Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РЕЗОНАНСЕ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Доказывается классификационная теорема, позволяющая упрощать системы второго порядка,— в частности, заменять ряды в правой части многочленами,— без нарушения свойств решений, сохраняемых аналитическими преобразованиями в окрестности особой точки. К числу таких свойств принадлежат все топологические. Важнейшее среди них — устойчивость. Хотя вопрос об устойчивости в критических случаях (резонансы порядка $q = 1$, $q = 2$) подробно изучен в работах [1-3], произвольный резонанс в системе второго порядка дает простейшую нетривиальную модель, исследование которой помогает понять природу критических случаев и ее связь с локальной топологической (в частности, аналитической) эквивалентностью систем дифференциальных уравнений [4-5].

В отличие от методов приведения систем к нормальной форме [6] в предлагаемой работе используется теоретико-групповой подход. Изучение орбит группы, индуцированной в пространстве коэффициентов группой всех аналитических гомеоморфизмов окрестности особой точки, позволяет описать множество систем дифференциальных уравнений, получающихся из каждой данной аналитическими преобразованиями. Таким образом, вычислив все инварианты преобразований можно полностью классифицировать рассматриваемые системы. При этом выясняется, что нормальная форма плохо приспособлена для такой классификации, т. к. не содержит всех представителей классов аналитически эквивалентных систем. Случай чисто мнимых собственных чисел линейной части рассмотрен автором отдельно [1].

1. Постановка задачи и результат. Рассматривается множество систем дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$dx_1 / dt = n_1 x_1 + f_1(c, x_1, x_2) \qquad (1.1)$$
$$dx_2 / dt = -n_2 x_2 + f_2(c, x_1, x_2)$$

где n_1, n_2 — взаимно простые фиксированные натуральные числа; f_1, f_2 — всевозможные вещественные функции, аналитические в окрестности точки $x \equiv \{x_1, x_2\} = 0$ с разложениями без линейных членов; $c = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — упорядоченный набор коэффициентов этих разложений. Множество всех c, которым отвечают сходящиеся ряды, образует бесконечномерное линейное пространство R. Каждой системе (1.1) соответствует некоторая точка $c \in R$.

Определение 1. Системы $c' \in R$, $c'' \in R$ аналитически эквивалентны (локально), если существует аналитический гомеоморфизм окрестности точки $x = 0$ в себя, преобразующий эти системы одна в другую.

[1] Аналитическая эквивалентность и устойчивость систем второго порядка при резонансе 1 : 1, препринт № 14 Института проблем механики АН СССР, 1972.

Задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия эквивалентности систем (1.1) в смысле определения 1.

Упорядоченный набор коэффициентов однородных форм фиксированной степени s, содержащихся в разложениях функций f_1, f_2, будем рассматривать как координаты точек эвклидового пространства R_s^*.

Положим $R_2 = R_s^*$, $R_s = R_s^* \times R_{s-1}$ (прямое произведение), $s = 3, 4, \ldots$. Отношение порядка для R_s и R на совпадающем множестве элементов предполагается одинаковым.

Координатами точки $c_s \in R_s$ будут коэффициенты полиномов степени s, получающиеся из разложений f_1, f_2, отбрасыванием членов порядка большего, чем s. Если N_s — общее число этих коэффициентов, то

$$\dim R_s = N_s$$

Пространство R можно рассматривать как индуктивный предел последовательности R_2, R_3 ...

Рассмотрим группу G всех аналитических преобразований окрестности точки $x = 0$, оставляющих эту точку на месте и сохраняющих линейную часть системы (1.1). Преобразования группы G индуцируют группу преобразований G′: $G' \times R \to R$ [1], так что всякое преобразование из $G \times G'$ преобразует систему (1.1) в систему того же вида с фазовым вектором x' и коэффициентами c'.

Легко проверить, что пространства R_s инвариантны относительно преобразований группы G′, а совокупность преобразований из G′, нетождественно действующих в R_s, образует группу Ли G_s'. При этом

$$\dim G_s' = N_s + 2$$

Пусть

$$u = \sum_{k_1,\, k_2 \in M} a_{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$$

— произвольный полином или формальный степенной ряд, N — множество значений целочисленной функции $k_1 n_1 - k_2 n_2$ при $k_1, k_2 \in M$. Если $\nu \in N$, то положим

$$u^\nu = \sum_{k_1 n_1 - k_2 n_2 = \nu} a_{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$$

Тогда имеют место однозначные разложения

$$u = \sum_\nu u^\nu = \sum_\nu \sum_m u_m^\nu, \quad \nu \in N, \quad m = k_1 + k_2$$

Системе (1.1) поставим в соответствие оператор

$$L = (n_1 x_1 + f_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-n_2 x_2 + f_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

[1] Соответствующие уравнения выписываются в конечном виде [7].

Рассмотрим формальный ряд $u = u_q + u_{q+1} + \ldots$ (где $q = n_1 + n_2$ — порядок резонанса), удовлетворяющий условиям

$$(Lu)^\nu = 0 \quad \text{при всех} \quad \nu \neq 0 \tag{1.2}$$
$$u^\circ = u_q = x_1^{n_2} x_2^{n_1}$$

Тогда

$$Lu = \sum_{\varkappa=2}^{\infty} (Lu)^\circ_{\varkappa q} \equiv \sum_{\varkappa=2}^{\infty} G_{\varkappa q} \equiv \sum_{\varkappa=2}^{\infty} g_{\varkappa q}(c)\,(x_1^{n_2} x_2^{n_1})^\varkappa$$

Здесь параметры $g_{\varkappa q}$ не зависят от фазового вектора x, $\varkappa$ — показатель степени одночлена $u_q = x_1^{n_2} x_2^{n_1}$.

