Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 62-50

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА О ЖЕСТКОЙ ВСТРЕЧЕ ДВУХ ТОЧЕК С ИМПУЛЬСНОЙ ТЯГОЙ В ЛИНЕЙНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается дифференциальная игра [1-3], непосредственно примыкающая по теме к статье [4], где рассматривалась аналогичная задача для точек под действием одних только управляющих сил и к статье [5], где исследовалась задача о «мягкой» (по координатам и скоростям) встрече точек в линейном центральном поле.

В предлагаемой статье решается задача на минимакс времени до жесткой (по координатам) встречи двух точек (игроков) с массами m_1, m_2, движущихся под действием позиционных сил $F_1 = -\omega^2 m_1 r_1$, $F_2 = -\omega^2 m_2 r_2$ (r_1, r_2 — радиус-векторы точек относительно центра притяжения) и управляющих сил $f_1 = m_1 u$, $f_2 = -m_2 v$, произвольных по направлению и ограниченных по полному импульсу. Первый игрок минимизирует, а второй максимизирует время до жесткой встречи. Все пространство возможных позиций разделено на две области. В первой области найдены оптимальные управления обоих игроков и минимаксное время до «жесткой» встречи. Во второй области сформировано управление второго игрока, реализуя которое, он избегает встречи при любых действиях первого.

1. Уравнения относительного движения ($x = r_1 - r_2$, $y = r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot}$) после изменения масштабов длин и времени, приводящего к равенству $\omega = 1$, будут иметь вид

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = -x + u + v, \quad \mu^{\cdot} = -|u|, \quad \nu^{\cdot} = -|v| \tag{1.1}$$

$$\mu \geqslant 0, \qquad \nu \geqslant 0 \tag{1.2}$$

где x, y, u, v — трехмерные векторы, $|u|$, $|v|$ — евклидовы модули, а $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ — числа. Ограничения $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ и уравнения $\mu^{\cdot} = -|u|$, $\nu^{\cdot} = -|v|$ равносильны «импульсным» ограничениям на управления u, v первого и второго игроков. Эти ограничения имеют вид

$$\mu^{\circ} - \int_0^{\tau} |u|\, dt = \mu^{(1)}(\tau) \geqslant 0 \tag{1.3}$$

$$\nu^{\circ} - \int_0^{\tau} |v|\, dt = \nu^{(2)}(\tau) \geqslant 0$$

и допускают мгновенные изменения вектора y и чисел μ, ν по формулам

$$y^{(2.1)} = y + \mu_1 + \nu_2, \qquad \mu^{(2.1)} = \mu - |\mu_1|, \qquad \nu^{(2.1)} = \nu - |\nu_2| \tag{1.4}$$

где μ_1, ν_2 — трехмерные векторы. В этом случае будем говорить об импульсных управлениях $u = \mu_1 \delta$, $v = \nu_2 \delta$.

Назовем позицией вектор $w = [x,\ y,\ \mu,\ \nu]$, определяемый совокупностью указанных аргументов и введем в рассмотрение векторы

$$\begin{gathered} w^{(1)} = [x, y^{(1)} = y + \mu_1(w),\ \ \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1(w)|;\ \ \nu^{(1)} = \nu] \\ w^{(2)} = [x, y^{(2)} = y + \nu_2(w),\ \ \mu^{(2)} = \mu,\ \ \nu^{(2)} = \nu - |\nu_2(w)|\,] \\ w^{(2,1)} = [x, y^{(2,1)} = y^{(2)} + \mu_1(w^{(2)}),\ \ \mu^{(2,1)} = \mu - |\mu_1(w^{(2)})|;\ \ \nu^{(2,1)} = \nu^{(2)}] \\ w^{(1,2)} = [x, y^{(1,2)} = y^{(1)} + \nu_2(w^{(1)}),\ \ \mu^{(1,2)} = \mu^{(1)},\ \ \nu^{(1,2)} = \nu - |\nu_2(w^{(1)})|\,] \end{gathered}$$

где $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ означают результаты импульсных действий первого и второго игроков, которые могут быть реализованы в зависимости от вектора w. Вектор $w^{(2.1)}$ ($w^{(1.2)}$) изображает результат импульсных действий сначала второго (первого), а затем первого (второго) игроков.

