Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Делается попытка распространить локальную теорию малого параметра Ляпунова — Пуанкаре на кусочно-непрерывные системы общего вида. Задача сводится к исследованию бесконечной упорядоченной последовательности непрерывных динамических систем, которая при изучении движений с заданным порядком переключений в определенном смысле аналогична исходной кусочно-непрерывной системе. Решения строятся в виде рядов по степеням малого параметра, причем здесь последовательные приближения к моментам переключения в отличие от [1] находятся после построения соответствующих приближений к истинному решению. Условия существования и устойчивости в малом периодических решений получены в форме, которая близка к приведенной в монографии [2].

В отличие от метода точечных отображений [3] предлагаемый метод не связан с интегрированием точных уравнений движения внутри интервалов непрерывности и с рассмотрением получаемой после такого интегрирования функции последования [1]. Отметим, что в частном случае, когда порядок системы в ходе переключений не меняется, а уравнения переключений не зависят от параметра, приведенные ниже условия существования переходят в полученные ранее в работе [4].

1. Постановка задачи. О дифференцировании решения по параметру. Рассмотрим бесконечную упорядоченную последовательность динамических систем

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = X_i(x_i, t, \mu), \qquad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

где x_i — вектор $k_i \times 1$. Будем предполагать, что если x_i принадлежит некоторой области G_i собственного фазового пространства, а $0 < \mu < \mu_0$, то вектор-функция X_i, $k_i \times 1$ аналитична по всем своим аргументам и определяемые в соответствии с (1.1) интегральные траектории в некоторый момент $t = t_{i+1}$ впервые пересекают гиперповерхность

$$g_{i+1}(x_i, t, \mu) = 0 \tag{1.2}$$

В этот момент времени предполагается наличие строгого соответствия между динамическими состояниями i-й и $i+1$-й систем, характеризуемое равенством

$$x_{i+1} = \Phi_{i+1}(x_i, t, \mu) \tag{1.3}$$

причем $x_{i+1} \in G_{i+1}$. Здесь скалярная g_{i+1} и k_{i+1}-мерная вектор-функция Φ_{i+1} также аналитичны внутри G_i по всем своим аргументам.

Предположим, наконец, что существует положительное натуральное число n, гарантирующее выполнение равенств

$$\begin{gathered} k_i \equiv k_{i+n}, \qquad X_i(x_i, t, \mu) \equiv X_{i+n}(x_i, t+T, \mu) \\ g_{i+1}(x_i, t, \mu) \equiv g_{i+n+1}(x_i, t+T, \mu) \\ \Phi_{i+1}(x_i, t, \mu) \equiv \Phi_{i+n+1}(x_i, t+T, \mu) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где T — некоторая положительная постоянная.

Решение последовательных непрерывных систем (1.1) при условиях (1.2) и (1.3) позволяет судить о качественно определенных движениях соответствующей кусочно-непрерывной системы переменной структуры с n существенно различными переключениями. Вектор x, определяющий положение кусочно-непрерывной системы при таком движении в произвольный момент времени, имеет число компонент, зависящее от номера i интервала непрерывности, и равен

$$x = x_i, \quad t_i < t < t_{i+1}, \qquad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{1.5}$$

Решение вопроса о соответствии одно другому отдельных компонент векторов x_i и x_{i+1} всегда очевидно из соображений физического характера.

Для дальнейшего существенно, что в отличие от x вектор x_i не претерпевает разрыва в моменты t_i и t_{i+1} и непрерывен, вообще говоря, при любом действительном t.

Пусть среди чисел $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ наименьшим является k_0 $(k_0 \leqslant k_i)$. Тогда постановка начальных условий

$$g_0 |_{t=t_*} = a(\mu) \qquad (a \in G) \tag{1.6}$$

где момент t_*, возможно, находится и вне интервала (t_0, t_1), позволяет однозначно определить кусочно-непрерывное решение x (см. (1.5)) при любом вещественном t. Задание в начальный момент t_* некоторого вектора x_j, такого, что $k_j > k_0$, не позволяет вследствие необратимости (1.3) продолжить x в сторону уменьшения t дальше некоторого $t_l < t_j$, для которого впервые $k_{l-1} < k_l$. Подсемейство продолжимых в обе стороны по t решений (1.1), которые определяются начальными условиями типа (1.6), очевидно, включает в себя все T-периодические решения, которые в силу (1.5) удовлетворяют равенствам

$$x_i(t, \mu) = x_{i+n}(t + T, \mu) \tag{1.7}$$

Отметим, что все прочие решения с ростом t по истечению конечного интервала приходят в упомянутое подсемейство.