Теорема 1. Набор многообразий в R

$$\Gamma_h\colon\ g_{2q}(c) = \ldots = g_{hq}^{(c)} = 0, \qquad g_{(h+1)q}(c) \neq 0$$

исчерпывает при $h < \infty$ все инвариантные многообразия группы G'.

На каждом инвариантном многообразии Γ_h группа G' допускает $l + h$ инвариантов $(l > 1)$

$$I_1(c), \ldots, I_{h+l}(c)$$

При $\varkappa \leqslant h + 1$ функции $g_{\varkappa q}(c)$, $I_\varkappa(c)$ зависят лишь от точек $c \in R_{s_0}$, $s_0 = 2qh + 1$.

Системы $c' \in R$ и $c'' \in R$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точки c' и c'' лежат на одном и том же инвариантном множестве

$$h' = h'', \qquad I_\varkappa(c') = I_\varkappa(c'') \quad (1 \leqslant \varkappa \leqslant h + l)$$

и принадлежат либо одной и той же компоненте связности (точки c' и c'' можно соединить непрерывной кривой, лежащей в том же инвариантном множестве, что и сами эти точки), либо двум разным, но существует отражение $x_1' \to -x_1$, $x_2' \to x_2$, порождающее гомеоморфизм этих компонент одна в другую.

Единственный случай, когда применение теоремы 1 не требует фактического вычисления инвариантов, описывает следующая теорема.

Теорема 2. Система (1.1) формально эквивалентна системе

$$\frac{dx_1}{dt} = n_1 x_1 + \sum_{\mu=2}^{s} f_{1,\mu}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -n_2 x_2 + \sum_{\mu=2}^{s} f_{2,\mu}$$

полученной из системы (1.1) отбрасыванием членов разложений порядка выше s, тогда и только тогда, если

$$s \geqslant 2qh + 1$$

Для одного из простейших случаев $h = 1$, $q = 2$ (чисто мнимые собственные значения линейной части) инварианты группы G' (их два) явно вычислены. Это позволило дать классификацию систем, допускающих аналитическую группу симметрии. Указанный частный результат содержит следующая теорема.

Теорема 3. При $h = 1$, $q = 2$ множество формально неэквивалентных систем второго порядка описывается системами (в полярных координатах)

$$\begin{aligned} \rho^{\cdot} &= \rho^3 (\sigma_1 + \sigma_2 \varkappa_2 \rho^2) \\ \varphi^{\cdot} &= \sigma_3 + \sigma_4 \varkappa_1 \rho^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

когда пара $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ числовых параметров пробегает всю вещественную плоскость, а σ_i принимают независимо одно от другого значения ± 1.

Отметим, что системы (1.3) легко интегрируются и дают в пространстве $x \times t$ 24 топологически различные картины.

Доказательство теорем 1, 2 приводится в п. 3. Ему предшествует формулировка вспомогательных предложений (п. 2), доказательства которых, исключая основную лемму 6, опущены (они могут быть воспроизведены по схеме работы [7]). Теорема 3 доказана в п. 4.

2. Вспомогательные предложения. *Лемма* 0. Условия (1.2) определяют формальный ряд

$$u = x_1^{n_2} x_2^{n_1} + u_{q+1} + \ldots \tag{2.1}$$

единственным образом.

Определение 2. Ряд (2.1), удовлетворяющий условиям (1.2), называется стандартным.

Определение 3. Формальный ряд v, удовлетворяющий уравнению $Lv = \overset{\circ}{w}_{q(p+1)} + O(q(p+1)+1)$, в котором форма $\overset{\circ}{w}_{q(p+1)} \not\equiv 0$ — младший член разложения правой части, называется p-рядом. Описание всех p-рядов дает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $G_{\varkappa q}$, вычисленные для стандартного ряда, удовлетворяют условиям

$$G_{2q} = \ldots = G_{hq} = 0, \qquad G_{(h+1)q} \neq 0$$

Тогда

1) не существует формального ряда, удовлетворяющего уравнению $Lv = 0$ во всех порядках;

2) множество всех p-рядов совпадает с множеством формальных рядов вида

$$\varphi[u] = au^{p-h+1} + O(q(p-h+1)+1), \quad a \neq 0$$

где u — стандартный ряд, u^{p-h+1} — его степень;

3) если v — произвольный p-ряд, то

$$Lv = a(p-h+1) u_q^{p-h} G_{(h+1)q} + O(q(p+1)+1)$$

Пусть $\xi = \xi_k + \xi_{k+1} + \ldots$, $\eta_k = \eta_k + \eta_{k+1} + \ldots$ — формальные степенные ряды. Операторный ряд $Z = Z_k + Z_{k+1} + \ldots$ $(Z_\mu = \xi_\mu \partial / \partial x_1 + \eta_\mu \partial / \partial x_2)$ будем называть оператором порядка k. Положим $Z_\mu{}^\nu = \xi_\mu^{\nu+n_1} \partial / \partial x_1 + \eta_\mu^{\nu-n_2} \partial / \partial x_2$. Пусть, как обычно, $[L, Z]$ — коммутатор.

