомой установившейся волны над волнистым дном также равна λ.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть: φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathfrak{q}$ на оси координат. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -U + iV, \qquad U = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad V = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Для вывода из граничных условий основных уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальный прямоугольник, ограниченный сверху и снизу волнообразными кривыми, на прямоугольник

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$$

в плоскости w (здесь $\psi = \psi_0$ — расход потока в единицу времени; $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ соответственно при $x = 0$ и $x = \lambda$), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. Последнее отображение, как известно, дается формулой

$$w = \frac{\varphi_0}{2\pi i} \ln u \tag{1.7}$$

При этом отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга единичного радиуса, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0 / \varphi_0)$, меньшего единицы. Кольцо будет иметь разрез вдоль отрезка $(r_0, 1)$.

При решении предполагается, что величина ψ_0 / φ_0 и, следовательно, r_0 заданы и не зависят от ε (см. (1.3)).

Отображение этого кольца плоскости u на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{f(u)}{u} \tag{1.8}$$

Функция $f(u)$, как голоморфная, представляется рядом Лорана внутри рассматриваемого кольца плоскости u. Коэффициенты этого ряда должны быть действительными в силу симметрии волны и линии дна.

Как обычно, вводя функцию [1]

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u) \tag{1.9}$$

в силу (1.7) и (1.8), положив $\varphi_0 = c\lambda$, находим

$$dw/dz = -ce^{\tau - i\Phi} \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу, образуемому вектором скорости $\mathfrak{q}$ с осью x, и что

$$q = |\mathfrak{q}| = ce^{\tau} \tag{1.11}$$

Из (1.9) и (1.8) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \qquad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta \tag{1.12}$$

При определении y предполагается, что начало координат перенесено в вершину гребня волны; в (1.12) $\tau(\eta) = \tau(1, \eta)$, $\Phi(\eta) = \Phi(1, \eta)$.

Формулы (1.12) показывают, что при решении задачи, кроме $\Phi(\theta)$, необходимо найти и $\tau(\theta)$. В силу симметрии искомой волны относительно вертикали гребня, функция $\tau(\theta)$ является четной, а $\Phi(\theta)$ — нечетной. Поэтому их можно представить следующими тригонометрическими рядами:

$$-\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \qquad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \tag{1.13}$$

Из теории аналитических функций известно, что на внешней окружности имеют место следующие соотношения, вытекающие из формул Вилля [4] для кольца и обобщающие соотношения Дини для круга:

$$-\tau(\theta) - A_0 = \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\frac{d\Phi}{d\eta}\,d\eta - 2\int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}\,d\eta$$

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n'}, \qquad N(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n^*}$$

$$\nu_n' = n\frac{r_0^{-n}-r_0^n}{r_0^{-n}+r_0^n}, \quad \nu_n^* = n(r_0^{-n}-r_0^n), \quad \frac{4}{\nu_n^{*2}} = \frac{1}{\nu_n'^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} K_0(\eta,\theta)\frac{d\tau}{d\eta}d\eta + 2\int_0^{2\pi} M(\eta,\theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}d\eta \tag{1.14}$$

$$K_0(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta\sin n\theta}{\nu_n''}, \qquad M(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\sin n\theta}{\nu_n^{**}}$$

$$\nu_n'' = n\frac{r_0^{-n}+r_0^n}{r_0^{-n}-r_0^n}, \quad \nu_n^{**} = n(r_0^n + r_0^{-n}), \quad \nu_n'\nu_n'' = n^2$$

Здесь

$$\tau^*(\theta) = \tau(r_0,\theta), \qquad \Phi^*(\theta) = \Phi(r_0,\theta)$$

В силу симметрии линии дна для этих функций справедливы формулы (1.13), но с другими A_n и B_n $(n = 1, 2, 3,\ldots)$.

Переходя к граничному условию на поверхности, берем для нее интеграл Бернулли

$$p/\rho = C - gy - {}^1/_2 q^2 \tag{1.15}$$

где C — константа, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность. На свободной поверхности разность давлений уравновешивается нормальной составляющей сил поверхностного натяжения. Для этих сил по закону Лапласа имеем

$$p - p_0 = \pm\mu/R \tag{1.16}$$

Здесь p — давление со стороны жидкости, $p_0 = \mathrm{const}$ — давление со стороны свободной поверхности, μ — капиллярная постоянная, R — радиус кривизны в точках поверхности.