Далее, используя аппарат обобщенных функций [5], уравнения движения последовательных динамических систем будем записывать в форме

$$x_i^{\cdot} = F_i(x_i, x_{i-1}, t, \mu), \qquad F_i = X_i \sigma(g_i) + \Phi_i \sigma^{\cdot}(g_i) \tag{1.8}$$

Здесь $\sigma(g_i)$ — единичный скачок, определяемый, согласно формуле

$$\sigma(g_i) = \begin{cases} 0, & g_i < 0 \quad (t < t_i) \\ 1, & g_i > 0 \quad (t > t_i) \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\sigma^{\cdot}(g_i) = \delta(g_i) g_i^{\cdot} = \delta(t - t_i) \tag{1.10}$$

(Здесь, не уменьшая общности, полагаем, что функция $g_i(x_{i-1}, t, \mu)$ при $t < t_i$ отрицательна, а при $t > t_i$ положительна.)

Производную $\sigma^{\cdot}(g_i)$ можно также трактовать как взятую в силу предыдущей i—1-й системы, так что

$$\sigma^{\cdot}(g_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_{i-1}} X_{i-1} + \frac{\partial g_i}{\partial t}\right) \delta(g_i)$$

Решение систем (1.8) нужно строить, полагая, что $x_i = 0$ при $t < t_i$.

Предположим теперь, что при $\mu = 0$ последовательные системы (1.8) допускают зависящее от s произвольных параметров $h_1, \ldots, h_s$ $(s < k_0)$ семейство T-периодических в смысле (1.7) решений

$$x_i^{(0)} = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_s) \qquad (1.11)$$

Основная задача последующего исследования — определение условий, при которых последовательность (1.8) при $\mu \neq 0$ допускает T-периодическое решение, обращающееся при $\mu \to 0$ в одно из решений семейства (1.11), разработка алгоритма построения такого решения при достаточно малых значениях параметра, а также установление критериев его устойчивости в малом.

Прежде чем переходить к решению этой задачи, выведем уравнение для производной

$$u_i(t, \mu) = \partial x_i(t, \mu) / \partial \mu \qquad (1.12)$$

С этой целью выпишем результат формального дифференцирования по μ обеих частей уравнения (1.8)

$$u_i^{\cdot} = \frac{\partial' X_i}{\partial \mu} \sigma(g_i) + X_i \delta(g_i) \frac{\partial' g_i}{\partial \mu} + \frac{\partial' \Phi_i}{\partial \mu} \sigma^{\cdot}(g_i) + \Phi_i \frac{d}{dt}\left[\delta(g_i) \frac{\partial' g_i}{\partial \mu}\right] \qquad (1.13)$$

Здесь штрих означает «полное» частное дифференцирование, так что, например

$$\frac{\partial' X_i}{\partial \mu} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial X_i}{\partial \mu} \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.13) при учете (1.10), а также того, что слагаемые

$$\Phi_i \frac{d}{dt}\left[\delta(g_i) \frac{\partial' g_i}{\partial \mu}\right], \qquad -\Phi_i^{\cdot} \delta(g_i) \frac{\partial' g_i}{\partial \mu}$$

обеспечивают один и тот же скачек компонент вектора u_i в момент $t = t_i$, может быть переписано в виде

$$u_i^{\cdot} = \frac{\partial' X_i}{\partial \mu} \sigma(g_i) + \left[\frac{\partial' \Phi_i}{\partial \mu} - (\Phi_i^{\cdot} - X_i) \frac{\partial' g_i}{\partial \mu} (g_i^{\cdot})^{-1}\right] \sigma^{\cdot}(g_i) \qquad (1.15)$$

или, что то же самое

$$u_i^{\cdot} = A_i u_i \sigma(g_i) + B_i u_{i-1} \sigma^{\cdot}(g_i) + \frac{\partial X_i}{\partial \mu} \sigma(g_i) + Y_i \sigma^{\cdot}(g_i) \qquad (1.16)$$

$$A_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \quad B_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{i-1}} - (\Phi_i^{\cdot} - X_i) \frac{\partial g_i}{\partial x_{i-1}} (g_i^{\cdot})^{-1}$$

$$Y_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} - (\Phi_i^{\cdot} - X_i) \frac{\partial g_i}{\partial \mu} (g_i^{\cdot})^{-1}$$

Здесь A_i и B_i — матрицы $k_i \times k_i$ и $k_i \times k_{i-1}$ соответственно, Y_i — вектор $k_i \times 1$.