Лемма 2. Если оператор Z порядка μ удовлетворяет уравнению $[L, Z] = 0$ с точностью до членов порядка $m > \mu$, то необходимо $Z_\mu = Z_\mu^\circ$

$$Z_\mu = \begin{cases} 0, & \mu \neq kq + 1 \\ u_q^{(\mu-1)/q} (\alpha_\mu X_1 + \beta_\mu L_1), & \mu = kq + 1 \end{cases}$$

где α_μ, β_μ — постоянные

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad L_1 = n_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - n_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Лемма 3. Пусть оператор $Z = Z_\mu + Z_{\mu+1} + \ldots$ удовлетворяет условиям

$$[L, Z]^\nu = 0 \quad \text{при всех } \nu \neq 0, \qquad Z^\circ = U^\circ \tag{2.2}$$

где оператор U° наперед задан.

Условия (2.2) определяют оператор Z единственным образом.

Для оператора Z, определенного условиями (2.2), справедливо тождество

$$[L, Z] = [L, Z]^\circ = \sum_{\varkappa=p}^{\infty} [L, Z]^\circ_{\varkappa q+1}, \qquad [L, Z]^\circ_{pq+1} \neq 0 \tag{2.3}$$

Определение 3. Оператор $Z_{(\mu)} = Z_{\mu q+1} + Z_{\mu q+2} + \ldots$, удовлетворяющий тождеству (2.3), называется p-оператором. Если оператор U° выбран так, что число p — максимально, оператор Z называется максимальным.

Согласно лемме 2 максимальные p-операторы необходимо образуют линейную оболочку множества независимых операторов вида

$$X_{(\mu)} = u_q^\mu X_1 + X_{\mu q+2} + \ldots, \qquad Y_{(\mu)} = u_q^\mu L_1 + Y_{\mu q+2} + \ldots \tag{2.4}$$

Ближайшая задача — вычислить для них натуральные числа p и $\tau = q(p - \mu)$.

Лемма 4. Пусть оператор $X \equiv X_{(0)} = X_1 + X_2 + \ldots$ — максимальный. Имеем

$$[L, X] = P^\circ_{qm+1} + P^\circ_{q(m+1)+1} + \ldots, \qquad P^\circ_{qk+1} \equiv [L, X]^\circ_{qk+1}$$

Справедливо неравенство $m \leqslant h$.

Лемма 5. Для максимального оператора $Z_{(\mu)} = u_q^\mu (a_\mu X_1 + b_\mu L_1) + \ldots$ $(b_\mu^2 + a_\mu^2 \neq 0)$ справедливо равенство $[L, Z_{(\mu)}] = P^{*\circ}_{pq+1} + P^{*\circ}_{(p+1)q+1} + \ldots$, в котором

$$P^{*\circ}_{pq+1} = \begin{cases} a_\mu u_q^\mu P^\circ_{mq+1}, & m < h, \quad a_\mu \neq 0 \\ a_\mu u_q^\mu P^\circ_{mq+1} + \mu u_q^{\mu-1} G_{(h+1)q} (a_\mu X_1 + b_\mu L_1), & m = h \end{cases}$$

независимо от выбора $Z^\circ_{(\mu)}$.

Лемма 6.

1) При $a_\mu \neq 0$ максимальные операторы $Z_{(\mu)}$ содержатся среди $X_{(\mu)}$. Для них

$$p = \mu + m, \qquad \tau = qm$$

2) При $a_\mu = 0$, $\mu \neq m$ максимальные операторы $Z_{(\mu)}$ содержатся среди операторов $Y_{(\mu)}$. Для них

$$p = \mu + 2h - m, \qquad \tau = q\,(2h - m)$$

3) При $\mu = m$ и конечном h существует единственный оператор $Z_{(m)} \equiv \equiv Y_{(m)}$, удовлетворяющий уравнению $[L, Z] = 0$ во всех порядках. Для него $\tau = \infty$.

Доказательство. В силу лемм 4 и 5 доказательство леммы 6 распадается на случаи: 1) $m = h$; 2) $m < h$, $a_\mu \neq 0$; 3) $m < h$, $a_\mu = 0$.

1) Пусть $m = h$. Тогда $[L, X] = \overset{\circ}{P}_{qh+1} + \overset{\circ}{P}_{q(h+1)} + \ldots$. Выясним строение оператора $\overset{\circ}{P}_{qh+1}$. Для стандартного ряда u

$$L\,(Xu) = [L,\, X]\,u + XLu = \overset{\circ}{P}_{qh+1}u_q + q\,(h+1)\,G_{(h+1)\,q} + \ldots$$
$$\overset{\circ}{P}_{ph+1} = u_q^{\;h}\,(\alpha X_1 + \beta L_1)$$

Отсюда

$$L\,(Xu) = q\,(\alpha + (h+1)\,g_{(h+1)\,q})\,u_q^{h+1} + \ldots$$

Покажем, что $\alpha + (h+1)\,g_{(h+1)\,q} \neq 0$. Предположив противное, найдем $L\,(Xu) = = w_{q\,(h+1)+1} + \ldots \equiv w$. Определим ряд $\omega = \omega_{q\,(h+1)+1} + \ldots$ разрешимым при всех $\nu \neq 0$ соотношением $(L\omega)^\nu = w^\nu$. Тогда

$$Lv = w - L\omega = w^\circ - (L\omega)^\circ = \overset{\prime\circ}{w}_{q\,(h+k)} + \ldots \qquad (k > 1)$$

т. е. $v \equiv Xu - \omega = qu_q + \ldots$ будет $(h+k)$-рядом, что при $k > 1$ невозможно (лемма 1). Отсюда, повторно использовав лемму 1, получим

$$\alpha = -\,hg_{(h+1)\,q}, \quad \overset{\circ}{P}_{qh+1} = u_q^{\;h}\,(-\,hg_{(h+1)\,q}X_1 + \beta L_1)$$