Пусть вектор $w^{(2.1)}$ $(t \geqslant 0)$, $(w^{(1.2)}$ $(t \geqslant 0))$ задан как функция времени. Позицией при $t = 0$ назовем начальное значение w, а позицией при $t = \tau > 0$ назовем левый предел $w^{(2.1)}$ $(\tau - 0)$, $(w((^{1.2)}\tau - 0))$. Пару u $(w^{(2)}, v)$, v (w) и отвечающую ей траекторию $w^{(2.1)}$ $(t \geqslant 0;$ $\{u$ $(w^{(2)}$, $v)$, v $(w)\}$; w $(0))$ назовем допустимыми, если при всех t траектория единственна, непрерывна справа и удовлетворяет ограничениям (1.2), почти при всех t удовлетворяются уравнения (1.1). Кроме того, на каждом конечном отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ траектория может допускать конечное число скачков по формулам (1.4). Аналогично определим допустимую пару u (w), v $(w^{(1)}$, $u)$ и траекторию $w^{(1,2)}$ $(t \geqslant 0$, $\{u$ $(w), v(w^{(1)}, u)\}$ w $(0))$. Назначим множество M $[\,|\,x\,|\, = 0]$ множеством окончания игры (множеством жесткой встречи) и будем рассматривать на допустимых парах две задачи.

Задача 1. Указать пару u° $(w^{(2)}, v)$, v° (w), чтобы время T $[u, v]$ первого попадания позиции на M удовлетворяло оценкам

$$T\,[u^\circ(w^{(2)}, v),\ v(w)] \leqslant T\,[u^\circ(w^{(2)}, v),\ v^\circ(w)] \leqslant T\,[u\,(v^{(2)}, v),\ v^\circ(w)]$$

Задача 2. Указать управление v_0 $(w^{(1)}, u)$ такое, чтобы траектория, отвечающая любой паре u (w), v_0 $(w^{(1)}, u)$, не попадала на множество M за конечное время.

Пусть y_α, y_β — проекции вектора y на вектор x и на плоскость, перпендикулярную x. Введем правую единичную тройку ортов j_α, j_β, j_γ по формулам

$$\begin{gathered} j_\alpha = x/|x|,\quad j_\beta = y_\beta/|y_\beta|,\quad w \in D_2\,[|x| > 0,\quad |y_\beta| > 0] \\ j_\alpha = x/|x|;\quad j_\beta,\ j_\gamma \text{ произвольны};\ w \in D_2\,[|x| > 0;\ |y_\beta| = 0] \end{gathered}$$

Обозначая нижними индексами α, β, γ проекции вектора по ортам, получим в областях D_1, D_2 следствия уравнения (1.1)

$$\begin{gathered} |x|^\cdot = y_\alpha,\quad y_\alpha^{\ \cdot} = -|x| + u_\alpha + v_\alpha + y_\beta^{\,2}|/|x|, \qquad (1.5) \\ |y_\beta|^\cdot = u_\beta + v_\beta - y_\alpha|y_\beta/|x| \\ |x|^\cdot = y_\alpha,\quad y_\alpha^{\ \cdot} = -|x| + u_\alpha + v_\alpha,\quad |y_\beta|^\cdot = \sqrt{(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2} \end{gathered}$$

и следствия уравнений (1.4)

$$\begin{gathered} y_\alpha^{(2.1)} = y_\alpha + \mu_{1\alpha} + \nu_{2\alpha} \\ |y_\beta^{(2.1)}| = [(|y_\beta| + \mu_{1\beta} + \nu_{2\beta})^2 + (\mu_{1\gamma} + \nu_{2\gamma})^2]^{1/2} \end{gathered}$$

Интуитивно ясно, что решение зависит только от величин $|x|$, y_α, $|y_\beta|$, $\xi = \mu - \nu$. Сохраним за их совокупностью обозначение w.