Справедливость уравнения (1.15) или (1.16) проверяется, если непосредственно дифференцировать по μ исходные соотношения (1.1) — (1.3), а затем провести операции, аналогичные приведенным в монографии [6].

2. Линейные кусочно-непрерывные системы. Пусть начальные условия, определяющие решения последовательности уравнений (1.8), также зависят от некоторого параметра. Тогда, поскольку правая часть (1.8) не зависит от этого параметра, после соответствующего дифференцирования вместо (1.16) придем к однородной последовательности уравнений

$$y_i^{\cdot} = A_i y_i \sigma(t - t_i) + B_i y_{i-1} \delta(t - t_i), \quad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

Отвечающая (2.1) кусочно-непрерывная система, очевидно, получается из исходной после варьирования начальных условий и поэтому может быть названа системой уравнений в вариациях. Решения этой системы удовлетворяют принципу суперпозиции, поэтому она линейная, кусочно-непрерывная (в отличие от кусочно-линейных систем в обычном смысле).

Произвольное решение (2.1), вообще говоря, также продолжимо лишь в сторону увеличения аргумента t. В то же время ее решение, которое существует при любых вещественных t и, следовательно, (см. (1.16)), определяется начальным условием

$$y_0 |_{t=t_*} = \alpha(\mu) \tag{2.2}$$

может быть записано в виде

$$y_i = U_i(t, t_*) \alpha \tag{2.3}$$

Здесь U_i — матричное $k_i \times k_0$ решение (2.1), удовлетворяющее начальному условию

$$U_0(t_*, t_*) = E_{k_0} \tag{2.4}$$

где E_{k_0} — единичная матрица $k_0 \times k_0$.

Если исходное решение $x_i(t, \mu)$ T-периодично в смысле (1.7), то в этом же смысле будут T-периодичны и матричные коэффициенты A_i и B_i. Отсюда вытекает, что матрица $U_{i+n}(t + T, t_*)$, $k_i \times k_0$ удовлетворяет системе (2.1) и, кроме того, принадлежит семейству (2.3). Поэтому можно написать

$$U_{i+n}(t + T, t_*) = U_i(t, t_*) U_n(t_* + T, t_*) \tag{2.5}$$

Из соотношения (2.5) точно так же, как и в теории непрерывных линейных уравнений с периодическими коэффициентами, можно прийти к характеристическому уравнению

$$| U_n(t_* + T, t_*) - e^{\lambda T} E_{k_0} | = 0 \tag{2.6}$$

где λ — характеристический показатель. Произвольному корню λ определителя (2.6) отвечает принадлежащее семейству (2.3) частное решение (2.1) вида

$$y_i = e^{\lambda T} v_i(t, \mu) \tag{2.7}$$

где v_i T-периодична по t в смысле (1.7). Если все k_0 характеристических показателей определителя (2.6) различны или же имеют простые элементарные делители, то имеет место k_0 независимых частных решений типа (2.7), суперпозиция которых дает «общее» решение (2.1).

Введем в рассмотрение следующую упорядоченную последовательность линейных систем:

$$z_i^{\cdot} = -z_iA_i[1-\sigma(t-t_{i+1})] - z_{i+1}B_{i+1}\delta(t-t_{i+1}) \tag{2.8}$$

Каждое уравнение (2.8) служит для определения вектора z_i, $1 \times k_i$, причем здесь в отличие (1.8), (1.16) и (2.1) в ходе интегрирования надо полагать, что $z_i = 0$ при $t > t_{i+1}$. Произвольное решение отвечающей (2.8) линейной кусочно-непрерывной системы продолжимо, вообще говоря, в сторону уменьшения t. Что же касается продолжимых в обе стороны по t решений (2.8), то между ними и подобными решениями (2.1) имеется определенное соответствие. Действительно

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_iy_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\{-z_iA_iy_i[1-\sigma(t-t_{i+1})] - z_{i+1}B_{i+1}y_i\delta(t-t_{i+1}) + \\ + z_iA_iy_i\sigma(t-t_i) + z_iB_iy_{i-1}\delta(t-t_i)\} = 0 \tag{2.9}$$

Проинтегрируем это соотношение по t в пределах от t_* до t. Тогда, поскольку запись (2.1) предполагает, что $y_i = 0$ при $t < t_i$, а запись (2.8),— что $z_i = 0$ при $t > t_{i+1}$, получим

$$z_iy_i = z_0y_0\,|_{t=t_*} \tag{2.10}$$

Наличие соотношения (2.10) позволяет в дальнейшем говорить о системе (2.8) как о сопряженной по отношению к (2.1).

