Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534

О ПОЛУЧЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Н. В. Воробьев

(Москва)

Метод разделения движений [1,2] применяется к автономным системам, главная часть которых определяется произвольной постоянной матрицей, а возмущения — произвольные полиномы относительно искомых функций. Полученные результаты используются для получения эволюционных уравнений в задаче о вынужденных колебаниях одной двухчастотной системы в случае резонанса.

Метод разделения движений в применении к квазилинейным автономным системам заключается в отделении быстрых движений, определяемых главной частью системы, от медленных (эволюционных), определяемых малыми возмущающими членами. Он впервые был предложен А. М. Молчановым и использован при решении задач об устойчивости для случая, когда главная часть задана диагональной матрицей и возмущения имеют вид полиномов [1, 2].

1. Рассмотрим систему

$$dX\ /\ dt = A_0(X) + \varepsilon A_1\ (X) \tag{1.1}$$

Здесь $X\ (t)$ — искомая, $A_0\ (X)$ и $A_1\ (X)$ — заданные вектор-функции. Проведем в (1.1) замену неизвестной функции

$$Y = X - \varepsilon Q\ (X) \tag{1.2}$$

Тогда в новых переменных получим

$$dY\ /\ dt = A_0\ (Y) + \varepsilon\ [A_1\ (Y) - L_{A_0}\ [Q]] + O\ (\varepsilon^2) \tag{1.3}$$
$$L_{A_0}[Q] = \frac{dQ}{dY} A_0(Y) - \frac{dA_0}{dY} Q\ (Y)$$

Как показано в [1,2], для того чтобы в (1.1) можно было произвести разделение движений, необходимо и достаточно существование решения следующей системы уравнений:

$$B\ (Y) = A_1(Y) - L_{A_0}[Q\ (Y)], \qquad L_{A_0}[B\ (Y)] = 0 \tag{1.4}$$

Если решение (1.4) существует, то асимптотическое решение, удовлетворяющее (1.3) с точностью до членов $O\ (\varepsilon)$ на временах $t \sim \varepsilon^{-1}$, можно получить следующим образом. В решение невозмущенной (при $\varepsilon = 0$) системы $Y = f\ (\xi, t)$ вместо вектора начальных данных ξ следует подставить решение эволюционного для (1.3) уравнения

$$d\xi\ /\ dt = \varepsilon B\ (\xi) \tag{1.5}$$

после чего решение исходной системы (1.1) получается обращением формулы (1.2).

Вопрос о разрешимости системы (1.4) может быть доведен до конца, если A_0Y — линейная функция, а $A_1(Y)$ имеет вид полинома произвольной степени p.

Для оператора $L_{A_0}[Q_p]$ однородные полиномы образуют инвариантные подпространства, в каждом из которых он представим постоянной матрицей конечного порядка. Это позволяет изучать свойства оператора в каждом из подпространств независимо. Для выделенных A_0 и A_1 условие разрешимости системы (1.4) эквивалентно следующему: базис ядра оператора $L_{A_0}[Q_p]$ должен быть образован только из собственных векторов оператора.

Случай диагональной A_0 разобран в [2]. При этом оператор $L_{A_0}[Q_p]$ в каждом из инвариантных подпространств задается диагональной матрицей, и система (1.4) всегда имеет единственное решение. Функция $B(\xi)$, определяющая правую часть уравнения (1.5), содержит те члены из A_1, которые соответствуют нулевым диагональным элементам матрицы $L_{A_0}[Q]$. Это как раз те члены $A_1(X)$, которые нельзя обратить в нуль с помощью замены (1.2) ни при каком выборе функции Q. Члены, входящие в $B(\xi)$, можно назвать резонансными по отношению к A_0.

2. Распространим метод разделения движений [1,2] на автономные системы вида (1.1), матрица линейной части которых имеет нормальную жорданову форму, а возмущение $A_1(X)$ — полином $R_p(X)$ степени p. Матрицу главной линейной части системы (1.1) будем обозначать через G. Всюду в дальнейшем предполагается, что G не имеет нулевых собственных значений.

