Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ, БЛИЗКИХ К ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ

Л. И. Маневич, Ю. В. Михлин

(Днепропетровск)

Исследуются периодические решения существенно нелинейных систем, близкие к нормальным колебаниям с прямолинейными траекториями. В качестве порождающих принимаются системы с однородными потенциалами.

В работах последних лет изучались нормальные формы колебаний некоторых нелинейных консервативных систем с конечным числом степеней свободы, являющиеся обобщением нормальных колебаний линейных систем [1, 2]. Известным точным решениям задачи о нормальных колебаниях соответствуют прямолинейные траектории в конфигурационном пространстве. Эти решения могут быть использованы как порождающие при определении периодических движений систем, близких к изученным. Для широкого класса квазилинейных систем существование решений, близких к линейным нормальным колебаниям, доказано в работах Ляпунова [3, 4]. Качественные вопросы теории нормальных колебаний с криволинейными траекториями, а также приближенное построение нормальных колебаний в нескольких частных случаях рассматривались в работах [5-7].

1. Рассмотрим консервативную систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\ddot{x}_s = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где f_s — нечетные аналитические функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в замкнутой области конфигурационного пространства.

Сохраняя в (1.1) только члены наименьшей, r-й степени по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим связанную с (1.1) порождающую однородную систему. Нормальные формы колебаний однородной системы определяются соотношениями $x_{s0} = C_s x_n$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$, где постоянные C_s находятся из алгебраических уравнений [1]

$$C_s f_n^{(r)}(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, 1) = f_s^{(r)}(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, 1) \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.2}$$

Здесь и далее $f_n^{(r)}$, $f_s^{(r)}$ — составляющие наименьшего порядка по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в разложениях функций f_n, f_s.

Без уменьшения общности предположим, что выбрана такая система координат, в которой $C_s = 0$, а значит, и $x_{s0} = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$. В этой системе координат введем обозначения $x_n = x$, $f_n = f$.

Для построения периодических решений уравнений (1.1), близких к нормальным колебаниям однородной системы, определим в первую очередь траектории искомых периодических решений: $x_s = x_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$. Уравнения для определения траектории можно записать следующим образом:

$$2\left[h-F\left(x, x_1(x), x_2(x), \ldots, x_{n-1}(x)\right)\right]\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{dx_i}{dx}\right)^2\right]^{-1} \frac{d^2 x_s}{dx^2}+$$
$$+f\left(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)\right) \frac{dx_s}{dx}=f_s\left(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)\right) \tag{1.3}$$
$$(s=1,2, \ldots, n-1)$$

где h — постоянная энергии, F — потенциал системы (1.1).

Решение уравнений (1.3) принимаем в виде рядов

$$x_s=\sum_{k=0}^{\infty} x_{sk}(x) \qquad (s=1,2, \ldots, n-1) \tag{1.4}$$

В нулевом приближении $x_{s0}=0$.

Как и прямолинейные нормальные траектории, траектория (1.4) должна удовлетворять граничным условиям

а) $x_s(0)=0 \quad (s=1,2, \ldots, n-1)$

б) на максимальной изоэнергетической поверхности

$$F\left(X, x_1(X), x_2(X), \ldots, x_{n-1}(X)\right)=h \tag{1.5}$$

должны выполняться условия ортогональности траектории к этой поверхности

$$\left.\frac{dx_s}{dx}\right|_{x=X} f\left(X, x_1(X), \ldots, x_{n-1}(X)\right)=f_s\left(X, x_1(X), \ldots, x_{n-1}(X)\right) \tag{1.6}$$

где X — амплитудное значение переменной x.

После определения $x_s(x)$ задача сводится к интегрированию уравнения

$$x^{\cdot\cdot}=f\left(x, x_1(x), x_2(x), \ldots, x_{n-1}(x)\right) \tag{1.7}$$

Доказательство существования и построение однозначного периодического решения проводится при следующих ограничениях на систему (1.1):

1) определители

$$\Delta_m \neq 0 \tag{1.8}$$
$$\Delta_m=\left|\delta_s{}^j m(m-1) \frac{2 f^{(r)}(1,0, \ldots, 0)}{r+1}+\delta_s{}^j m f^{(r)}(1,0, \ldots, 0)-\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(1,0, \ldots, 0)\right|$$

где $\delta_s{}^j$ — символы Кронекера, $m=1,2,\ldots$

2) отсутствуют положения равновесия на максимальной изоэнергетической поверхности.