Отсюда, выражая кривизну через $d\Phi/d\theta$, получим

$$p - p_0 = \frac{2\pi\mu}{\lambda c}q\frac{d\Phi}{d\theta} \tag{1.17}$$

Подставив p из (1.17) в (1.15), находим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left[\delta e^{-\tau} - e^{\tau} - \frac{2\pi}{\lambda}\varkappa y e^{-\tau}\right] \tag{1.18}$$

$$\nu = \frac{\lambda c^2\rho}{4\pi\mu}, \qquad \delta = \frac{2(C\rho - p_0)}{\rho c^2}, \qquad \varkappa = \frac{g\lambda}{\pi c^2} \tag{1.19}$$

Здесь y определяется второй формулой (1.12). Выделив в правой части (1.18) слагаемые, линейные относительно Φ и τ, получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu\left\{\delta - 1 - (\delta+1)\tau + \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)d\eta + F[\tau,\Phi,\delta]\right\} \tag{1.20}$$

$$F[\tau,\Phi,\delta] = \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^{\tau} - 1 - \tau) +$$
$$+ \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta) - \Phi(\eta)]\,d\eta +$$
$$+ \varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta - \varkappa\int_0^\theta \Phi(\eta)\,d\eta \tag{1.21}$$

Уточним значения параметров в уравнении (1.20). Из (1.19) и (1.6) следует, что

$$\nu = \nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n, \quad \nu^{(0)} = \frac{c^2 \rho \lambda_0}{4\pi\mu}, \quad \nu^{(n)} = \frac{\nu^{(0)}}{\lambda_0} \lambda_n$$

$$\varkappa = \varkappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n, \quad \varkappa_0 = \frac{g\lambda_0}{\pi c^2}, \quad \varkappa_n = \frac{\varkappa_0}{\lambda_0} \lambda_n \tag{1.22}$$

В силу (1.22) уравнение (1.20) примет вид

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu^{(0)} \Big\{ \delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \varkappa_0 \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta + F[\tau, \Phi, \delta] \Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n \{ \quad \} \tag{1.23}$$

Здесь опущенное выражение во второй фигурной скобке должно быть таким же, как и в первой. Линейные относительно функций и параметра ε слагаемые в фигурных скобках (1.23) преобразуем, применяя формулы (1.14) и интегрирование по частям. Затем в первой фигурной скобке объединяем слагаемые с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi / d\eta$ и с разными ядрами $K(\eta, \theta)$ и $K_2(\eta, \theta)$ из (1.26). Скорость c считается заданной, поэтому параметры $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ являются фиксированными, а δ определяется из условия периодичности: $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$.

В правую часть уравнения (1.23) входит параметр ε, поэтому решение и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положим

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon) \tag{1.24}$$

Из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$ найдем, что $\delta_0 = 1$, так как при этом величина $\delta'(\varepsilon)$, а также решение стремятся к нулю.

После всех преобразований с учетом (1.24) уравнение (1.23) примет окончательный вид

$$\zeta(\theta) = \nu^{(0)} \Big\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \delta'(\varepsilon) -$$

$$- 2(2 + \delta'(\varepsilon)) \int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)\, \zeta^*(\eta)\, d\eta + (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0(\varepsilon) +$$

$$+ \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta + F[\tau, \Phi, 1 + \delta'(\varepsilon)] \Big\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n \Big\{ 2 \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta -$$

$$- \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta + \ldots \Big\} \tag{1.25}$$

(многоточие во второй фигурной скобке заменяет семь последних членов, таких же, как и в первой фигурной скобке).

Здесь

$$\zeta(\theta) = d\Phi / d\theta, \quad \zeta^*(\theta) = d\Phi^* / d\theta$$

$$K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2}, \qquad K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta)\varphi_n(\theta)}{\nu_n}$$

$$\nu_n = \frac{n^2}{2\nu_n'' - \varkappa_0}, \qquad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} \tag{1.26}$$

где ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$.

Условие периодичности для функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon) = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\zeta(\eta)\, d\eta -$$

$$-(2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi\nu^{(0)}} \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)}\varepsilon^n \left\{ \left[\delta'(\varepsilon) + (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\zeta(\eta)\, d\eta \right] 2\pi + \int_0^{2\pi} \Psi(\theta, \varepsilon)\, d\theta \right\} \tag{1.27}$$

где

$$\Psi(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n \int_0^{\theta} \Phi(\eta)\, d\eta + F[\tau, \Phi, 1 + \delta'(\varepsilon)] \tag{1.28}$$

Обратимся к граничному условию на волнистом дне при $r = r_0$. Очевидно, должно выполняться условие обтекания дна. Согласно принятым обозначениям и в силу формулы (1.3), это условие примет вид

$$\Phi^*(\theta) = \Theta[s(\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \beta_n \sin \frac{n\pi s(\theta)}{l} \tag{1.29}$$

Для представления этого граничного условия в окончательной форме надо найти при рассматриваемом конформном отображении зависимость длины дуги s на линии дна от угла θ на плоскости кольца, т. е. найти функцию $s(\theta)$.