2. Движение в силу системы (1.1) при $u = v = 0$ допускает первые интегралы энергии и момента количества движения

$$2h(w) = y_\alpha^2 + y_\beta^2 + x^2, \qquad k(w) = |y_\beta||x|$$

а минимальное значение $|y_\beta|^\circ$ величины $|y_\beta|$ при неуправляемом движении имеет вид

$$|y_\beta|^\circ = \sqrt{h(w) - \sqrt{h^2(w) - k^2(w)}}$$

Функция $z(w) = \xi - |y_\beta(w)|^\circ$ делит область $D = D_1 \cup D_2$ на две области

$$D^\circ[|x|>0, \quad z(w) \geqslant 0], \qquad D_0[|x|>0, \quad z(w)<0]$$

Лемма 2.1. Пара $u(w^{(2)}, v)$, $v(w) = 0$ не увеличивает функцию $z(w^{(2)})$, а пара $u(w) = 0$; $v(w^{(1)}; u)$ не уменьшает функцию $z(w)$.

Доказательство. Очевидно, что при $v(w) = 0$ справедливо равенство $w^{(2)} = w$. Рассмотрим какое-либо конечное управление $u = u(w, v)$. Правая производная $z^\cdot(w, u, v = 0)$ будет иметь вид

$$z^\cdot(w, u, 0) = -|u| + \lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\beta u_\beta \quad \text{при } z(w) \neq 0$$

$$\lambda_\alpha = -\frac{y_\alpha z(w)}{2\sqrt{h-k^2}}, \qquad \lambda_\beta = -\frac{y_\beta^2 z(w) + k|x|/z(w)}{2\sqrt{h-k^2}}$$

$$h = h(w), \qquad k = k(w)$$

Нетрудно показать, что оценка $z^\cdot \leqslant 0$ следует из оценки $\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 - 1 \leqslant 0$. Вычислим величину

$$\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 - 1 = -1 + \frac{z^2(2h - x^2) + (2h - z^2) - 2k^2}{4(h - k^2)}$$

где $z = z(w)$. Множитель в квадратной скобке монотонно возрастает по $|x|$ и достигает максимума, равного $4(h - k^2)$ при $|x| = k / z(w)$, равном максимальному значению $|x|$ на неуправляемой траектории. Отсюда следуют оценки $\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 - 1 \leqslant 0$ и $z^\cdot \leqslant 0$ при $z(w) \neq 0$. При $z(w) = 0$ производная $z^\cdot$ имеет вид

$$z^\cdot = -|u| + |x|\sqrt{u_\beta^2 + u_\gamma^2} / \sqrt{2h} \leqslant 0$$

В итоге установлена оценка $z^\cdot(w, u, v = 0) \leqslant 0$ для любого конечного u. Для импульсных $u(w) = \mu_1\delta$ оценка $\Delta z^{(1)}{}_1 = z(w^{(1)}) - z(w) \leqslant 0$ может быть получена применением теоремы о среднем. Доказательство оценок

$$z^\cdot(w, u = 0, v) \geqslant 0, \qquad \Delta z^{(2)} = z(w^{(2)}) - z(w) \geqslant 0$$

получается аналогично и завершает доказательство леммы 2.1.

Теорема 2.1. Если $w(0) \in D_0$, то управление

$$v_0(w^{(1)}, u) = 0, \qquad w^{(1)} \in D_{0,1} = D_0 \cap [\mu^{(1)} - \nu = \xi^{(1)} > 0]$$

$$v_0(w^{(1)}, u) = |u| j_\beta, \qquad w^{(1)} \in D_{0,2} = D_0 \cap [\xi^{(1)} = 0]$$

$$v_0(w^{(1)}, u) = -\xi^{(1)}\delta j_\beta, \qquad w^{(1)} \in D_{0,3} = D_0 \cap [\xi^{(1)} < 0]$$

решает задачу 2.