По формуле леммы 5 находим

$$\overset{*\circ}{P}_{qp+1} = (\mu - h)\,a_\mu g_{(h+1)\,q}u_q^{h+\mu}X_1 + b_\mu{}'\,u_q^{h+\mu}L_1$$
$$b_\mu{}' = \beta a_\mu + \mu b_\mu g_{(h+1)\,q}$$

Таким образом, при $m = h$

$$[L,\, Z_{(\mu)}] = u_q^{\mu+h}\,[(\mu - h)\,a_\mu g_{(h+1)\,q}X_1 + b_\mu{}'L_1] \tag{2.5}$$

и этот результат не зависит от выбора операторов $\overset{\circ}{Z}_{q\,(\mu+1)+1}, \overset{\circ}{Z}_{q\,(\mu+2)+1}, \ldots$. Иначе говоря, при $m = h$, $\mu \neq h$ (если $a_\mu = 0$, то $b_\mu \neq 0$) оператор $Z_{(\mu)}$ максимален и для него

$$p = \mu + h, \qquad \tau = qh$$

При $\mu = h$ возьмем $b_\mu = -\,\beta a_\mu / \mu g_{(h+1)\,q}$. Тогда

$$b_\mu' = 0, \qquad [L,\, Z_{(h)}] = \widetilde{P}^{\circ}_{q\,(2h+1)+1} + \ldots$$

По формуле (2.5)

$$[L,\, Z_{(h+1)}] = u_q^{2h+1}\,[a_{h+1}g_{(h+1)\,q}X_1 + b_{h+1}'L_1] + \ldots$$
$$b_{h+1}' = a_{h+1}\beta + (h+1)\,b_{h+1}g_{(h+1)\,q}$$

Так как $\overset{*\circ}{P}_{q\,(2h+1)+1} = u_q^{2h+1}\,(\alpha_1 X_1 + \beta_1 L_1)$, то, взяв

$$a_{h+1} = \frac{\alpha_1}{g_{(h+1)\,q}}, \qquad b_{h+1} = \frac{\beta_1 - a_{h+1}\beta}{(h+1)\,g_{(h+1)}}.$$

получим

$$[L, Z_{(h)} - Z_{(h+1)}] = \widetilde{P}^{\circ}_{g(2h+2)+1} + \ldots$$

Поступая аналогично, т. е. выбирая в операторах $Z_{(h+k)} = u_q^{h+k}(a_{h+k}X_1 + b_{h+k}L_1) + \ldots$ параметры a_{h+k}, b_{h+k} по формулам

$$a_{h+k} = \frac{\alpha_k}{g_{(h+1)q}}, \qquad b_{h+k} = \frac{\beta_k - a_{h+k}\beta}{(h+k)\,g_{(h+k)q}}$$

построим единственный оператор $Z = Z_{(h)} - Z_{(h+1)} - Z_{(h+z)} - \ldots$, удовлетворяющий уравнению $[L, Z] = 0$ во всех порядках.

2) Пусть $m < h$, $a_\mu \neq 0$. Согласно лемме 5

$$[L, Z_{(\mu)}] = a_\mu u_q^\mu P^{\circ}_{qm+1} + \ldots$$

Так как этот результат не зависит от выбора оператора $Z^{\bullet}_{(\mu)}$, то оператор $Z_{(\mu)}$ максимален и

$$p = \mu + m, \qquad \tau = qm$$

Без нарушения общности $b_\mu = 0$, так что $Z_{(\mu)}$ находится среди операторов $X_{(\mu)}$.

3) Пусть теперь $m < h$, $a_\mu = 0$.

Путем построений, уже использовавшихся ранее, убеждаемся в том, что $P^{\circ}_{qm+1}u_q = 0$, откуда

$$P^{\circ}_{qm+1} = \beta_m u_q{}^m L_1, \qquad \beta_m \neq 0 \tag{2.6}$$

Если $Y_{(\mu)} = u_q{}^\mu L_1 + Y_{q\mu+2} + \ldots$ — максимальный оператор, то это значит, что значения $Y^{\circ}_{q(\mu+\gamma)+1} = u_q^{\mu+\gamma}(a^{(\gamma)}_{\mu+\gamma}X_1 + b^{(\gamma)}_{\mu+\gamma}L_1)$ выбраны для $\gamma \geqslant 1$ таким образом, что в соотношении

$$[L, Y_{(\mu)}] = Q^{\circ}_{qp+1} + Q^{\circ}_{q(p+1)+1} + \ldots$$

число p — максимально.

Нетрудно доказать, что из максимальности p следует

$$Q^{\circ}_{qp+1}u_q \neq 0 \tag{2.7}$$

Пусть далее $a^{(\mu)}_{\mu+\gamma} = 0$ при $\gamma < \gamma_0$ и $a^{(\gamma_0)}_{\mu+\gamma_0} \neq 0$. Для $1 \leqslant \gamma < \gamma_0$ определим индуктивно операторы

$$Y^{(0)}_{(\mu)} \equiv Y_{(\mu)}, \qquad Y^{(\gamma)}_{(\mu)} = Y^{(\gamma-1)}_{(\mu)} - u^{\mu+\gamma}b^{(\mu)}_{\mu+\gamma}L \tag{2.8}$$

Индукцией по γ и прямой проверкой для $\gamma = 1$ убеждаемся в том, что формулы

$$[L, Y^{(\gamma)}_{(\mu)}] = -\mu u_q^{\mu-1}G_{(h+1)q}L_1 + \ldots$$

$$Y^{(\gamma)}_{(\mu)} = b^{(\mu)}_{\mu+\gamma}u_q^{\mu+\gamma}L_1 + Y^{(\gamma)}_{q(\mu+\gamma)+2} + \ldots \qquad \gamma \leqslant h-1$$

верны при $\gamma = 1, \ldots, \gamma_0 - 1$.