Легко проверить, что, если матрица оператора $L_G[Q_p]$ имеет нулевое собственное значение кратности выше первой, то базис ядра этого оператора будет состоять из собственных и присоединенных векторов. Следовательно, при произвольной $A_1(X)$ из указанного выше класса система (1.4) неразрешима.

Чтобы применить метод разделения движений к описанным системам, примем за основное быстрое движение не решение невозмущенной системы, а некоторое фиктивное движение, выбираемое так, чтобы выполнялись условия:

1) система с выбранным таким образом быстрым движением приводится к виду, допускающему разделение движений;

2) структура получающихся эволюционных уравнений позволяет вводить в них «медленное время».

Пусть сначала G состоит из одной жордановой клетки

$$G = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda \end{Vmatrix}$$

Представим G в виде суммы двух матриц: Λ и K, где Λ содержит диагональные элементы G, а K — остальные. Можно проверить, что Λ и K всегда коммутируют между собой. Если G состоит из нескольких жордановых клеток, то, сделав аналогичное разбиение, можно убедиться, что Λ и K коммутируют. Можно показать, что условие коммутирования матриц Λ и K эквивалентно равенству $L_\Lambda[KX] = 0$.

Выполнение этого условия означает, что система, главная часть которой задана матрицей Λ, а возмущение — KX, допускает разделение движений. Если при той же главной части возмущение имеет вид полинома, то система приводится к виду, допускающему разделение движений, поскольку Λ — диагональна. Следовательно, если в системе (1.1) член ΛX принять за главную часть, а KX отнести к возмущению, то эволюционные уравнения (1.5) в силу линейности оператора $L_{A_0}[Q]$ будут иметь вид

$$dY / dt = KY + \varepsilon B(Y) \tag{2.1}$$

где $B(Y)$ содержит резонансные члены, выделенные из возмущения $A_1(X)$.

Таким образом, формула (2.1) определяет структуру эволюционных уравнений, если G имеет нормальную жорданову форму. При этом не все члены в правой части (2.1) имеют порядок единицу.

Покажем, что система (2.1) допускает введение медленного времени. Пусть максимальная длина жордановых цепочек в G равна k и пусть для простоты имеется лишь одна цепочка этой длины. Выпишем группу уравнений системы (2.1), соответствующую этой цепочке

$$dy_i / dt = y_{i+1} + \varepsilon b_i(Y) \quad (i = 1, \ldots, k-1), \qquad dy_k / dt = \varepsilon b_k(Y) \tag{2.2}$$

Если в (2.2) положить $\varepsilon = 0$, то получающаяся система эквивалентна уравнению $y_1^{(k-1)} = 0$, решение которого не зависит от $B(Y)$. Следовательно, система с выделенными таким образом главными членами оказалась вырожденной. Для снятия этого вырождения проведем в (2.2) масштабное преобразование переменных, причем масштаб y_1 сохраним неизменным. Введем новые переменные по формулам

$$y_i = \varepsilon^{(i-1)/k} z_i \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad t = \varepsilon^{-1/k}\tau \tag{2.3}$$

В новых переменных (2.2) примет вид

$$dz_i / d\tau = z_{i+1} + \varepsilon^{(k-1)/k} b_i(Z), \qquad dz_k / d\tau = b_k(Z) \tag{2.4}$$

Здесь в каждом из уравнений главный член имеет порядок единицу, так что получающаяся из (2.4) при $\varepsilon = 0$ система уже не будет вырожденной, и в то же время ее правая часть значительно проще, чем в системе (2.2). При этом в функции $b_k(Z)$ члены, содержащие z_i $(i = 2, \ldots, k)$, будут иметь более высокий порядок малости, чем члены, зависящие только от z_1.

Из формул масштабного преобразования переменных (2.3) видно, что характерный масштаб времени, на котором уравнения (2.4) описывают медленную эволюцию системы (1.2), равен $t_* = \varepsilon^{-1/k}$ и тем меньше, чем больше максимальная длина жордановых цепочек в G.