Если $r=1$, то ограничение (1.8) совпадает с условием, исключающим кратные частоты в порождающей системе, которое было принято Ляпуновым при исследовании квазилинейных систем [5].

2. Перейдем к построению асимптотического процесса, который дает возможность определить траекторию системы. Решение однородной системы $x_{s0}=0$ выберем в качестве нулевого приближения.

Пусть функции $x_{sm}(x)$ $(m < k)$ определены. Тогда получим следующие уравнения k-го приближения:

$$2\frac{d^2x_{sk}}{dx^2}\left[h+\frac{f^{(r)}(x,0,\ldots,0)}{r+1}x\right]+\frac{dx_{sk}}{dx}f^{(r)}(x,0,\ldots,0)-$$
$$-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f_s^{(r)}(x,0,\ldots,0)}{\partial x_j}x_{jk}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{d^2x_{sl}}{dx^2}N_{k-l}^{(1)}+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{dx_{sl}}{dx}N_{k-l}^{(2)}-$$
$$-\left[N_k^{(3)}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(x,0,\ldots,0)\,x_{jk}\right]=0 \qquad (2.1)$$

Здесь

$$N_m^{(i)}=\sum C^{(\gamma)}\frac{\partial^\gamma N^{(i)}(x,0,\ldots,0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{q=1}^{m}(x_{jq})^{\beta_q^{(j)}}$$

Знак Σ распространяется на все решения в целых положительных числах уравнения

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\beta_1^{(j)}+2\beta_2^{(j)}+\ldots+m\beta_m^{(j)})=m$$

При этом

$$\sum_{q=1}^{m}\beta_q^{(j)}=\alpha_j \quad \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j=\gamma \quad \sum_{j=1}^{n-1}\beta_q^{(j)}=\xi_q$$

$$C^{(\gamma)}=m!\left[\prod_{q=1}^{m}\xi_q!\,(q!)^{\xi_q}\right]^{-1}$$

$$N^{(1)}=-2F(x,x_1(x),x_2(x),\ldots,x_{n-1}(x))$$

$$N^{(2)}=f(x,x_1(x),x_2(x),\ldots,x_{n-1}(x))\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{dx_j(x)}{dx}\right)^2\right]$$

$$N^{(3)}=f_s(x,x_1(x),x_2(x),\ldots,x_{n-1}(x))\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{dx_j(x)}{dx}\right)^2\right]$$

Решение (2.1) разыскивается в виде

$$x_{sk}=\sum_{j=1}^{\infty}A_{sj}^{(k)}x^j \qquad (2.2)$$

Коэффициенты $A_{sj}^{(n)}$ связаны бесконечной системой линейных рекуррентных соотношений

$$2h(r+l+2)(r+l+1)A_{s\,r+l+2}^{(k)}+l(l+1)\frac{2}{r+1}f^{(r)}(1,0,\ldots,0)A_{sl+1}^{(k)}+$$
$$+(l+1)f^{(r)}(1,0,\ldots,0)A_{sl+1}^{(k)}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(1,0,\ldots,0)A_{jl+1}^{(k)}=\Phi_l^{(k)} \qquad (2.3)$$

где функция $\Phi_l^{(k)}$ зависит от предыдущих приближений. Если условия (1.8) выполняются, то все коэффициенты рядов (2.2) однозначно выражаются через $n-1$ величин $A_{jp}^{(k)}$ ($j=1,2,\ldots,n-1$; p — любое фиксированное целое число).