Определим

$$Y^{(\gamma_0)}_{(\mu)} = Y^{(\gamma_0-1)}_{(\mu)} - u^{\mu+\gamma_0-1}b^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0-1}L = Y^{(\gamma_0)}_{q(\mu+\gamma_0-1)+2} + \ldots$$

Получим

$$[L, Y^{(\gamma_0)}_{(\mu)}] = -\mu u_q^{\mu-1}G_{(h+1)q}L_1 + \ldots$$

Поскольку $\gamma_0 \leqslant h$, то отсюда

$$Y^{(\gamma_0)}_{q(\mu+\gamma_0-1)+2} = \ldots = Y^{(\gamma_0)}_{q(\mu+\gamma_0)} = 0$$

$$Y^{(\gamma_0)}_{q(\mu+\gamma_0)+1} = (Y^{(\gamma_0)}_{q(\mu+\gamma_0)+1})^{\circ} = u_q^{\mu+\gamma_0}(a^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}X_1 + b^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}L_1)$$

Далее

$$Y^{(\gamma_0+1)}_{(\mu)} = Y^{(\gamma_0)}_{(\mu)} - u^{\mu+\gamma_0}(a^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}X + b^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}L) = Y^{(\gamma_0+1)}_{q(\mu+\gamma_0)+2} + \ldots$$
$$[L, Y^{(\gamma_0+1)}_{(\mu)}] = -\mu u_q^{\mu-1}G_{(h+1)q}L_1 - a^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}u_q^{\mu+\gamma_0}P^{\circ}_{qm+1} + \ldots \qquad (2.9)$$

Необходимо выполняется равенство

$$\Omega^{\circ} \equiv \mu u_q^{\mu-1}G_{(h+1)q}L_1 + a^{(\mu)}_{\mu+\gamma_0}u_q^{\mu+\gamma_0}P^{\circ}_{qm+1} = 0$$

из которого следует

$$\gamma_0 = h - m$$

так как любое из трех предположений (это доказывается путем однотипных построений)

$$1)\ \gamma_0 > h - m, \qquad 2)\ \gamma_0 < h - m, \qquad 3)\ \gamma_0 = h - m,\ \Omega^{\circ} \neq 0$$

приводит к противоречию.

Таким образом

$$a^{(\mu)}_{\mu+1} = \ldots = a^{(\mu)}_{\mu+h-m-1} = 0, \qquad a^{(\mu)}_{\mu+h-m} \neq 0 \qquad (2.10)$$

Используя рекуррентные формулы (2.8), равенства (2.9) и (2.10), найдем

$$Y_{(\mu)} = \varphi L + a^{(\mu)}_{\mu+h-m}u^{\mu+h-m}X + Y^{(\gamma_0+1)}_{q(\mu+\gamma_0)+2} + \ldots$$
$$\varphi = u^{\mu} + b^{(\mu)}_{\mu+1}u^{\mu+1} + \ldots + b^{(\mu)}_{\mu+h-m}u^{\mu+h-m}$$

где φ — полином степени $\mu + h - m$ относительно стандартного ряда. Рассмотрим ряд $w \equiv Y_{(\mu)}u$. Имеем

$$w = qa^{(\mu)}_{\mu+h-m}u_q^{\mu+h-m+1} + \ldots$$

Обозначим $G = G_{(h+1)q} + G_{(h+2)q} + \ldots$ и введем ряд

$$w' = w - \varphi G = qa^{(\mu)}_{\mu+h-m}u_q^{\mu+h-m+1} + \ldots$$

Несложный подсчет дает

$$Lw' = Q^{\circ}_{qp+1}u_q + (h+1)\,qa^{(\mu)}_{\mu+h-m}g_{(h+1)q}u_q^{\mu+2h-m+1} + \ldots \qquad (2.11)$$

Пусть $q(p+1) < q(\mu+2h-m+1)$. Тогда $Lw' = Q^{\circ}_{qp+1}u_q + \ldots$ и w' — p-ряд. Согласно лемме 1, $\mu + h - m + 1 = p - h + 1$ и, следовательно, $q(p+1) = q(\mu+2h-m+1)$, вопреки предположению. Если $q(p+1) > q(\mu+2h-m+1)$, то

$$Lw' = q(h+1)\,a^{(\mu)}_{\mu+h-m}u_q^{h-m+\mu}G_{(h+1)q} + \ldots$$

и w' является $(\mu+2h-m)$-рядом. Но по лемме 1 должно быть

$$Lw' = (\mu + h - m + 1)\,qa^{(\mu)}_{\mu+h-m}u_q^{\mu+h-m}G_{(h+1)q} + \ldots$$

что при $\mu \neq m$ невозможно.