3. Рассмотрим системы вида (1.1), главная часть которых задается произвольной постоянной матрицей A_0, а возмущения, как и прежде,— полиномы степени не выше p.

Для получения эволюционных уравнений можно A_0 предварительно преобразовать к каноническому виду, а затем воспользоваться схемой, описанной в п. 2. Однако такой путь не всегда удобен, так как члены возмущения, имевшие в исходной системе простой вид, в преобразованной системе могут сильно усложниться. Кроме того, в возмущении возможно появление комплексных коэффициентов, что затруднит исследование получающейся эволюционной системы.

Если A_0 не преобразовывать к каноническому виду, то процесс получения эволюционных уравнений в соответствии с общей схемой сведется к следующим операциям. Для каждой из матриц $L_{A_0}[Q_p]$ ищем собственные векторы, соответствующие $\lambda = 0$. Если совокупность всех таких векторов образует базис ядра, то, выписав члены, соответствующие их координатам, получим искомые эволюционные уравнения. При произвольной A_0 матрицы $L_{A_0}[Q_p]$ получаются общего вида, поэтому отыскание соответствующих собственных векторов является трудоемкой задачей, так как с увеличением p порядки матриц $L_{A_0}[Q_p]$ быстро растут.

Ниже будет указан удобный для применения способ получения эволюционных уравнений, не требующий изучения строения матриц $L_{A_0}[Q_p]$. Будет показано, что искомые уравнения можно получить из эволюционных уравнений, написанных для случая, когда A_0 приведена к канонической форме. Процесс получения искомых эволюционных уравнений фактически сведется к следующим операциям:

1) отыскание нулевых элементов диагональной матрицы (так как оператор $L_{A_0}[Q_p]$ при диагональной A_0 задается диагональной матрицей);

2) применение к найденным элементам некоторого линейного преобразования переменных.

Рассмотрим сначала случай, когда A_0 приводится к диагональной форме $B^{-1}A_0B = \Lambda$.

Будет показано, что матрицы $L_{A_0}[Q_p]$ и $L_\Lambda[Q_p]$ подобны, т. е. существует не вырожденная матрица P, где

$$L_\Lambda = P^{-1}L_{A_0}P \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что собственные пространства этих матриц имеют одинаковую размерность, а по столбцам P стоят собственные векторы матрицы L_{A_0}. Если матрицу P удастся найти явно, то, взяв из нее столбцы, соответствующие нулевому собственному значению матрицы L_{A_0} или, что то же, L_Λ, получим эволюционные уравнения для произвольной A_0, приводящейся к диагональной форме.

Переходим к доказательству формулы (3.1). Введем обозначения для элементов матриц

$$A_0 = \| a_j^{\ i} \|, \qquad B = \| b_j^{\ i} \|, \qquad B^{-1} = \| c_j^{\ i} \|$$

Пусть k — координата вектора $A_1(X)$ имеет вид

$$u^k_{m_1\ldots m_p} x^{m_1} \ldots x^{m_p} \qquad \Big(k = 1, \ldots, n;\ \sum_p m_p = p\Big)$$

Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам проводится суммирование от единицы до n.

Сделаем в (1.2) замену искомых функций: $x^i = b_j^{\ i} y^j$, обратная замена $y^i = c_j^{\ i} x^j$. Тогда в новых переменных соответствующий коэффициент в возмущении будет равен

$$(u^k_{m_1\ldots m_p})' = b^{l_1}_{m_1} \ldots b^{l_p}_{m_p} c^k_\alpha u^\alpha_{l_1\ldots l_p} \tag{3.2}$$

Если коэффициенты полиномов Q_p считать координатами некоторого вектора U, то (3.2) можно рассматривать как формулу линейного преобразования этих координат при изменении базиса, задаваемого матрицей $P^{-1} = \| b^{l_1}_{m_1} \ldots b^{l_p}_{m_p} c^k_\alpha \|$. Здесь индексы $l_1, \ldots l_p, \alpha$ определяют номер столбца, а $m_1, \ldots m_p, k$ — номер строки. Аналогично можно получить $P = \| c_{m_1}^{l_1} \ldots c_{m_p}^{l_p} \overline{b_\alpha^k} \|$, где индексы имеют тот же смысл, что и в P^{-1}. Легко проверить, что $PP^{-1} = P^{-1}P = E$.