Доказательство. Предположим от противного, что при некотором $t = \tau > 0$ выполнено равенство $|x(\tau)| = 0$ на допустимой траектории. Эта траектория не может целиком при $0 < t < \tau$ лежать в области $D_{0,1}$, потому что оценка $\xi(t) > 0$ и оценка $z(w(t)) \leqslant z(w(0)) < 0$, являющаяся следствием условия $v_0 = 0$ при $w \in D_{0,1}$ и леммы 2.1, придут в противоречие. Это значит, что при некотором t_1 из интервала $[0, \tau]$ должно быть справедливо включение $w^{(1)}(t_1) \in D_{0,2}$ либо включение $w^{(1)}(t_1) \in D_{0,3}$. В первом случае необходимо выполняется оценка $|y_\beta^{(1)}(t_1)| > 0$, а во втором — оценка $|y_\beta^{(1,2)}(t_1)| > 0$. В дальнейшем управление $v_0(w^{(1)}, u)$ ведет траекторию $w^{(1,2)}(t \geqslant t_1)$ по области $D_{0,2}$ с сохранением оценки $|y_\beta^{(1,2)}(t)| \cdot |x^{(1,2)}(t)| \geqslant |y_\beta^{(1,2)}(t_1)|\,|x^{(1,2)}(t_1)| > 0$ и попадание на M невозможно. Доказательство закончено.

3. В области $D^\circ[|x| > 0;\ z(w) \geqslant 0]$ определим управления

$$u^\circ(w^{(2)}, v) = 0,\ v^\circ(w) = 0$$

$$w^{(2)}, w \in D_1^\circ = D^\circ \cap \{[\zeta = \xi^2 - y_\beta^2 < 0] \cup \tag{3.1}$$

$$\cup [\xi \geqslant 0,\quad y_\alpha - \sqrt{\zeta} > 0]\}$$

$$u^\circ(w^{(2)}, v) = -\sqrt{\zeta^{(2)}}\,\delta j_\alpha - |y_\beta^{(2)}|\,\delta j_\beta$$

$$v^\circ(w) \text{ — антипараллельно } u^\circ(w, v) \tag{3.2}$$

$$w^{(2)}, w \in D_2^\circ = D^\circ \cap [\zeta \geqslant 0,\ y_\alpha - \sqrt{\zeta} \leqslant 0;\ \xi^2 + y_\beta^2 > 0]$$

$$u^\circ(w^{(2)}, v) = -|v_\alpha|\,j_\alpha - v_\beta j_\beta - v_\gamma j_\gamma$$

$$v^\circ(w) \text{ — произвольно, с условием } v_\alpha \geqslant 0;\ [\nu_{2\alpha} \geqslant 0] \tag{3.3}$$

$$w \in D_3^\circ = D^\circ \cap [y_\alpha \leqslant 0;\quad \xi = |y_\beta| = 0]$$

Управления $v^\circ(w)$ в формулах (3.2), (3.3) определены с достаточной степенью произвола. Вторая формула (3.2) допускает любое конечное или импульсное управление $v^\circ(w)$, антипараллельное вектору $u^\circ(w, v)$, который в данном случае от v не зависит. Вторая формула (3.3) допускает любое конечное или импульсное управление $v^\circ(w)$ с неотрицательной проекцией v_α $[\nu_{2\alpha}]$. Первая формула (3.3) фактически совпадает с первой формулой (3.2) при импульсном управлении второго игрока, реализующего включение $w^{(2)} \in D_2^\circ$.