Для определения $A_{jp}^{(k)}$ следует использовать граничные условия (1.6), соответствующие k-му приближению

$$\frac{dx_{sk}}{dx}\bigg|_{x=X} f^{(r)}(X,0,\ldots,0)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(X,0,\ldots,0)\,x_{jk}(X)+ \tag{2.4}$$
$$+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{dx_{sl}}{dx}\bigg|_{x=X} N_{k-l}^{(2)}\big|_{x=X}-\left[N_k^{(3)}\big|_{x=X}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(X,0,\ldots,0)\,x_{jk}(X)\right]=0$$

В силу ограничений (1.8) выполняются необходимые и достаточные условия для того, чтобы из уравнений (2.4) можно было однозначно представить коэффициенты $A_{jp}^{(k)}$ в виде степенных рядов по X [8].

Учитывая все приближения, получим траекторию (1.4), зависящую от параметра X. Далее будет доказана сходимость рядов (2.2) и (1.4) в некоторой окрестности начала координат. В этой окрестности при заданном энергетическом уровне системы из уравнения (1.5) можно определить «амплитуду» колебаний X как аналитическую функцию энергии h.

После построения траектории решение уравнения (1.7) может быть получено в квадратурах. Так как корень уравнения (1.5) простой, что следует из предположения 2), то движение консервативной системы с одной степенью свободы (1.7) в области $F(x)\leqslant h$ периодическое.

3. Докажем сходимость полученных формальных рядов. Рассмотрим вначале ряды (2.2), предполагая, что ограниченность $x_{sm}(x)$ при $m<k$ доказана. (Ограниченность $x_{s0}(x)=C_s x$ при конечных значениях x очевидна.) Пусть везде далее коэффициенты рядов (2.2) заменены их абсолютными значениями, а также произведена замена x на $|X|$.

Так как F, f, f_s — аналитические функции x, x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-1}, то в области определения уравнений (1.1) справедливы оценки

$$\left\{\frac{C^{(\gamma)}}{k}\left|\frac{\partial^\gamma N^{(i)}(X,0,\ldots,0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\right|,\ \left|f^{(r)}(X,0,\ldots,0)\right|,\ \left|\frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}(X,0,\ldots,0)\right|\right\}<B \tag{3.1}$$
$$(0<B<\infty)$$

Рассмотрим совокупность коэффициентов $A_{sj}^{(k)}$ $(s=1,2,\ldots,\ n-1,\ j\leqslant l)$. Предположим, что эти коэффициенты ограничены. Тогда, не уменьшая общности, можно принять, что выполняются неравенства

$$|A_{sj}^{(k)}|<\left(\frac{a_l}{|X|}\right)^{j-1}A\qquad (0<A<\infty,\ 0<a_l<1)$$

где A — произвольная, но конечная величина, превышающая модуль наибольшего по абсолютному значению коэффициента среди всех $A_{sj}^{(k)}$. Вследствие произвола в выборе A величина a_l может быть сделана сколь угодно малой.

Пусть $M=\max\{A,B\}$. Из соотношения (2.3) с учетом оценок (3.1) получим неравенство

$$\frac{|A_{sl+1}^{(k)}|}{|A_{sl}^{(k)}|}\leqslant\frac{a_{l+1}}{|X|}$$

Здесь

$$a_{l+1} = \max\left\{a_l,\ a_l\frac{l-1}{l+1}\ \frac{[(l-r)(2l-2r-1)+(n-1)+\Phi_{l+1}^{(k)}/M^2(|X|/a_l)^l]}{[(l-r-1)(2l-2r-4)+(n-1)+\Phi_l^{(k)}/M^2(|X|/a_l)^{l-1}]}\right\}$$

Поскольку $a_{l+1} > a_l$, величины $A_{sj}^{(k)}$ $(j \leqslant l+1)$ удовлетворяют неравенству

$$|A_{sj}^{(k)} < \left(\frac{a_{l+1}}{|X|}\right)^{j-1} M$$

Введем аналогично постоянные $a_{l+2}, a_{l+3}, \ldots$ Тогда $|A_{sj}^{(k)}| < \left(\frac{a_q}{|X|}\right)^{j-1} M$ $(j \leqslant q$, q неограниченно возрастает). Рассмотрим предельное значение a_q

$$\lim_{q\to\infty} a_q = a_l \prod_{q=l}^{\infty}\left\{\frac{q-1}{q+1}\cdot\frac{[(q-r)(2q-2r-1)+(n-1)+\Phi_{q+1}^{(k)}/M^2(|X|/a_q)^q]}{[(q-r-1)(2q-2r-4)+(n-1)+\Phi_q^{(k)}/M^2(|X|/a_q)^{q-1}]}\right\} \tag{3.2}$$