Выпишем в явном виде оператор

$$L_{A_0}[Q_p(Y)] = y^{m_1} \ldots y^{m_p} [a_{m_p}^i (u_{im_1 \ldots m_{p-1}}^k + \ldots + u_{m_1 \ldots m_{p-1} i}^k) - a_q^k u_{m_1 \ldots m_p}^q]$$

По отношению к коэффициентам полинома, стоящим в квадратных скобках, эта формула определяет линейное преобразование с матрицей

$$\| a_{m_p}^{n_1} \delta_{m_1}^{n_2} \ldots \delta_{m_{p-1}}^{n_p} \delta_l{}^k + \delta_{m_1}^{n_1} a_{m_p}^{n_2} \delta_{m_2}^{n_3} \ldots \delta_{m_{p-1}}^{n_p} \delta_l{}^k + \ldots$$
$$\ldots + \delta_{m_1}^{n_1} \ldots \delta_{m_{p-1}}^{n_{p-1}} a_{m_p}^{n_p} \delta_l{}^k - a_l{}^k \delta_{m_1}^{n_1} \ldots \delta_{m_p}^{n_p} \|$$

Здесь $\delta_j{}^i$ — символ Кронекера, индексы $n_1, \ldots, n_p, l$ определяют номер столбца, а $m_1, \ldots, m_p, k$ — номер строки.

Матрица оператора $L_\Lambda [Q_p(Y)]$ получается из матрицы $L_{A_0}[Q_p(Y)]$ заменой $a_j{}^i$ на $\lambda_j{}^i$.

Непосредственной проверкой можно установить справедливость формулы $PL_\Lambda = L_{A_0}P$, для чего необходимо воспользоваться тождествами $a_\alpha{}^i b_k{}^\alpha = b_\beta{}^i \lambda_k{}^\beta$, $c_\alpha{}^i a_j{}^\alpha = \lambda_\beta{}^i c_j{}^\beta$.

Формула (3.1) доказана.

Ниже на примере конкретной задачи будет показано, что знать явный вид матрицы P нет необходимости, а для получения искомых эволюционных уравнений достаточно знать матрицы B и B^{-1}.

Если A_0 имеет своим каноническим видом нормальную жорданову форму, т. е. $B^{-1} A_0 B = G$, то A_0 следует представить в виде суммы двух матриц: $A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$ таким образом, чтобы матрица $B^{-1} A_0^{(1)} B$ совпадала с диагональной частью матрицы G; тогда, очевидно, $B^{-1} A_0^{(2)} B$ совпадет с ее внедиагональной частью. После этого следует отыскивать собственные векторы ядра оператора $L_{A_0}^{(1)}[Q_p]$, а матрицу $A_0^{(2)}$ отнести к возмущениям.

Хотя при этом некоторые линейные члены в эволюционных уравнениях не содержат множителем малый параметр ε, введение медленного времени все же оказывается возможным, поскольку эти уравнения с помощью некоторого линейного преобразования можно привести к виду (2.4).

4. Применим изложенные выше результаты к задаче о вынужденных колебаниях в многочастотной системе, главная часть которой линейна и имеет постоянные несоизмеримые между собой частоты. Пусть в качестве внешней возмущающей силы используется гармонический осциллятор, воздействующий на систему двояким образом. Во-первых, эта сила явно присутствует в качестве слагаемого в правой части системы без предположения о его малости. Во-вторых, она произвольным образом входит в малые нелинейные члены системы с условием выполнения требования гладкости правых частей до нужного порядка. Ставится задача асимптотически описать поведение системы при малых значениях параметра ε в случае, когда частота внешней силы близка к одной из собственных частот системы.