Теорема 3.1. Пара управлений $u^\circ(w^{(2)}, v)$, $v^\circ(w)$ отвечает задаче 1 и реализует в области D_1° время

$$T[u^\circ, v^\circ] = T^\circ(w) = t_1(w) + \pi/2;\ w \in D_1^\circ$$

где $t_1(w)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\eta(w, t) = (x^2 - \xi^2)\sin^2 t - 2|x|\,y_\alpha \sin t \cos t + (y_\alpha^2 + y_\beta^2 - \xi^2)\cos^2 t = 0$$

а в области $D_2^\circ \cup D_3^\circ$ время

$$T[u^\circ, v^\circ] = T^\circ(w) = \pi/2 + \operatorname{arctg}(p_1(w)/|x|)$$

$$p_1(w) = y_\alpha - \sqrt{\xi^2 - y_\beta^2}$$

Время $T[u^\circ, v^\circ]$ отвечает оценке $T[u^\circ, \vartheta^\circ] \leqslant T[u^\circ, v]$ для любой пары $u^\circ(w^{(2)}, v)$, $v(w)$ и оценке $T[u, v^\circ] \geqslant T[u^\circ, v^\circ]$ для любой пары $u(w^{(2)}, v)$, $v^\circ(w)$, сохраняющей траекторию в области D° [1].

Доказательство теоремы 3.1 требует последовательного доказательства ряда утверждений.

3.1.1[2]. Если оба игрока при $w \in D_1{}^\circ$ пользуются конечными управлениями u, v, то справедливы оценки

$$T^{\circ\cdot}(w, u^\circ = 0, v \neq 0) \leqslant T^{\circ\cdot}(w, u^\circ = 0, v^\circ = 0) = -1 \leqslant T^{\circ\cdot}(w, u \neq 0, v^\circ = 0) \quad (3.4)$$

Доказательство. Полагая для сокращения

$$\sin(t_1(w)) = s, \quad \cos(t_1(w)) = c, \quad 2/(\partial\eta(w, t = t_1)/\partial t) = \psi$$

получим для производной $T^{\circ\cdot}$ выражение

$$T^{\circ\cdot} = -1 - \psi[\xi(-|u| + |v|) - (-y_\alpha c^2 + |x|cs)(u_\alpha + v_\alpha) + |y_\beta|c^2(u_\beta + v_\beta)] \quad (3.5)$$

Поскольку $t_1(w)$ — наименьший положительный корень уравнения $\eta(w, t) = 0$ и выполнено условие $\eta(w, 0) > 0$, то необходимо выполнена оценка $\partial\eta(\omega, t = t_1)/\partial t \leqslant \leqslant 0$. Предположим, что последняя величина отрицательна. Множитель, стоящий в квадратной скобке формулы (3.5), неположителен при $|u| \neq 0$, $|v| = 0$ и неотрицателен при $|u| = 0$, $|v| \neq 0$. Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть разность

$$\xi^2 - (-y_\alpha c^2 + |x|cs)^2 - y_\beta{}^2 c^4 = \xi^2 s^2 > 0 \quad (3.6)$$

Вторая часть соотношения (3.6) получается из первой после учета равенства $\eta(\omega, t_1) = 0$. Итак, оценка (3.6) доказывает оценки (3.4) при $\partial\eta(\omega, t = t_1)/\partial t < 0$.

Случай $\partial\eta(w, t = t_1)/\partial t = 0$ требует дополнительного анализа, который вкратце состоит в следующем. Можно показать, что в этом случае выполнено равенство $z(w) = = 0$. Условие $w \in D_1{}^\circ$ влечет следствием оценку $z^\cdot(w, u \neq 0, v = 0) < 0$, из-за которой движение переходит в область D_0 при $u \neq 0$. Любая пара $u^\circ = 0$, $v \neq 0$ приводит к росту функции $z(w)$, так что для любого малого конечного отрезка траектории, отвечающей паре $u^\circ = 0$, $v(w) \neq 0$, можно установить оценку $\Delta T^\circ < \Delta t$, потому что при любом $0 < t < \Delta t$ производная $T^{\circ\cdot}(w, 0, v)$ будет существовать и удовлетворять соотношению $T^{\circ\cdot}(w, 0, v) \to -\infty$ при $t \to +0$. Доказательство утверждения 3.1.1 закончено.