Подставляя в (2.10) независимые частные решения (2.1) вида (2.7), получим k_0 взаимно независимых линейных первых интегралов (2.8). Обращение этих интегралов приведет к построению общего решения (2.8), которое представимо в виде суперпозиции частных решений

$$z_i = e^{-\lambda T}w_i(t, \mu) \tag{2.11}$$

где w_i — T-периодическая функция t. Отсюда следует, что каждому показателю λ системы (2.1) отвечает показатель — λ системы (2.8). В частности, совпадает число нулевых характеристик показателей и, следовательно, число периодических решений этих систем.

При $\mu = 0$ система (1.8) допускает s-параметрическое семейство T-периодических решений (1.11), поэтому система уравнений в вариациях (2.1) при $\mu = 0$ допускает s взаимно независимых T-периодических решений $\partial\varphi_i / \partial h_r$ $(r = 1, \ldots, s)$. Соответственно сопряженная система (2.8) при $\mu = 0$ также должна допускать s T-периодических решений, которые в дальнейшем будем обозначать через $z_i^{(r)}$ $(r = 1, \ldots, s)$.

Рассмотрим вопрос о существовании T-периодического решения системы (1.16) при $\mu = 0$, полагая, кроме того, что в коэффициенты этой системы и неоднородные слагаемые подставлено $x_i^{(0)} = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_s)$. С этой целью продифференцируем по t величину

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)}u_i^{(0)}, \qquad u_i^{(0)} = u_i\,/_{\mu=0}$$

Тогда в силу (1.16) и (2.8) получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} u_i^{(0)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left[z_i^{(r)}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu}\right)\sigma(t-t_i) + z_i^{(r)}(Y_i)\,\delta(t-t_i)\right] \qquad (2.12)$$

Здесь и далее круглые скобки означают, что в соответствующую величину следует подставлять $\mu = 0$, $t_i = t_i|_{\mu=0}$, $x_i = \varphi_i(t, h_1,\ldots, h_s)$. Интегрируя это соотношение по t в пределах от t_0 до t_n и принимая во внимание, что запись (1.16) предполагает справедливость равенства $u_i = 0$ при $t < t_i$, а запись (2.8) — $z_i = 0$ при $t > t_{i+1}$, получим условия T-периодичности $u_i^{(0)}$ в следующем виде:

$$P_r(h_1,\ldots,h_s) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} z_i^{(r)}\left(\frac{\partial X_i}{\partial \mu}\right)dt + z_i^{(r)}(t_{i-1})\,(Y_i)_{t=t_{i-1}}\right] = 0 \qquad (2.13)$$

$$r = 1,\ldots, s$$

Итак, T-периодическая в смысле (1.7) функция $u_i^{(0)}$ отвечает только тем решениям семейства (1.11), параметры $h_1,\ldots, h_s$ которых удовлетворяют s уравнениям (2.13).

3. Существование T-периодического решения. Для дальнейшего существенно, что, продолжая далее дифференцировать уравнение (1.16) по μ в полном соответствии со схемой, описанной в п. 1, будем получать уравнения для определения последовательных производных $\partial^2 x_i / \partial\mu^2$, $\partial^3 x_i / \partial\mu^3,\ldots$. Все эти уравнения относятся к тому же типу, что и (1.16), а их однородные части совпадают. При $\mu = 0$ их коэффициенты имеют смысл (1.16) тогда и только тогда, когда

$$g_i^{\cdot}/_{\mu=0,\,t=t_i} \neq 0 \qquad (3.1)$$

Предположим, что это неравенство выполняется. Тогда после определения функций $x_i(t, 0)$ в результате решения однотипных линейных в интервалах непрерывности систем можно последовательно определять функции $u_i^{(0)} = \partial x_i/\partial\mu$, $\partial^2 x_i / \partial\mu^2,\ldots$ и затем составить формальное равенство

$$x_i(t, \mu) = x_i(t, 0) + \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \mu^2}\right)\mu^2 + \mu^3\ldots \qquad (3.2)$$

В силу принятых предположений относительно свойств исходной кусочно-непрерывной системы ряды, стоящие в правой части, сходятся при достаточно малых μ. Доказательство этого факта проводится точно также, как и в непрерывном случае.