Итак, если $\mu \neq m$, то выполняется равенство $q(p+1) = q(\mu+2h-m+1)$, откуда $p = \mu + 2h - m$. При этом получаем

$$Q^{\circ}_{qp+1}u_q = (\mu - m)\,qa^{(\mu)}_{\mu+h-m}u_q^{\mu+h-m}G_{(h+1)q} + \ldots$$

так что

$$[L, Y_{(\mu)}] = (\mu - m)\,a^{(\mu)}_{\mu+h-m}g_{(h+1)q}u_q^{\mu+2h-m}X_1 + A_{\mu}u_q^{\mu+2h-m}L_1 + \ldots \qquad (2.12)$$

Таким образом, при $\mu \neq m$ оператор $X_{(\mu)}$ максимален и

$$p = \mu + 2h - m, \qquad \tau = q(2h - m)$$

Пусть теперь $\mu = m$. Тогда $w' = qa_h^{(m)}u_q^{h+1} + \ldots$ и по лемме 1

$$Lw' = q\,(h+1)\,a_h^{(m)}g_{(h+1)q}u_q^{2h+1} + \ldots \tag{2.13}$$

Отсюда следует $p > 2h$.

Действительно, предположение $p < 2h$, вытекающее из $q\,(p+1) < q\,(\mu + 2h - m + 1)$ при $\mu = m$, как показано, приводит к противоречию. Из $p = 2\,h$ следует $Q^\circ_{qp+1}u_q = 0$ (путем сопоставления формул (2.11) и (2.13)), что приворечит (2.7). Таким образом, в соотношении

$$[L, Y_{(m)}] = Q^\circ_{qp+1} + Q^\circ_{q(p+1)+1} + \ldots$$

$p > 2h$. Покажем, что в действительности никакое конечное p не может быть максимальным. В самом деле, пусть

$$Q^\circ_{qp+1} = u_q^p\,(CX_1 + DL_1), \qquad C^2 + D^2 \neq 0$$

Рассмотрим максимальные операторы $Y_{(p+m-2h)}$, $X_{(p-m)}$. Для них

$$[L, Y_{(p+m-2h)}] = a_{p-h}^{(p+m-2h)}g_{(h+1)q}\,(p-2h)\,u_q^pX_1 + A_{p+m-2h}u_q^pL_1 + \ldots$$

$$(a_{p-h}^{(p+m-2h)} \neq 0)$$

$$[L, X_{(p-m)}] = a_{p-m}\beta_m u_q{}^pL_1 + \ldots$$

$$(a_{p-m}\beta_m \neq 0)$$

Определим числа α и β формулами

$$\alpha a_{p-h}^{(p+m-2h)}g_{(h+1)q}\,(p-2h) = C$$

$$\alpha A_{p+m-2h} + \beta\beta_m a_{p-m} = D$$

Это возможно, так как определитель этой системы

$$\Delta = (p-2h)\,\beta_m a_{p-m}a_{p-h}^{(p+m-2h)}g_{(h+1)q} \neq 0$$

Оператор $Y = Y_{(m)} - \alpha Y_{(p+m-2h)} - \beta X_{(p-m)}$ будет удовлетворять уравнению

$$[L, Y] = Q'^\circ_{qp_1+1} + Q'^\circ_{q(p_1+1)+1} + \ldots$$

в котором $p_1 \geqslant p+1$.

Таким образом, при $\mu = m$ можно построить оператор $Y_{(m)}$, удовлетворяющий уравнению $[L, Y_{(m)}] = 0$ во всех порядках.

Оператор $Y_{(m)}$ является единственным. В самом деле, если бы каждый из двух операторов $Y'_{(m)} = u_q^mL_1 + Y'_{qm+2} + \ldots$ и $Y''_{(m)} = u_q^mL_1 + Y''_{qm+2} + \ldots$ удовлетворял уравнению $[L, Y_{(m)}] = 0$, то получили бы

$$[L, Y'_{(m)} - Y''_{(m)}] = 0,\ Y'_{(m)} - Y''_{(m)} = u_q^{m+1}\,(aX_1 + bL_1) + \ldots$$

что невозможно: разложение оператора, удовлетворяющего уравнению $[L, Y] = 0$, во всех порядках должно начинаться с оператора порядка $qm + 1$.

Лемма 6 доказана.

3. Доказательство теорем 1, 2. Доказательство основано на перечислении инвариантных множеств группы $\mathbf{G}'$.

От групп $\mathbf{G}'$ и $\mathbf{G} \times \mathbf{G}'$ удобно перейти к их алгебрам, — $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^*$, — операторов

$$Z = \xi\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta\frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathbf{L}, \qquad Z^* = Z + \sum_i \zeta_i\,(c)\frac{\partial}{\partial c_i} \in \mathbf{L}^* \tag{3.1}$$

Условие инвариантности системы (1.1) относительно преобразований группы $G \times G'$ дает $[L, Z^*] = 0$ или, что то же самое

$$[L, Z] = \sum_i \left(\zeta_i (c) \frac{\partial f_1}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta_i (c) \frac{\partial f_2}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) должно выполняться тождественно по x_1, x_2 и может служить для вычисления элементов $\zeta_i^j (c)$ векторной матрицы (ζ_i^j) алгебры, отвечающей группе G' (в естественном базисе). Из равенства (3.2) сразу видно, что если Z — произвольный оператор порядка μ, то разложение правой части (3.2) по x_1, x_2 начинается, вообще говоря, с членов порядка μ. Значит $\zeta_i (c) \equiv 0$ для всех i, которые отвечают коэффициентам при степенях $f_1 f_2$, меньших, чем μ. Отсюда — блочно-треугольное строение матрицы (ζ_i^j) (нули — в левом нижнем углу [1]). Если оператор Z — максимальный, то он делает нулями, сверх того, все элементы своей строки, принадлежащие $\tau = q (p - \mu)$ ненулевым блокам. При этом никакой линейной комбинацией оператора Z с операторами более высокого порядка это число нельзя увеличить.

Рассмотрим пространство R_s. Операторы $Z \in \mathbf{L}$, отвечающие нетождественным (априори) преобразованиям пространства R_s, образуют некоторое множество $\mathbf{L}_s$ (не являющееся алгеброй Ли).