3.1.2. В области $D_2{}^\circ$ за исключением границ

$$D_{2,1}{}^\circ = [\zeta = 0;\ y_\alpha \leqslant 0] \cap D_2{}^\circ; \quad D_{2,2}{}^\circ = [\zeta > 0,\ y_\alpha - \sqrt{\zeta} = 0] \cap D_2{}^\circ$$

справедлива оценка

$$T^{\circ\cdot}(w, u, v^\circ) > -1 \quad (3.7)$$

Для доказательства утверждения 3.1.2 заметим, что в указанной части области $D_2{}^\circ$ справедлива оценка $\zeta > 0$, оценка $p_1(w) < 0$, и выпишем производную $T^{\circ\cdot}$

$$T^{\circ\cdot} = -1 + (p_1{}^2 + x^2)^{-1}[-p_1\xi^2/\sqrt{\zeta} + R_1(w, u, v^\circ)] \quad (3.8)$$

$$R_1{}^\circ(w, u, v^\circ) = |x|(+u_\alpha + (\xi|u| + |y_\beta|u_\beta)/\sqrt{\zeta}) \quad (3.9)$$

Очевидная оценка $R_1(w, u, v^\circ) \geqslant 0$, оценка $p_1(w) < 0$ и формула (3.8) доказывают оценку (3.7) и утверждение 3.1.2.

---

[1] Поскольку управление $v^\circ(w)$ определено только в D°, то парой $u(w, v)$, $v^\circ(w)$, сохраняющей траекторию в области D° назовем пару, на которой до момента попадания на M справедливо включение $w^{(2.1)}(t, \{u(w, v), v^\circ(w)\}, w(0) \in D^\circ) \in D^\circ$, а скорость изображающей точки на границе $z_1(w) = 0$ направлена либо внутрь области D°, либо вдоль границы. Теорема 3.1 в этом смысле не претендует на полное соответствие задаче 1.

[2] Утверждения 3,1.1, ..., 3.1.4 касаются конечных пар u, v°.

3.1.3. На границе $\overset{\circ}{D}_{2,1}$ любая пара $u \neq u^\circ(w, v)$, $v^\circ(w)$ либо переводит траекторию в область $D_1{}^\circ$ с положительным скачком $\Delta T^\circ > 0$, либо переводит траекторию в область D_0.

Доказательство. Пусть $\zeta = 0$, $y_\alpha < 0$. В этих условиях

$$\xi - |y_\beta| = 0, \quad \xi^{\cdot} - |y_\beta|^{\cdot} = -|u| + |v^\circ| - (u_\beta + v_\beta{}^\circ) + y_\alpha |y_\beta| / |x| < 0$$
$$\text{при } y_\alpha < 0, \quad |y_\beta| > 0$$

Это значит, что существует единственное управление $u^\circ(w, v) = -|y_\beta|\,\delta/_\beta$, сохраняющее равенство $\xi(t > 0) - |y_\beta(t > 0)| = 0$, а любое другое переводит при $y_\alpha < 0$ позицию в область $D_1{}^\circ$ либо в область D_0. Остальные случаи $y_\alpha = 0$ либо $y_\beta = 0$ исследуются аналогично.

3.1.4. На границе $\overset{\circ}{D}_{2,2}$ выполнено равенство $p_1(w) = 0$, и поэтому на основании формул (3.8), (3.9), можно утверждать, что при любом управлении u, параллельном оптимальному скачку $u^\circ(w, v)$ и $v = v^\circ$, справедливо равенство $T^\circ(w, u, v^\circ) = -1$. Очевидно, однако, что при $u \neq u^\circ(w, v)$ равенство $T^{\circ\cdot}(w, u, v^\circ) = -1$ нарушится в бесконечно близкой следующей позиции и перейдет в неравенство

$$T^{\circ\cdot}(w + \Delta w, u, v^\circ) > -1$$

3.1.5. Пусть второй игрок при $w \in D_2{}^\circ$ реализует некоторый оптимальный скачок $v^\circ(w)$, антипараллельный вектору $u^\circ(w, v)$, а первый реализует скачок $mu^\circ(w^{(2)}, v)$ при $0 \leqslant m < 1$.