Моменты переключений $t_i(\mu)$, необходимые для определения кусочно-непрерывного решения (1.5), определяются рядом

$$t_i(\mu) = t_i(0) + \left(\frac{dt_i}{d\mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 t_i}{d\mu^2}\right)\mu^2 + \mu^3\ldots \qquad (3.3)$$

Для определения коэффициентов этого ряда необходимо соответствующее число раз дифференцировать по μ соотношение (1.2) при $t = t_i(\mu)$.

При этом, очевидно

$$\frac{dt_i}{d\mu} = -\frac{\partial' g_{i+1}}{\partial\mu}(\dot{g}_{i+1})^{-1}\Big|_{t=t_i} \tag{3.4}$$

Отсюда понятно, что поправка порядка μ^j ($j = 1, 2, \ldots$) к моменту $t_i(\mu)$ определяется только после нахождения функций $(\partial^j x_i/\partial\mu^j)$. Обратимся теперь к решению основной задачи, сформулированной в п. 1. Будем искать условия существования T-периодического решения исходной кусочно-непрерывной системы, которое при $\mu = 0$ обращается в принадлежащее семейству (1.11) порождающее решение. При этом, не уменьшая общности, будем полагать, что искомое решение $x_i(t, a, \mu)$ удовлетворяет начальному условию (1.6), где $t_* = t_0(0)$, и, следовательно

$$x_0(t_0(0),\ a,\ \mu) \equiv a \tag{3.5}$$

Начальные условия (3.5) отличаются от начальных условий, отвечающих порождающему решению на поправку, исчезающую вместе с μ. Поэтому

$$a(\mu) = a(0) + \gamma(\mu) \tag{3.6}$$

где $k_0 \times 1$-мерная поправка $\gamma(\mu)$ стремится к нулю, если $\mu \to 0$. Уменьшая μ, можно всегда добиться требуемой малости поправки γ, поэтому T-периодическая функция $x_i(t, a, \mu)$ может быть разложена в ряд по степеням μ и γ, который сходится при достаточно малом μ. Если, кроме того, компоненты поправки γ сами аналитичны по μ, то искомое решение представляется в виде следующего ряда по степеням μ:

$$x_i(t, \mu) = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_s) + u_i^{(0)}\mu + \mu^2 \ldots \tag{3.7}$$

Здесь коэффициенты ряда сами T-периодичны по t и, в частности, $u_i^{(0)}$ — T-периодическое решение (1.16).

Характер зависимости компонент γ от μ, равно как и сама возможность их определения, выясняются в процессе исследования условий периодичности, которые записываются в виде следующего векторного уравнения, $k_0 \times 1$:

$$\Psi(\gamma,\ \mu) \equiv x_n(t_0(0) + T,\ \ a(0) + \gamma,\ \mu) - a(0) - \gamma = 0 \tag{3.8}$$

Структура уравнений (3.8) совершенно аналогична структуре соответствующих уравнений теории периодических решений аналитических неавтономных систем с малым параметром в случае неизолированного порождающего решения [2]. Поэтому здесь совершенно аналогичными рассуждениями показывается, что для существования аналитического по μ решения $\gamma(\mu)$ системы (3.8) достаточно наличие простых решений у уравнений первого приближения

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right)\gamma + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)\mu = 0 \tag{3.9}$$

Рассмотрим подробнее эти уравнения. В силу (3.8) можно утверждать, что

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma} = U_n(t_0 + T,\ t_0) - E_{k_0} \tag{3.10}$$

где $U_i(t, t_0)$ — матричное решение, $k_i \times k_0$ системы (2.1) с единичной начальной матрицей (2.4) при условии, что $t_* = t_0$. С другой стороны

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}\right) = u_n' \big|_{t=t_0(0)+T} \tag{3.11}$$