Напомним, что при $r = r_0$

$$dz = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau^*(\theta) + i\Phi^*(\theta)} d\theta$$

Отсюда

$$ds = |dz| = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau^*(\theta)} d\theta \tag{1.30}$$

Для того чтобы отрицательным приращениям углов θ отвечали положительные приращения дуг s, в формуле (1.30) приписан знак минус.

Из (1.30) имеем

$$s(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau^*(\eta)}d\eta \tag{1.31}$$

Коэффициент $A_0(\varepsilon)$ выбираем из того условия, чтобы длина дуги линии дна, отвечающая периоду, равнялась заданной величине $2l$. Согласно (1.31), это условие выражается формулой

$$2l = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{-2\pi} e^{-\tau^*(\eta)}d\eta$$

или

$$2le^{-A_0(\varepsilon)} = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{-2\pi} e^{-\tau^*(\eta)-A_0(\varepsilon)}d\eta$$

или

$$2le^{-A_0(\varepsilon)} = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\tau^*(-\eta)-A_0(\varepsilon)}d\eta \tag{1.32}$$

при этом $-\tau^*(-\eta)-A_0(\varepsilon)$, в силу (1.13) для τ^* и Φ^*, не содержит $A_0(\varepsilon)$.

Отсюда вытекает, что разложение $s(\theta)$ по степеням ε

$$s(\theta) = s_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n s_n(\theta) \tag{1.33}$$

содержит единственный вековой член

$$s_0(\theta) = -l\pi^{-1}\theta \tag{1.34}$$

и, следовательно

$$s(\theta) = -\frac{l}{\pi}\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n s_n(\theta) = -\frac{l}{\pi}\theta + s'(\theta) \tag{1.35}$$

Дифференцируя (1.29) по θ и учитывая (1.35), представляем граничное условие на дне в окончательном виде

$$\begin{gathered}\zeta^*(\theta) = -\varepsilon\beta_1\cos\theta + \\ + \varepsilon\beta_1\left\{-\left[\cos\theta\left(\cos\frac{\pi}{l}s'(\theta)-1\right)+\sin\theta\sin\frac{\pi}{l}s'(\theta)\right]+\right. \\ \left.+\frac{\pi}{l}\left[\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{l}s'(\theta)\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{l}s'(\theta)\right)\right]\frac{ds'(\theta)}{d\theta}\right\}+ \\ +\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi s(\theta)}{l}\frac{ds(\theta)}{d\theta}\end{gathered} \tag{1.36}$$

Функция $\tau^*(\theta)$ в уравнении (1.31) определяется по формуле

$$-\tau^*(\theta) - A_0 = -\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}d\eta + 2\int_0^{2\pi}N(\eta,\theta)\frac{d\Phi}{d\eta}d\eta \tag{1.37}$$

Эта формула выводится аналогично первой из формул (1.14).

Таким образом, задача сводится к определению функций

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \frac{d\Phi}{d\theta}, \quad \zeta^*(\theta, \varepsilon) = \frac{d\Phi^*}{d\theta}, \quad s(\theta, \varepsilon)$$

и констант $\delta = 1 + \delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ из системы уравнений (1.25), (1.27), (1.31), (1.32) и (1.36). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$ и $\tau^*(\theta, \varepsilon)$ найдутся из (1.14) и (1.37), а

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta \zeta(\eta, \varepsilon)\, d\eta, \quad \Phi^*(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta \zeta^*(\eta, \varepsilon)\, d\eta \tag{1.38}$$

Если в этой системе $\tau(\theta)$ и $\tau^*(\theta)$ исключить с помощью формул (1.14) и (1.37), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\Phi^*(\theta, \varepsilon)$ представить в виде (1.38), то уравнения (1.25), (1.31) и (1.36) будут нелинейными интегральными уравнениями относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$ $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $s(\theta, \varepsilon)$; уравнения (1.27) и (1.32) станут трансцендентными относительно $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ с функционалами относительно искомых функций. Однако, если учесть последовательность определения приближений при решении, то естественно рассматривать как нелинейное интегральное только уравнение (1.25) относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$; остальные же принять за нелинейные трансцендентные уравнения относительно функций $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$ и $s(\theta, \varepsilon)$ и констант $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ с линейными операторами и функционалами относительно искомых функций.

При решении приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu^{(0)} \neq \nu_n$, во втором — $\nu^{(0)} = \nu_n$. В первом случае решение строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях для коэффициентов разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получаются линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)}$. Для коэффициентов разложений остальных искомых величин получается всегда разрешимая система линейных алгебраических уравнений. В п. 2 проводится исследование при $\nu^{(0)} = \nu_n$ уравнений для первых коэффициентов этих разложений.