Для применимости метода разделения движений необходимо прежде всего исходную систему свести к автономной, что легко выполнить, добавив новые неизвестные функции, удовлетворяющие уравнению гармонического осциллятора.

Так как собственные частоты исходной системы несоизмеримы, то явление резонанса будет проявляться при взаимодействии внешней возмущающей силы с той группой неизвестных функций, которые отвечают резонансной частоте. Поэтому типичные особенности колебаний при резонансе многочастотных систем можно выявить в двухчастотной системе вида

$$dX\,/\,dt = A_0X + A_1X + \varepsilon A_2(X) + \varepsilon A_3(X) \tag{4.1}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ \ A_2(X) = a_{ij}{}^k x^i x^j,\ \ A_3(X) = a_{ijl}{}^k x^i x^j x^l$$

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},\qquad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \end{Vmatrix}$$

Матрица A_0 задает главную часть системы, A_1 определяет разность между собственной частотой системы, равной единице, и частотой внешней возмущающей силы.

Получим эволюционные уравнения, описывающие поведение системы (4.1) на временах $t \sim \varepsilon^{-p}$. Ниже показано, что величина p определяется структурой A_0.

В соответствии со схемой, изложенной в п. 3, процесс получения эволюционных уравнений сводится к следующим операциям.

Приводим A_0 к каноническому виду: $G = B^{-1}A_0B$. Матрица G содержит две жордановы клетки второго порядка с собственными значениями, равными $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$. Обозначим $K = G - \Lambda$, где Λ — диагональная часть G. Тогда матрица $A_0^{(2)} = BKB^{-1}$ определит главные члены в искомой эволюционной системе. В переменных x_i получим

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-1}{2}x_4 + \varepsilon f_1(X),\qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_3 + \varepsilon f_2(X)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \varepsilon f_3(X),\qquad \frac{dx_4}{dt} = \varepsilon f_4(X) \tag{4.2}$$

Здесь $f_i(X)$ — резонансные по отношению к $A_0^{(1)}$ члены, выделенные из линейных, квадратичных и кубических возмущений.

Сделаем в (4.2) масштабное преобразование переменных

$$x_1 = z_1,\ x_2 = z_2,\ \ x_3 = \sqrt{2\varepsilon}z_3,\ x_4 = -\sqrt{2\varepsilon}z_3,\ \tau = \sqrt{\varepsilon/2}t \tag{4.3}$$

Тогда в переменных z_i получим

$$\begin{aligned} dz_1/d\tau &= z_4 + \sqrt{\varepsilon}f_1(Z), \qquad dz_3/d\tau = f_3^{(1)}(z_1,z_2) + \sqrt{\varepsilon}f_3^{(2)}(Z) \\ dz_2/d\tau &= z_3 + \sqrt{\varepsilon}f_2(Z),\ \ dz_4/d\tau = f_4^{(1)}(z_1,z_2) + \sqrt{\varepsilon}f_4^{(2)}(Z) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формул (4.3) следует, что характерный масштаб времени для эволюционной системы (4.4) равен $t_* = \varepsilon^{-1/2}$.

Для получения явного вида $f_3^{(1)}(z_1, z_2)$ и $f_4^{(1)}(z_1, z_2)$ необходимо найти резонансные по отношению к Λ члены $f_i(Y)$ в классе линейных, квадратичных и кубичных возмущений, а затем получить их образ при преобразовании переменных: $X = BY$.

Оператор $L_\Lambda^i[Q_p(Y)]$ задается диагональной матрицей, и резонансными будут те члены в каждом $Q_p(Y)$, для которых соответствующие элементы этой матрицы тождественно обращаются в нуль [2]. При переходе к переменным x_i резонансные члены получаются комплексно-сопряженными, и для получения вещественных эволюционных уравнений из них надо составить соответствующие линейные комбинации. Нетрудно убедиться, что в $Q_2(Y)$ (класс квадратичных возмущений) резонансных членов не будет совсем, а из $Q_3(Y)$ в функциях $f_3^{(1)}(z_1, z_2)$ и $f_4^{(1)}(z_1, z_2)$ будут присутствовать члены: соответственно $(z_1^2 + z_2^2)(\beta z_2 - \alpha z_1)$ и $(z_1^2 + z_2^2)(\beta z_1 - \alpha z_2)$, где α, β — постоянные вещественные коэффициенты, зависящие от явного вида кубичных возмущений.