Здесь u_i' — решение уравнения (1.16) при $\mu = 0$, которое в отличие от $u_i^{(0)}$ не T-периодично, но определяется в силу (3.5) нулевыми начальными условиями

$$u_0' \big|_{t=t_0(0)} = 0 \tag{3.12}$$

Помножим слева уравнение (3.9) на вектор-строку $z_n^{(r)}(t_0(0) + T)$, $1 \times k_0$. Вследствие (2.4) и (2.10) имеем

$$z_n^{(r)}(Y_n) \big|_{t=t_0(0)+T} = z_0^{(r)} \big|_{t=t_0(0)} \tag{3.13}$$

Отсюда в силу T-периодичности функции $z_i^{(r)}$ вместо (3.9) получим

$$z_n^{(r)} u_n' \big|_{t=t_0(0)+T} = 0 \tag{3.14}$$

С другой стороны, функция u_i' существует при любых вещественных t и, следовательно, для нее справедливо соотношение (2.12), интегрируя которое в пределах от $t_0(0)$ до $t_0(0) + T$ при учете (3.12) получим

$$z_n^{(r)} u_n' \big|_{t=t_0(0)+T} = P_r(h_1, \ldots, h_s) \tag{3.15}$$

Таким образом, результат исключения компонент γ из системы (3.9) записывается в виде s уравнений с s неизвестными

$$P_r(h_1, \ldots, h_s) = 0 \tag{3.16}$$

которые полностью совпадают с уравнениями (2.13).

Итак, для существования T-периодического решения достаточно, чтобы система (3.16) допускала простое решение, т. е. такое, для которого

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_s)}{\partial(h_1, \ldots, h_s)} \neq 0 \tag{3.17}$$

4. Устойчивость T-периодического решения. Уравнения в вариациях (2.1) получаются в результате формального дифференцирования исходных уравнений (1.8) по некоторому параметру, связанному с начальными условиями. Поэтому наряду с (3.1) справедлива также следующая символическая запись:

$$y_i^{\cdot} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} y_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}} y_{i-1} \tag{4.1}$$

которая по существу совпадает с однородной частью уравнения (1.13). Здесь надо иметь в виду, что дифференцирование по вектору x_i проводится точно так же, как и по параметру, не зависящему от времени.

Последующее исследование устойчивости в малом рассматриваемого T-периодического решения будем проводить на основе уравнений в вариациях в форме (4.1). Это значительно упрощает выкладки и позволяет наглядно проиллюстрировать аналогию между кусочно-непрерывными системами и системами непрерывными и аналитическими.

Итак, обратимся к определению «критических» частных решений вида (2.7) системы уравнений в вариациях (4.1), построенной вблизи рассматриваемого T-периодического решения. Следуя методу, изложенному в [2], последовательные приближения к критическим характеристическим показателям будем находить в процессе определения T-периодических решений системы

$$v_i^{\cdot} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}} v_{i-1} - \lambda v_i \quad (\lambda\,|_{\mu=0} = 0) \tag{4.2}$$

В рассматриваемом неавтономном случае система (4.2) при $\mu = 0$ допускает s независимых T-периодических решений $\partial\varphi_i \,/\, \partial h_r$ ($r = 1,\ldots, s$), а определитель (2.6) имеет соответствующий этим решениям s-кратный нулевой корень с простыми элементарными делителями. Поэтому [2] T-периодическое решение системы (4.2) аналитично по μ, так что

$$v_i = v_i^{(0)} + \mu v_i^{(1)} + \mu^2 \ldots, \qquad \lambda = \lambda_i \mu + \mu^2 \ldots \tag{4.3}$$

причем в порождающем приближении ($\mu = 0$) имеем

$$v_i^{(0)} = \sum_{r=1}^{s} a_r \frac{\partial \varphi_i}{\partial h_r} \tag{4.4}$$

Здесь $a_1,\ldots, a_s$ — некоторые взаимно независимые постоянные.

Уравнение для T-периодической поправки $v_i^{(1)}$ получается, если (4.2) продифференцировать по μ и затем положить $\mu = 0$, и имеет вид

$$v_i^{(1)\cdot} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) v_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\right) v_{i-1}^{(1)} + \left(\frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) v_i^{(0)} + \left(\frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\right) v_{i-1}^{(0)} - \lambda_1 v_i^{(0)} \tag{4.5}$$

Напомним, что штрих здесь, как и ранее, означает полное частное дифференцирование, а круглые скобки,— что соответствующая величина вычисляется в порождающем приближении.