Отметим еще предельные значения искомых величин при $\varepsilon \to 0$.

Граничные условия и уравнения задачи при $\varepsilon \to 0$ будут удовлетворены, если положить

$$\tau(r, \theta) \equiv 0, \ \ \Phi(r, \theta) \equiv 0, \ \ \delta = 1, \ A_0 = 0$$

Из (1.6) и (1.33) следует, что

$$\lim \lambda = \lambda_0 = 2l, \qquad \lim s(\theta) = -\frac{l}{\pi}\theta \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

Механический смысл этого предельного решения состоит в том, что имеет место равномерный поток над горизонтальным дном с горизонтальной свободной поверхностью. При этом длина области плоскости z, в которую переходит внутренность кольца, равна $\lambda_0 = 2l$, а скорость в силу (1.11) равна c.

2. Решение линейной задачи. 2.1. *Решение линейной задачи при* $\nu^{(0)} = \nu_n$ *и исследование ядра интегрального уравнения* (1.25). Строя решения уравнений (1.25) и (1.27) в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, получаем

$$\zeta_1(\theta) = \nu^{(0)} \left[\int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\, \zeta_1(\eta)\, d\eta + \delta_1 + 2A_{01} + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta_1(\eta)\, d\eta \right] \quad (2.1)$$

$$\delta_1 = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\, \zeta_1(\eta)\, d\eta - 2A_{01} \quad (2.2)$$

К такой же системе придем, если считать $\zeta^*(\theta) \equiv 0$ в (1.25) и (1.27) как для свободной волны при плоском дне, и ограничиться линейными слагаемыми.

Исключив δ_1 из (2.2) и (2.1) и отбросив индекс, получаем

$$\zeta(\theta) = \nu^{(0)} \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta \quad (2.3)$$

Это уравнение является линейным однородным уравнением Фредгольма второго рода, поэтому по второй теореме Фредгольма оно имеет отличное от нуля решение при $\nu^{(0)} = \nu_n$, где ν_n — собственные значения ядра $K^*(\eta, \theta)$. С другой стороны, в силу (1.22) параметр $\nu^{(0)} > 0$, а ν_n, согласно (1.26), зависит от n и $\varkappa_0$. Параметр $\varkappa_0$ считается фиксированным. Поэтому надо исследовать зависимость ν_n от n при фиксированном $\varkappa_0$.

Такое исследование подробно проведено в работе [5], поэтому ниже приведем только результаты этого исследования.

Будем теперь считать n фиксированным и исследуем связь между $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$, при которой имеется отличное от нуля решение уравнения (2.3). Положив $\nu^{(0)} = \nu_n$, имеем из (1.26)

$$\frac{1}{\nu^{(0)}} = \frac{1}{n^2}(2\nu_n'' - \varkappa_0) \quad (2.4)$$

Подставив сюда значения $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ из (1.22), получаем известную зависимость между c^2 и λ_0

$$c^2 = \left(\frac{2\pi\mu n}{\lambda_0 \rho} + \frac{g\lambda_0}{2\pi n}\right) \operatorname{th}\left(2\pi n \frac{h}{\lambda_0}\right) \quad (2.5)$$

Соотношения (2.4) и (2.5) также подробно исследованы в работе [5].

Приведем здесь только результаты исследования решения линейной задачи, формулируя их в виде следующих теорем.

Теорема 2.1. Пусть

$$\frac{1}{\nu^{(0)}} = \frac{1}{n^2}(2\nu_n'' - \varkappa_0)$$

где n — фиксированное целое положительное число. Тогда при всех $\varkappa_0$ в интервале $0 < \varkappa_0 < 2\nu_n''$ уравнение (2.3) имеет единственное нетривиальное решение

$$\zeta(\theta) = C_1 \varphi_n(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta$$

Если

$$\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)} = \frac{2(m^2\nu_n'' - n^2\nu_m'')}{m^2 - n^2}$$

(m — целое положительное число), то частным нетривиальным и линейно независимым от $\varphi_n(\theta)$ решением будет также

$$\zeta(\theta) = C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta$$

и общим решением будет

$$\zeta(\theta) = C_1\varphi_n(\theta) + C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}} \cos m\theta$$

Значения $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ назовем бифуркационными, а волны, отвечающие значениям $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ и определяемые решением в виде суммы из двух гармоник,— двойными. Соответствующее собственное значение $\nu_n = \nu_m$ является при $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ двукратным.