Если функции $x_{sm}(x)$ при $m < k$ ограничены, то бесконечное произведение (3.2) сходится. Сделав величину a_l достаточно малой, получим $a = \lim_{q\to\infty} a_q < 1$, и члены рядов (2.2) убывают в геометрической прогрессии.

Необходимо также доказать, что коэффициенты $A_{sj}^{(k)}$ $(j \leqslant l)$ ограничены. Из соотношений (2.3) следует, что все $A_{sj}^{(n)}$ — линейные функции от наибольших по абсолютной величине коэффициентов $A_{s\eta}^{(k)}$ $(\eta \leqslant l$, η фиксировано)

$$A_{sj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_{si}A_{i\eta} + v_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

где u_{si}, v_s — ограниченные величины. Таким образом, уравнения (2.4) связывают аналитические функции от X и $A_{s\eta}$, и найдется такое значение $X = X_0$, что при $|X| < |X_0|$ величины $A_{s\eta}$ представляются сходящимися степенными рядами по X [8]. Для этих значений X ряды (2.2) сходятся.

Докажем теперь, что коэффициенты рядов (1.4) убывают в геометрической прогрессии при возрастании номера приближения k.

Пусть доказано убывание коэффициентов $A_{sj}^{(k)}$ при возрастании k для значений $j \leqslant m$, причем

$$\{j(j-1)|A_{sj}^{(k)}|,\ |A_{sj}^{(k)}|\} < (b_l)^{k-1}P \qquad (0 < P < \infty,\ 0 < b_l < 1) \tag{3.3}$$

Рассматривая соотношения (2.3) и (2.4) при различных номерах k, можно показать, что неравенства справедливы, в частности для величин $A_{s1}^{(k)}$.

Пусть $K = \max\{P, B\}$. Используя оценки (3.1) и (3.3), можно показать, что

$$N_p^{(i)} < p(b_l)^{p-1}R \qquad (K < R < \infty) \tag{3.4}$$

Ранее доказано, что коэффициенты $A_{sm+1}^{(k)}$ ограничены. Поэтому можно выбрать такие значения постоянных b_l и R, чтобы выполнялись условия

$$(m+1)m|A_{sm+1}^{(k)}| < (b_l)^{k-1}R, \qquad k \leqslant l$$

причем b_l может быть сделана сколь угодно малой, если R достаточно велико. Из соотношения (2.3) с учетом (3.1), (3.3), (3.4) получим неравенство

$$\frac{m(m+1)\,|A_{sm+1}^{(l+1)}|}{m(m+1)\,|A_{sm+1}^{(l)}|} < b_{l+1}$$

$$b_{l+1} = \max\left\{b_l,\ b_l\,\frac{2(m+2)(l+1)(l+2)(2l+3)+3(l+2)^2}{2(m+2)\,l\,(l+1)(2l+1)+3(l+1)^2}\right\}$$