Чтобы определить вклад, вносимый в эволюционные уравнения членом $A_1(X)$ из (4.1), необходимо вычислить его проекцию на нулевое собственное подпространство оператора $L_{A_0^{(1)}}[Q_1X]$, т. е. найти его координаты в базисе собственных векторов. Проделав необходимые вычисления, получаем окончательный вид эволюционной системы

$$\begin{aligned} dz_1/d\tau &= z_4, \quad dz_3/d\tau = (z_1^2 + z_2^2)(\beta z_2 + \alpha z_1) - \mu z_4 \\ dz_2/d\tau &= z_3, \quad dz_4/d\tau = (z_1^2 + z_2^2)(\beta z_1 - \alpha z_2) + \mu z_3 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Коэффициенты α, β и μ будут порядка единицы, если в (4.1) μ имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$.

Пример. Рассмотрим систему, описываемую уравнением Дуффинга

$$d^2x/dt^2 + x = b \sin \omega t + \varepsilon \alpha x^3 \tag{4.6}$$

находящуюся под действием внешней периодической силы. Изучим резонансный случай, когда частота внешней силы близка к собственной частоте невозмущенной системы: $\omega \sim 1$. В [3] изучались стационарные решения этой системы в случае малости внешней возмущающей силы $b \sim \varepsilon$, для чего использовались методы Ляпунова — Пуанкаре и методы осреднения.

Выведем эволюционные уравнения, описывающие поведение системы в медленном времени в случае $b \sim 1$. Если уравнение (4.6) привести к виду (4.1), то будем иметь $A_2(X) = 0$, а вектор $A_3(X) = (0, \alpha x_1^3, 0, 0)$. Дальнейшие действия проводим в следующем порядке. Сделаем в (4.1) преобразование переменных $Y = B^{-1}X$, где B приводит A_0 к диагональному виду. Из членов кубичных возмущений $C_3(Y)$ выбираем резонансные и находим их прообраз в переменных x. В (4.1) проводим масштабное преобразование переменных так, чтобы среди получившихся резонансных членов выделить главные. В результате находим, что характерный масштаб времени равен $t_* = \varepsilon^{-1}$. Отличие от общего случая объясняется тем, что (4.6) фактически является системой с одной степенью свободы. Вычисляем коэффициенты, с которыми главные резонансные члены входят в эволюционные уравнения. Они получаются из коэффициентов $C_3(Y)$.

Окончательно получим следующую эволюционную систему:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = -z_4 + \frac{3}{8}\alpha z_2(z_1^2 + z_2^2), \qquad \frac{dz_3}{d\tau} = -\frac{\omega - 1}{\varepsilon} z_4$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = z_3 - \frac{3}{8}\alpha z_1(z_1^2 + z_2^2), \qquad \frac{dz_4}{d\tau} = \frac{\omega - 1}{\varepsilon} z_3$$

При решении вопроса об области применимости (4.5) следует учесть следующее. Формулы (4.3) определили характерный масштаб для (4.5), равный $t_* = \varepsilon^{-1/2}$. Это имеет место лишь в случае, если все начальные данные z_i имеют порядок единицу, но из (4.3) следует, что для этого необходимо, чтобы начальные данные для x_3 и x_4 из (4.2) имели порядок $\sqrt{\varepsilon}$. В остальных случаях решения (4.2) возрастают почти линейно за конечный интервал времени t, поскольку малые нелинейности на интервал времени порядка единицы существенного влияния на поведение решений оказать не могут. Итак, уравнения (4.5) описывают основные типичные особенности в поведении систем типа (4.1).

Автор благодарит А. М. Молчанова за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила 11 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов А. М. Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 5.
2. Молчанов А. М. Устойчивость в случае нейтрального нелинейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
3. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.