Теорема 2.2. Кривая $c^2 = c^2(\lambda_0)$, изображающая уравнение (2.5), имеет вертикальную асимптоту $\lambda_0 = 0$ и горизонтальную $c^2 = gh$. В первом квадранте находится значение $c^2_{\min}$, отвечающее $\lambda_0 = \lambda_0{}^*$, где $\lambda_0{}^*$ — положительный корень некоторого трансцендентного уравнения. Назвав соответствующее значение $\varkappa_0 = \varkappa_0{}^*$ критическим, из (1.22) имеем

$$\varkappa_0{}^* = \frac{g\lambda_0{}^*}{\pi c^2_{\min}}$$

Ветвь кривой $c^2 = c^2(\lambda_0)$, отвечающая $0 < \lambda_0 < \lambda_0{}^*$ или $0 < \varkappa_0 < \varkappa_0{}^*$, соответствует волнам, названным капиллярно-гравитационными. При $\lambda_0 > \lambda_0{}^*$ или $\varkappa_0{}^* < \varkappa_0 < 2\nu_n''$ имеют место волны, названные гравитационно-капиллярными.

Теорема 2.3. При $\varkappa_0 = 0$ уравнение (2.3) переходит в уравнение

$$\zeta(\theta) = 2\nu^{(0)} \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\, \zeta(\eta)\, d\eta$$

для чисто капиллярных волн, которое при фиксированном $2\nu^{(0)} = \nu_n'$ имеет единственное нетривиальное решение $\zeta(\theta) = (C_1 / \sqrt{\pi}) \cos n\theta$ (n — целое положительное число).

Теорема 2.4. При $\varkappa_0 = 2\nu_n''$ надо положить $1 / \nu^{(0)} = 0$ (следовательно, $\mu = 0$). Тогда вместо уравнения (2.3) приходим к уравнению

$$\tau + A_0 = \nu_n'' \int_0^{2\pi} K_{01}(\eta, \theta)(\tau + A_0)\, d\eta$$

где

$$K_{01}(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{\nu_n''}$$

или

$$\Phi(\theta) = \nu_n'' \int_0^{2\pi} K_0(\eta, \theta)\, \Phi(\eta)\, d\eta$$

для чисто гравитационных волн, которые имеют соответственно единственные нетривиальные решения

$$\tau(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta, \qquad \Phi(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta$$

при фиксированном целом n. (Здесь учтено, что $A_0 = 0$ в линейном приближении.)

2.2. *О решении линейной задачи в случае* $\nu^{(0)} \neq \nu_n$. Для исследования в линейном приближении возможных форм свободной поверхности в зависимости от скорости распространения волны предположим линию дна заданной в виде

$$\Theta(s) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi s}{l} \tag{2.6}$$

Тогда

$$\zeta^*(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\zeta_1^*(\theta) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cos i\theta \tag{2.7}$$

Функция $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается как решение соответствующего линейного неоднородного интегрального уравнения при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ и имеет вид

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon 4\nu^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \nu_i}{\nu_i^*(\nu_i - \nu^{(0)})} \cos i\theta \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8), интегрируя, находим

$$\Phi^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i} \sin i\theta \tag{2.9}$$

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \varepsilon 4\nu^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \nu_i}{i\nu_i^*(\nu_i - \nu^{(0)})} \sin i\theta \tag{2.10}$$

Обозначим через c_i скорость волны, определяемую формулой (2.6) при $i = n$. Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} \nu_i - \nu^{(0)} > 0 \quad \text{при } c < c_i \\ \nu_i - \nu^{(0)} < 0 \quad \text{при } c > c_i \end{aligned} \tag{2.11}$$

Так как ν_i и ν_i^* — положительные величины, то знаки коэффициентов у слагаемых в (2.10) определяются знаками величин $\beta_i / (\nu_i - \nu^{(0)})$. Из (2.11) вытекает, что коэффициенты у соответствующих слагаемых в (2.9) и (2.10) будут иметь разные знаки при $c < c_i$ и одинаковые при $c > c_i$.

Применяя неравенства (2.11) к анализу выражений (2.9) и (2.10), приходим к следующему результату.

Если для скорости c выполняется неравенство $c_{2n-1} < c < c_{2n}$, то над гребнями и впадинами линии дна лежат соответственно гребни и впадины свободной поверхности; если же $c_{2n} < c < c_{2n+1}$, то над гребнями и впадинами линии дна, наоборот, расположены впадины и гребни волны на свободной поверхности. При этом предполагается, что главным слагаемым, определяющим форму линии дна, является первое слагаемое в формуле (2.9).

Относительно исследования решения линейной задачи при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ и линии дна в виде ряда (1.3) см. п. 4, замечание 4.3 (см. также [1], стр. 380).