Пусть r_s — число максимальных операторов $Z_{(\mu)} \in \mathbf{L}_s$ таких, что

$$[L, Z_{(\mu)}] = O^* (qp + 1), \qquad qp + 1 > s \tag{3.3}$$

где $O^* (qp + 1)$ — оператор порядка $qp + 1$. Из $Z_{(\mu)} \in \mathbf{L}_s$ вытекает

$$q\mu + 1 \leqslant s \tag{3.4}$$

Сопоставление формул (3.2) и (3.3) показывает, что в векторной матрице (ζ_i^j), отвечающей группе G_s', можно образовать точно r_s строк, состоящих из нулей. Это означает, что группа G_s' допускает ровно $\rho_s = r_s - 2$ функционально независимых инвариантных множеств [2].

Отметим, что формальность большинства рассматривавшихся в данной работе разложений (при конечном h) не играет роли: число τ для всех максимальных операторов, кроме $Y_{(m)}$, фактически определяется лишь конечным числом членов разложения. Аналитичность оператора $Y_{(m)}$ либо вовсе не имеет места (тогда $l > 1$), либо вытекает из предположения о существовании аналитической группы симметрии для исходных уравнений.

Обозначим $\alpha (X)$ — число максимальных операторов $X_{(\mu)}$, удовлетворяющих условиям (3.3) и (3.4); $\beta_1 (Y)$ — число максимальных операторов $Y_{(\mu)}$, удовлетворяющих условию (3.4); $\beta_2 (Y)$ — число максимальных операторов $Y_{(\mu)}$, не удовлетворяющих условию (3.3).

---

[1] Подробнее о строении матрицы (ζ_i^j) см. в работе [8].

[2] Под инвариантным множеством здесь понимается инвариантное многообразие либо одномерный континуум гиперповерхностей, задаваемых инвариантом.

Тогда число инвариантных множеств может быть вычислено по формуле

$$\rho_s = \alpha(X) + \beta_1(Y) - \beta_2(Y) - 2 \tag{3.5}$$

Вычислим число ρ_s для $s = 2qh$.

Величина $\alpha(X)$ равна числу целочисленных решений (относительно μ) неравенств

$$q\mu + 1 \leqslant 2qh < q\mu + 1 + \tau \qquad (\tau = qm)$$

откуда $\alpha(X) = m$.

Величина $\beta_1(Y)$ равна числу целочисленных решений неравенств

$$q\mu + 1 \leqslant 2qh, \qquad \mu \geqslant 0$$

откуда $\beta_1(Y) = 2h$.

Величина $\beta_2(Y)$ равна числу целочисленных решений неравенства

$$qp + 1 \leqslant 2qh, \qquad \mu \neq 0 \qquad (p = \mu + 2h - m)$$

(значение $\mu = 0$ исключено, так как $Y_{(0)} \equiv L$ удовлетворяет условию (3.3)). Отсюда $\beta_2(Y) = m - 1$.

По формуле (3.5)

$$\rho_s = 2h - 1 \qquad (s = 2qh) \tag{3.6}$$

Пусть теперь $s = 2qh + qk + k_1$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant k_1 < q$, $k^2 + k_1^2 \neq 0$.

Величина $\alpha(X)$ равна числу целочисленных решений неравенств

$$q\mu + 1 \leqslant 2qh + qk + k_1 < q\mu + 1 + \tau \quad (\tau = qm)$$

откуда $\alpha(X) = m$.

Величина $\beta_1(Y)$ равна числу целочисленных решений неравенств

$$q\mu + 1 \leqslant 2qh + qk + k_1, \qquad \mu \geqslant 0$$

Отсюда

$$\beta_1(Y) = \begin{cases} 2h + k, & k_1 = 0 \\ 2h + k + 1, & k_1 > 0 \end{cases}$$

Величина $\beta_2(Y)$ равна числу целочисленных решений неравенства

$$q\mu + 1 + \tau \leqslant 2qh + qk + k_1, \qquad \mu \neq 0,\ m$$
$$(\tau = q(2h - m))$$

(значения $\mu = 0$, m исключены, так как операторы $Y_{(0)}$, $Y_{(m)}$ условию 3.3) удовлетворяют); получим

$$\beta_2(Y) = \begin{cases} m + k - 2, & k_1 = 0 \\ m + k - 1, & k_1 > 0 \end{cases}$$

Таким образом, независимо от m, k, k_1

$$\rho_s = 2h \qquad (s \geqslant 2qh + 1) \tag{3.7}$$

Сопоставляя формулы (3.6) и (3.7) видим, что, начиная с номера $s_0 = 2qh + 1$, группы G_s' $(s \geqslant s_0)$, действующие в R_s как группы преобразований, имеют одно и то же число ($2h$) инвариантных множеств.

Инвариантные множества группы G_{s_0}' зависят, очевидно, лишь от точек пространства R_{s_0}. Кроме того, каждое из них, оставаясь инвариантным для всех групп G_s' $(s > s_0)$, будет таковым и для группы G' (это следует из инвариантности подпространства R_{s_0} относительно действия группы G').

Кроме этих инвариантных множеств группа G' может иметь лишь те, которые являются следствиями требования сходимости преобразований.