Введем также постоянные $b_{l+2}, b_{l+3}, \ldots$. Рассмотрим

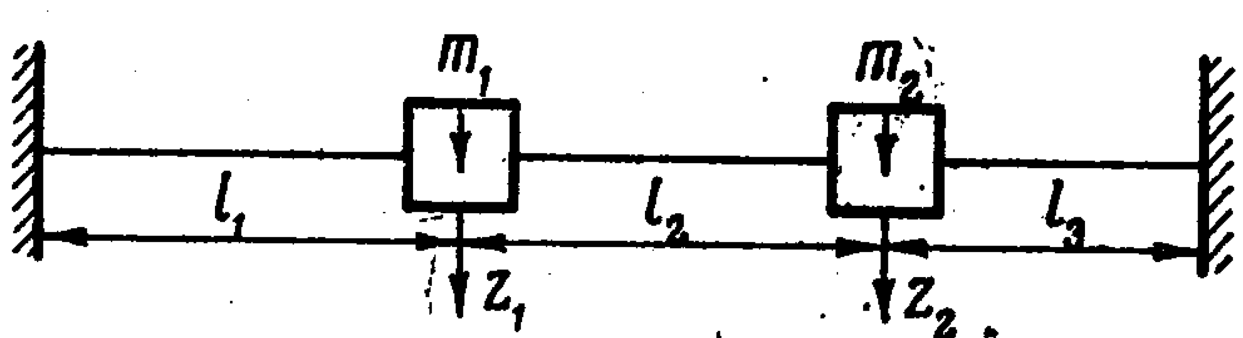
$$b = \lim_{q\to\infty} b_q = b_l \prod_{q=l}^{\infty}\left[\frac{2(m+2)(q+1)(q+2)(2q+3)+3(q+2)^2}{2(m+2)(q+1)\,q\,(2q+1)+3(q+1)^2}\right]$$

Бесконечное произведение сходится и, выбирая величину b_l достаточно малой, получим неравенство $b<1$. Отсюда следует, что коэффициенты $A_{sm+1}^{(k)}$ убывают в геометрической прогрессии при возрастании номера приближения k.

Аналогично ведется доказательство того, что величины $A_{sj}^{(k)}$ ($j = m+2, m+3,\ldots$) убывают в геометрической прогрессии. Наконец, из построения асимптотического процесса следует, что ряды (1.4) сходятся к решению уравнений (1.3).

Таким образом, при выполнении ограничений 1) и 2) каждому нормальному решению порождающей однородной системы соответствует единственное периодическое решение уравнений (1.1), обладающее свойствами нормальных колебаний.

4. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим свободные колебания закрепленной нити с двумя сосредоточенными массами m_1 и m_2; силы тяжести не учитываются (фигура). Пусть l_1, l_2, l_3 — длины недеформированных участков нити, EF — жесткость нити на растяжение, z_1, z_2 — поперечные перемещения масс m_1 и m_2.



Проведем расчет нормальных поперечных колебаний нити, предполагая, что предварительное натяжение отсутствует. В этом случае система существенно нелинейна и даже нелинеаризуема, уравнения движения имеют вид

$$m_i z_i^{\cdot\cdot} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

$$\Pi = \left\{l_1\left[1-\left(\frac{z_1}{l_1}\right)^2\right]\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{z_1}{l_1}\right)^2}\right] + l_2\left[1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\left(\frac{z_1}{l_1}-\frac{z_2}{l_1}\right)^2\right]\times\right.$$
$$\times\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\left(\frac{z_1}{l_1}-\frac{z_2}{l_1}\right)^2}\right] + l_3\left[1-\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2\left(\frac{z_2}{l_1}\right)^2\right]\times$$
$$\left.\times\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^2\left(\frac{z_2}{l_1}\right)^2}\right]\right\}$$

Введем переменные

$$x = \frac{z_1}{l_1},\qquad y = \frac{z_2}{l_1},\qquad \tau = \left(\frac{EF}{2m_1 l_1}\right)^{1/2} t$$

Предполагая, что $|x| < 1$, $|y| < l_3/l_1$, сохраним в разложении потенциала по степеням x и y только члены, содержащие четвертые и шестые степени. Тогда уравнения движения в безразмерной форме, соответствующей (1.1), запишутся следующим образом:

$$x^{\cdot\cdot} + x^3 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (x-y)^3 + \frac{1}{4} x^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5 (x-y)^5 = 0 \tag{4.1}$$

$$y^{\cdot\cdot} + \frac{m_1}{m_2}\left[\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 y^3 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (y-x)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^5 y^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5 (y-x)^5\right] = 0$$

Определим периодические решения уравнений (4.1), близкие к нормальным колебаниям порождающей однородной системы, потенциал которой содержит лишь четвертые степени x, y.