3. Решение основных уравнений задачи. Как уже отмечено в конце п. 1, при решении уравнений (1.25), (1.27), (1.31), (1.32) и (1.36) приходится рассматривать два случая: в первом случае $\nu^{(0)} \neq \nu_n$, во втором — $\nu^{(0)} = \nu_n$. В обоих случаях укажем метод построения решения; в первом случае приведем результат определения первых трех приближений. Во втором случае в качестве примера рассмотрено значение $\nu^{(0)} = \nu_1$. При этом параметр $\varkappa_0$ выбран так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным. До конца рассчитаны первые два приближения. Третье приближение определено не полностью. В случае $\nu^{(0)} = \nu_n = \nu_m$ $(n \neq m)$ укажем только метод построения решения.

3.1. *Случай* $\nu^{(0)} \neq \nu_n$. Как уже было отмечено, в этом случае решение строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)}$. Все эти уравнения последовательно решаются по первой теореме Фредгольма. Для коэффициентов разложения остальных искомых величин получается система линейных алгебраических уравнений. Из этой, всегда разрешимой, системы получаются явные выражения для коэффициентов данного приближения через величины, найденные в предшествующих приближениях.

Приводим выражения для $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$, определенные по первым трем приближениям

$$\begin{gathered}\zeta^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon\beta_1\cos\theta - \varepsilon^2 D_{22}\cos 2\theta - \varepsilon^3(D_{13}\cos\theta + D_{33}\cos 3\theta)\\ \zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon C_{11}\cos\theta + \varepsilon^2 C_{22}\cos 2\theta + \varepsilon^3(C_{13}\cos\theta + C_{33}\cos 3\theta) \qquad (3.1)\\ \delta'(\varepsilon) = -\varepsilon\varkappa_0 C_{11} - \varepsilon^2\left(\frac{1}{4}\varkappa_0 C_{22} + 2A_{02} + \frac{1}{4}\varkappa_0 C_{11}E_{11}\right) + \varepsilon^3\delta_3'\\ A_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 A_{02} = -\frac{1}{4}\varepsilon^2\left[\left(\frac{\beta_1}{\nu_1'} + \frac{2}{\nu_1^*}C_{11}\right)^2 - \beta_1^2\right]\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}C_{11} = \frac{4\beta_1\nu^{(0)}\nu_1}{\nu_1^*(\nu_1 - \nu^{(0)})}, \quad C_{22} = \frac{\nu^{(0)}\nu_2}{\nu_2 - \nu^{(0)}}\left(\frac{4}{\nu_2^*}D_{22} + \frac{3}{4}\varkappa_0 C_{11}E_{11}\right)\\ D_{22} = 2\beta_1\left(\frac{\beta_1}{\nu_1'} + \frac{2}{\nu_1^*}C_{11}\right) + 2\beta_2, \quad E_{11} = -\left(\frac{1}{\nu_1'}C_{11} + \frac{2\beta_1}{\nu_1^*}\right) \qquad (3.2)\\ E_{22} = -\left(\frac{1}{\nu_2'}C_{22} + \frac{2}{\nu_2^*}D_{22}\right), \quad C_{13} = \frac{\nu^{(0)}\nu_1}{\nu_1 - \nu^{(0)}}C_{13}^*, \quad C_{33} = \frac{\nu^{(0)}\nu_3}{\nu_3 - \nu^{(0)}}C_{33}^*\end{gathered}$$

Здесь C_{13}^* — линейная функция от C_{11}^3, $C_{11}^2\beta_1$, $C_{11}\beta_1^2$, $C_{11}C_{22}$, $C_{22}\beta_1$, β_1^3, $C_{11}\beta_2$, $\beta_1\beta_2$; D_{13} — линейная функция от тех же аргументов, что и C_{13}^*, кроме C_{11}^3; C_{33}^* — линейная функция от тех же аргументов, что и C_{13}^* и еще от β_3; D_{33} — линейная функция от тех же аргументов, что и C_{33}^*, кроме C_{11}^3; δ_3' — линейная функция от C_{13}, C_{33}, C_{11}^3, $C_{11}^2\beta_1$, $\beta_1^2 C_{11}$, $C_{11}E_{11}^2$, $C_{11}E_{22}$, $E_{11}C_{22}$.

3.2. *Случай* $\nu^{(0)} = \nu_1$. В этом случае при построении решения в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/3}$ для первого коэффициента разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное однородное уравнение Фредгольма второго рода при значении $\nu^{(0)} = \nu_1$. Оно решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для всех последующих коэффициентов будут такими же, но неоднородными и при том же значении параметра $\nu^{(0)} = \nu_1$. Эти уравнения решаются по третьей теореме Фредгольма. Из условия разрешимости уравнения для $(n + 2)$-го приближения определяется коэффициент в решении однородного уравнения n-го приближения.