Отметим далее, что в силу исходных уравнений движения (1.8) имеем

$$\frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial h_r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 x_i}{\partial h_r \partial \mu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial h_r} \tag{4.6}$$

Здесь имеется в виду решение исходной системы $x_i\,(t,\, h_1,\ldots,\, h_s,\, \mu)$, которое T-периодично, только если постоянные $h_1,\ldots, h_s$ удовлетворяют системе (3.16).

С другой стороны

$$\frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial h_r} = \frac{\partial'}{\partial \mu}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial h_r} + \frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial x_{i-1}}{\partial h_r}\right) = \frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial h_r} + \frac{\partial'}{\partial \mu}\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial x_{i-1}}{\partial h_r} + \tag{4.7}$$

$$+ \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial h_r} + \frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial u_{i-1}}{\partial h_r}$$

Поэтому, принимая во внимание (4.4), уравнение (4.5) можно переписать в форме

$$v_i^{(1)\cdot} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) v_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\right) v_{i-1}^{(1)} + \sum_{r=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial h_r}\right) - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial h_r}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{i-1}}\right)\left(\frac{\partial u_{i-1}}{\partial h_r}\right) - \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial h_r}\right] a_r \tag{4.8}$$

В силу последнего уравнения, поскольку в его правой части величина $\partial F_i / \partial x_{i-1}$ может быть заменена на $B_i \delta (t - t_i)$, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} v_i^{(1)} = \sum_{q=1}^{s} a_q \frac{d}{dt} \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial h_q}\right) -$$

$$- \sum_{q=1}^{s} a_q \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[z_i^{(r)\cdot} + z_i^{(r)} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) + z_{i+1}^{(r)} \left(\frac{\partial F_{i+1}}{\partial x_i}\right)\right] \left(\frac{\partial u_i}{\partial h_q}\right) - \lambda_1 a_r \tag{4.9}$$

В процессе вывода соотношения (4.9) в уравнении (5.9) индекс суммирования r меняется на q и порядок суммирования по i третьего слагаемого внутри квадратных скобок сдвигался на единицу ($i - 1$ заменено на i). Кроме того, предполагалось выполнение условий ортогональности и нормировки

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial h_q} = \delta_{qr} \tag{4.10}$$

где δ_{qr} — символ Кронекера.

В соотношении (4.9) внутри квадратных скобок помещено выражение, совпадающее при $t < t_{i+1}$ с (2.8). Запись (2.8) предполагает, что при $t > t_{i+1}$ $z_i^{(r)} = 0$. Поэтому соответствующее слагаемое из (4.9) пропадает. Следовательно, интегрируя (4.9) в пределах от t_0 (0) до t_n (0) $= t_0$ (0) $+ T$, получим

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} v_i^{(1)} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \sum_{q=1}^{s} a_q \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial h_q}\right) \Big|_{t_0}^{t_0+T} - \lambda_1 T a_r \tag{4.11}$$

В силу T-периодичности функций $z_i^{(r)}$ и $u_i^{(0)}$ при учете (2.12) имеем

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial h_q}\right) \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{\partial}{\partial h_q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} z_i^{(r)} u_i^{(0)} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{\partial P_r}{\partial h_q} \tag{4.12}$$

Следовательно, условия T-периодичности функции $v_i^{(1)}$ запишутся в виде

$$\sum_{q=1}^{s} \frac{\partial P_r}{\partial h_q} a_q = \lambda_1 T a_r \tag{4.13}$$

Таким образом, для устойчивости рассматриваемого T-периодического решения неавтономной кусочно-непрерывной системы подобно тому, как это имеет место в непрерывном случае [2], оказывается достаточным, чтобы все корни $\lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_1^{(s)}$ уравнения s-й степени

$$\left| \frac{\partial P_r}{\partial h_q} - \lambda_1 T \delta_{qr} \right| = 0 \tag{4.14}$$

имели бы отрицательную вещественную часть. Можно показать, что подобное соответствие сохраняется и в автономном случае, а также в более сложных случаях, когда критические характеристические показатели при $\mu = 0$ имеют непростые элементарные делители.

Поступила 14 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Шильников Л. П. О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 6.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний I, II, III. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, №№ 1, 2, 5, 6.
4. Коловский М. З. Об условиях существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, содержащими малый параметр. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
5. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. Розенвассер Е. Н. Колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1969.