Соотношения (1.2) для определения формы колебаний $y_0 = Cx$ однородной системы сводятся к алгебраическому уравнению

$$C\left[1 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (1-C)^3\right] - \frac{m_1}{m_2}\left[\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 C^3 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (C-1)^3\right] = 0 \tag{4.2}$$

Каждому действительному решению (4.2) соответствует прямолинейная нормальная форма колебаний порождающей системы.

Для построения траекторий периодических движений системы (4.1), близких к прямолинейным нормальным формам, используем уравнения первого приближения в виде (2.1). В рассматриваемом случае получим

$$P_1(x) y_1'' + P_2(x) y_1' + P_3(x) y_1 + P_4(x) = 0 \tag{4.3}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2(1 + m_2/m_1C^2)}\left[1 + \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 (1-C)^4 + \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 C^4\right](X^4 - x^4)$$

$$P_2(x) = -\left[1 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (1-C)^3\right] x^3$$

$$P_3(x) = \left\{3C\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (1-C)^2 + 3\frac{m_1}{m_2}\left[\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 C^2 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (C-1)^2\right]\right\} x^2$$

$$P_4(x) = \frac{1}{4}\left\{-C\left[1 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5 (1-C)^5\right] + \frac{m_1}{m_2}\left[\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^5 C^5 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5 (C-1)^5\right]\right\} x^5$$

Решение (4.3) представим в виде (2.2), удовлетворяя граничным условиям (1.6). При численном расчете принимаем

$$\frac{l_1}{l_2} = 1, \qquad \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^3 = \frac{1}{2}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = 1, \qquad x(0) = X = 0.9 \qquad x^{\cdot}(0) = 0$$

В нулевом приближении определим две прямолинейные нормальные формы (синфазную и антифазную), соответствующие двум действительным корням (4.2)

$$y_0 = 1.357\, x, \qquad y_0 = -0.926\, x \tag{4.4}$$

Суммируя решение уравнения первого приближения (4.3) в форме (2.2) с решением нулевого приближения, получим соответственно следующие выражения для форм колебаний:

$$y = 1.345\, x + 0.003\, x^5 - 0.002\, x^7 + \ldots$$

$$y = -0.962\, x - 0.002\, x^5 + 0.002\, x^7 + \ldots \tag{4.5}$$

Имея формы колебаний (4.4) либо (4.5), можно свести задачу к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка вида (1.7). При этом безразмерные периоды колебаний для синфазной и антифазной форм в нулевом приближении $T \approx 7.42$ и $T \approx 2.54$; с учетом нулевого и первого приближений $T \approx 6.71$ и $T \approx 1.88$.

Для оценки точности полученного асимптотического решения было проведено численное интегрирование системы (4.1) на ЭЦВМ. Варьирование начальных условий позволило выделить два периодических решения, близких к нормальным формам колебаний порождающей однородной системы. Решения, полученные на ЭЦВМ, характеризуются следующими параметрами: при $x^{\cdot} = 0$, $y^{\cdot} = 0$ $y / x \approx 1.349$ и $y / x \approx$

≈ -0.950, а периоды колебаний равны соответственно $T \approx 6.05$ и $T \approx 1.68$.

Сопоставление асимптотических решений и решений, рассчитанных на ЭЦВМ, показывает, что учет нулевого и первого приближений обеспечивает приемлемую точность расчета.

Поступила 28 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenberg R. M., Hsu C. S. On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems. Аналитические методы теории нелинейных колебаний, т. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
2. Маневич Л. И. Инвариантно-групповые решения и проблема нормальных колебаний. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 13. Днепропетровск, 1971.
3. Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. Rosenberg R. M., Kuo J. K. Non similar normal mode vibrations of nonlinear systems having two degrees of freedom. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 2 (русск. перев.: Неоднородные колебания нелинейных систем с двумя степенями свободы. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механ., 1964, т. 31, № 2).
6. Рак С. К. Rosenberg R. M. On the existance of normal mode vibrations of nonlinear systems. Quart. Appl. Math., 1968, vol. 26, No. 3.
7. Cooke C. H., Struble R. A. Perturbations of normal mode vibrations. Internat. J. nonlinear Mech., 1966, vol. 1, No. 2.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1962.