Каждый из коэффициентов C_{11}, C_{12} и C_{13} последовательно определяется из соответствующего условия разрешимости уравнения для третьего, четвертого и пятого приближения. Коэффициент C_{13} не вычислен, так как пятое приближение не определялось. Коэффициенты разложений остальных искомых величин определяются аналогично случаю $\nu^{(0)} \neq \nu_n$.

Приводим выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$, найденные по первым трем приближениям

$$\zeta^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon\beta_1 \cos\theta$$

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} C_{11} \cos\theta + \varepsilon^{2/3} C_{22} \cos 2\theta + \varepsilon (C_{13} \cos\theta + C_{33} \cos 3\theta) \tag{3.3}$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon^{1/3}\varkappa_0 C_{11} + \varepsilon^{2/3}\left[C_{11}^2\left(\frac{2}{\nu_1*^2} + \frac{\varkappa_0}{\nu_1'}\right) - \frac{1}{4}\varkappa_0 C_{22}\right] + \varepsilon\delta_3'$$

$$A_0(\varepsilon) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{2/3}\left(\frac{1}{\nu_1'^2} - 1\right)C_{11}^2$$

где

$$C_{11} = -\beta_1^{1/3}\alpha_1^{1/3}, \quad \alpha_1 = \frac{64\nu_1'^2(\nu_2 - \nu_1)(1 - \nu_1'^2)^{1/2}}{(\nu_2 - \nu_1)[8(3 - 2\nu_1'^2) + 12\varkappa_0\nu_1'(1 - \nu_1'^2)] + 9\varkappa_0^2\nu_1\nu_2\nu_1'}$$

$$C_{22} = -\frac{3}{4}\frac{\nu_1\nu_2\varkappa_0}{\nu_1'(\nu_2 - \nu_1)}C_{11}^2, \quad C_{33} = \frac{\nu_1\nu_3}{\nu_3 - \nu_1}C_{33}^* \tag{3.4}$$

Здесь C_{33}^* — линейная функция от C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$; δ_3' — линейная функция от C_{13}, C_{33}, C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$; коэффициент $C_{12} = 0$.

Напомним, что в обоих случаях $\tau(\theta, \varepsilon)$ и $\tau^*(\theta, \varepsilon)$ найдутся из (1.14) и (1.37), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\Phi^*(\theta, \varepsilon)$ — из (1.38).

3.3. *Случай* $\nu^{(0)} = \nu_n = \nu_m$ $(n \neq m)$. В этом случае решение строится аналогично случаю $\nu^{(0)} = \nu_n$. Отличие состоит в том, что решение однородного интегрального уравнения в каждом i-м приближении будет содержать сумму $C_{in}\cos n\theta + C_{im}\cos m\theta$. Коэффициенты C_{in} и C_{im} в общем случае определятся из условий разрешимости уравнения для $(i+2)$-го приближения.

4. Определение профиля волны. Профиль волны в параметрической форме $x(\theta, \varepsilon)$ и $y(\theta, \varepsilon)$ определяется из соотношений (1.12). Перейдя к безразмерным координатам x/λ и y/λ, не меняя обозначений, и после подстановки найденных $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\tau(\theta, \varepsilon)$ получим параметрические уравнения профиля. Исключая из параметрических уравнений θ, найдем уравнение профиля волны в форме $y = y(x, \varepsilon)$.

Приводим приближенные с точностью до членов третьего порядка уравнения профиля волны в обоих случаях, положив $2\pi = k$.

В случае $\nu^{(0)} \neq \nu_n$

$$\begin{aligned}
y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k}\Big\{&\varepsilon C_{11}(\cos kx - 1) + \frac{1}{4}\varepsilon^2(C_{22} - E_{11}C_{11})(\cos 2kx - 1) + \\
&+ \frac{1}{6}\varepsilon^3\left[6C_{13} + \frac{3}{8\nu_1'^2}(3\nu_1'^2 - 4)C_{11}^3 - 6\frac{\beta_1}{\nu_1'\nu_1*}C_{11}\left(C_{11} - \frac{\beta_1}{\nu_1'\nu_1*}\right) + \right.\\
&\left. + \frac{3}{8}C_{11}E_{11}^2 - \frac{3}{2}C_{11}E_{22} + 3C_{22}E_{11}\right](\cos kx - 1) + \\
&+ \frac{1}{6}\varepsilon^3\left[\frac{2}{3}C_{33} - \frac{7}{24}C_{11}^3 + \frac{5}{8}C_{11}E_{11}^2 - \frac{1}{2}C_{11}E_{22} - C_{22}E_{11}\right](\cos 3kx - 1)\Big\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь коэффициенты C_{ij} и E_{ij} выражаются формулами (3.2).