Из леммы 6 вытекает, что числа τ для максимальных операторов изменяются вместе с h. Изменение же чисел τ сопровождается изменением ранга групповых матриц (ζ_i^j). Поэтому многообразия

$$g_{2h} = 0; \ g_{2q} = g_{3q} = 0; \ldots; \ g_{2q} = \ldots = g_{hq} = 0 \qquad (3.8)$$

суть инвариантные многообразия группы G', и дальнейшее понижение ранга отображения $G' \times R \to R$ возможно лишь при $g_{(h+1)q} = 0$. Число инвариантных многообразий (3.8) равно $h-1$, число конечномерных инвариантов равно $h+1$. Понятно, что две системы уравнений вида (1.1) будут эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им точки $c' \in R$ и $c'' \in R$ принадлежат одной и той же орбите группы G'. Для этого они должны лежать на одном и том же инвариантном множестве группы G', откуда

$$h' = h'', \ J_1(c') = J_1(c''), \ldots, \ J_{h+l}(c') = J_{h+l}(c'')$$

($J_\varkappa(c)$ — инварианты G'). Кроме того, точки c' и c'' должны лежать либо в одной, либо в конгруэнтных относительно отражения компонентах связности. В последнем случае преобразование, переводящее c' в c'' (или c'' — в c'), не является элементом непрерывного однопараметрического преобразования.

Теорема 1 доказана. Если в качестве простейших представителей систем (1.1) принять те, которые получаются из системы (1.1) простым отбрасыванием всех членов разложения, начиная с некоторой степени $s+1$, то все условия теоремы 1 будут выполнены для формальных преобразований при $s \geqslant 2qh+1$. Этим доказана теорема 2.

4. Доказательство теоремы 3. При $h=1$ и $q=2$ (пара чисто мнимых корней) число инвариантов равно двум. Для стандартного ряда $u = z\bar{z} + u_3 + \ldots$ и оператора $X_{(0)} = X_1 + X_2 + \ldots$ имеем формулы

$$Lu = g_4(c)\,u_2^2 + g_6(c)\,u_2^3 + \ldots, \qquad u_2 = z\bar{z}$$

$$[L, X_{(0)}] = P_3^0 + P_5^0 + \ldots = u_2(-g_4(c)\,X_1 + \beta_1 L_1) + P_5^0 + \ldots$$

Можно проверить, что функции

$$J_1(c) = \frac{\beta_1(c)}{g_4(c)} \qquad J_2(c) = \frac{g_6(c)\,u_2^3 + 2g_4(c)\,u_2\psi_1 + g_4(c)\,\psi_2}{g_4^2(c)\,u_2^3}$$

$$\left(\psi_1 = \sum_{\mu=-3}^{3} \frac{1}{\mu^3} L_2^{-\mu} L_2^{\mu} u_2, \quad \psi_2 = \sum_{\mu=-3}^{3} \frac{1}{\mu^3} L_2^{\mu} u_2 \cdot L_2^{-\mu} u_2\right)$$

суть инварианты группы G' (проверка ведется в терминах операторов).

Параметры $g_4(c)$ и $g_6(c)$ имеют вид

$$g_4(c) = \frac{1}{u_2^2} L_3^0 u_2 + \ldots, \qquad g_6(c) = \frac{1}{u_2^3} L_5^0 u_2 + \ldots$$

где невыписанные слагаемые не зависят соответственно от L_3 и L_5. Поэтому система равенств $J_1(c) = \varkappa_1$, $J_2(c) = \varkappa_2$ однозначно и непрерывно разрешима относительно коэффициентов при третьей и пятой степенях разложений правых частей уравнений (1.1). Следовательно, эти уравнения описывают в R_5 односвязное (гладкое) множество. В силу однозначной и непрерывной разрешимости уравнения $g_4(c) = 0$ относительно одного из коэффициентов оператора L_3° множество $g_4(c) \neq 0$ состоит из двух односвязных частей: $g_4(c) > 0$, $g_4(c) < 0$.

Таким образом, всевозможные орбиты группы G′ задаются двумя типами соотношений

$$J_1(c) = \varkappa_1, \quad J_2(c) = \varkappa_2, \quad g_4(c) > 0; \quad J_1(c) = \varkappa_1, \quad J_2(c) = \varkappa_2, \; g_4(c) < 0$$

Выбрав в качестве простейшей формы уравнений (1.1) нормальную, подсчитав для нее инварианты J_1, J_2 и учтя знак g_4, после перехода к полярным координатам убедимся в справедливости теоремы 3.

Примечание. Автор признателен А. Д. Брюно, обратившему его внимание на важные примеры из [6]. После их анализа автор уточнил при корректуре ряд формулировок, связанных с предельным переходом от R_8 к R.

Автор считает важным отметить, что трудность предельного перехода преодолевается при помощи развиваемого здесь теоретико-группового подхода единым способом. Показано, например, что группа G′, действующая в пространстве коэффициентов системы $x^\cdot = x^2$, $y^\cdot = y + b_0 x + \ldots + b_k x^{k+1} + \ldots$, интранзитивна и допускает единственный (предельный) инвариант $I = b_0 + \ldots + b_k \mid k! + \ldots$, возникающий из требования сходимости преобразований.

Указанные системы поддаются полной классификации: аналитически эквивалентны только такие, для которых численные значения инварианта I совпадают. При $I = 0$ система эквивалентна своей нормальной форме, что согласуется с формулой Брио и Буке (см. [6], стр. 125). Аналитическую группу симметрии эти уравнения допускают только при $I = 0$.

Поступила 27 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М. — Л., Гостехтеориздат, 1947.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
4. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1971.
5. Рейзинь Л. Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, «Зинатне», 1971.
6. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений, Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25.
7. Мархашов Л. М. О критических случаях устойчивости по Ляпунову стационарных движений. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.