В случае $\nu^{(0)} = \nu_1$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k}\left\{\varepsilon^{1/3}C_{11}(\cos kx - 1) + \frac{1}{4}\varepsilon^{2/3}\left(C_{22} - \frac{1}{\nu_1'}C_{11}^2\right)(\cos 2kx - 1) + \right.$$
$$+ \frac{1}{6}\varepsilon\left[6C_{13} + \frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{\nu_1'^2}\right)C_{11}^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\nu_1'} - \frac{1}{\nu_2'}\right)C_{11}C_{22}\right](\cos kx - 1) +$$
$$\left. + \frac{1}{6}\varepsilon\left[\frac{2}{3}C_{33} + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{\nu_1'^2} - \frac{7}{3}\right)C_{11}^3 - \left(\frac{1}{\nu_1'} + \frac{1}{2\nu_1'}\right)C_{11}C_{22}\right](\cos 3kx - 1)\right\} \quad (4.2)$$

Здесь коэффициенты C_{ij} определяются формулами (3.4).

Замечание 4.1. Так как $\zeta_1^*(\theta) = -\beta_1 \cos\theta$, то коэффициент при главном члене в разложении $\Phi^*(\theta, \varepsilon)$ имеет вид

$$\Phi_1^*(\theta) = -\beta_1 \sin\theta \quad (4.3)$$

По предположению, начало координат расположено в гребне волны линии дна и при конформном отображении начало координат переходит в точку $r = r_0$ и $\theta = 0$. Поэтому положительным значениям θ должны отвечать значения $\Phi_1^*(\theta) > 0$. Следовательно, надо принять $\beta_1 < 0$. При этом угол $\Phi_1(\theta) = C_{11}\sin\theta$ также будет положительным, так как принимаем, что $\nu_1 < \nu^{(0)} < \nu_2$ и C_{11} выражается первой из формул (3.2).

Замечание 4.2. Если $\nu^{(0)} = \nu_n$ — собственному значению ядра интегрального уравнения, то это и будет тот особый случай, который отмечен в начале статьи. Действительно, при $\nu^{(0)} = \nu_n$ из формул (1.22) и (1.26) имеем выражение (см. формулу (2.5)), связывающее в линейном приближении c и λ_0 в указанном особом случае.

Замечание 4.3. В случае $\nu^{(0)} \neq \nu_1$ и линии дна в виде ряда (1.3) исследование решения линейной задачи проводится аналогично п. 2, 2.2 и соответствует значению $n = 1$. Для учета последующих гармоник следует в первом члене ряда (1.3) к первой гармонике добавить сумму n гармоник порядков i ($i = 2, 3, \ldots, n$).

Если считать, что решение линейной задачи определяет главные слагаемые полного решения, то результат исследования п. 2, 2.2, можно применить и к рассмотрению решения нелинейной задачи.

5. Существование и единственность решения задачи. Применяя методы Ляпунова — Шмидта и их развитие [6], устанавливаем следующие теоремы

Теорема 5.1. Система уравнений (1.25), (1.27), (1.31), (1.32) и (1.36) при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) решение $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $s(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ ($\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) - 1$) и это решение является аналитической функцией ε при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Теорема 5.2. Система уравнений (1.25), (1.27), (1.31), (1.32) и (1.36) при $\nu^{(0)} = \nu_1$, где ν_1 — простое и положительное собственное значение, имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) решение $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $s(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ и это решение представимо в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, сходящихся при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Доказательства этих теорем проводятся аналогично тому, как это выполнено в работах [7, 8].

Из этих теорем вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\tau(\theta, \varepsilon)$, $\Phi^*(\theta, \varepsilon)$ и $\tau^*(\theta, \varepsilon)$. Сходимость рядов по степеням ε и $\varepsilon^{1/3}$ (при $\nu^{(0)} = \nu_1$) для подынтегральных функций в (1.12) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается и сходимость рядов, приближенные суммы которых выражаются формулами (4.1) и (4.2).

Поступила 26 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном. В сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды (Тр. Междунар. симпоз., Тбилиси, 1963), т. 2. М., «Наука», 1965.
2. Hilbig H. Existenzbeweis für Potentialströmungen längs eines Kanals mit welliger Kanalsohle unter Einfluss der Schwerkraft und der Oberflächenspannung. Arch. Rat. Mech. Anal., 1965, Bd 18, Nr 5, S 397—402.
3. Zeidler Eberhard. Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben. Funktionalanalytische Untersuchungen über eine Klasse nichtlinearer hydrodymischer Probleme. Schriftenr. Inst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1971, AN° 9, XII, S. 222, ill.
4. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
5. Секерж-Зенькович Я. И. Об установившихся капиллярно-гравитационных вынужденных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104).
7. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
8. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн. В кн.: М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.