Простые подсчеты показывают справедливость равенств

$$p_1(w) = p_1(w^{(2)}) = p_1(w^{(2,1)})$$
$$\xi / \sqrt{\zeta} = \xi^2 \sqrt{\zeta^{(2)}} = \xi^{(2,1)} / \sqrt{\zeta^{(2,1)}}$$

Если после указанных скачков оба игрока реализуют управления u_1, $v_1{}^\circ$, параллельные оптимальным скачкам, то формула (3.8) показывает, что производная $T^{\circ\cdot}(w^{(2,1)}, u, v)$ окажется тем ближе к -1, чем меньше величина $\xi^{(2,1)}$. Это позволяет получить равенство

$$\lim_{m \to 1} T^{\circ\cdot}(w^{(2,1)}(w, mu^\circ, v^\circ), u_1, v_1{}^\circ) = -1 \tag{3.10}$$

3.1.6. Пусть оба противника при $t = 0$ реализовали оптимальные скачки (тогда $w^{(2.1)} \in D_3{}^\circ$, а при $t > 0$ реализуют конечные управления). Производная $T^{\circ\cdot}$ имеет вид

$$T^{\circ\cdot} = -1 + |x|(x^2 + p_1{}^2)^{-1}\{(u_\alpha + v_\alpha - [(|u| - |v|)^2 - (u_\beta + v_\beta)^2 - (u_\gamma + v_\gamma)^2]^{1/2}\}$$

Из последней формулы видно, что любая пара u°, $v \neq v^\circ$ уменьшает производную $T^{\circ\cdot}$ от -1, а любая пара $u \neq u^\circ$, v° либо увеличивает производную $T^{\circ\cdot}$ от -1 либо переводит позицию в область D_0.

Утверждения 3.1.1 — 3.1.6 исчерпывают доказательство теоремы 3.1 для тех случаев, когда игроки реализуют скачки, параллельные оптимальным, либо пользуются конечными управлениями.

3.1.7. Любое импульсное управление $v = \nu_2\delta \neq v^\circ(w)$ строго уменьшает функцию $T^\circ(w)$, т. е. $T^\circ(w^{(2)}) < T^\circ(w)$.

Для доказательства утверждения 3.1.7 следует рассмотреть ряд случаев.

3.1.7.1. Пусть $w \in D_1{}^\circ$, $w^{(2)} \in D_1{}^\circ$. Рассмотрим функцию

$$\eta(w^{(2)}, t_1(w)) = -|\nu_2|^2 s^2 - 2[\xi|\nu_2| + |x|\nu_{2\alpha} cs - (y_\alpha \nu_{2,\alpha} + |y_\beta|\nu_{2,\beta}) c^2] < 0$$

Последняя оценка следует из оценок $|\nu_2| > 0$; $s^2 = \sin^2(t_1(w)) > 0$ и оценки (3.6). Из оценок $\eta(w^{(2)}, t_1(w)) < 0$; $\eta(w^{(2)}, 0) > 0$ вытекает оценка $\Delta T^\circ = t_1(w^{(2)}) - t_1(w) < 0$, которая завершает доказательство утверждения 3.1.7 в случае 3.1.7.1.

3.1.7.2. Пусть $w \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$, $w^{(2)} \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$.

Рассмотрим разность

$$\Delta p_1 = p_1(w^{(2)}) - p_1(w) = \nu_{2,\alpha} - \sqrt{\zeta + \nu_{2,\alpha}^2 + 2(\xi\,|\nu_2| - |y_\beta|\,\nu_{2,\beta})} + \sqrt{\zeta}$$

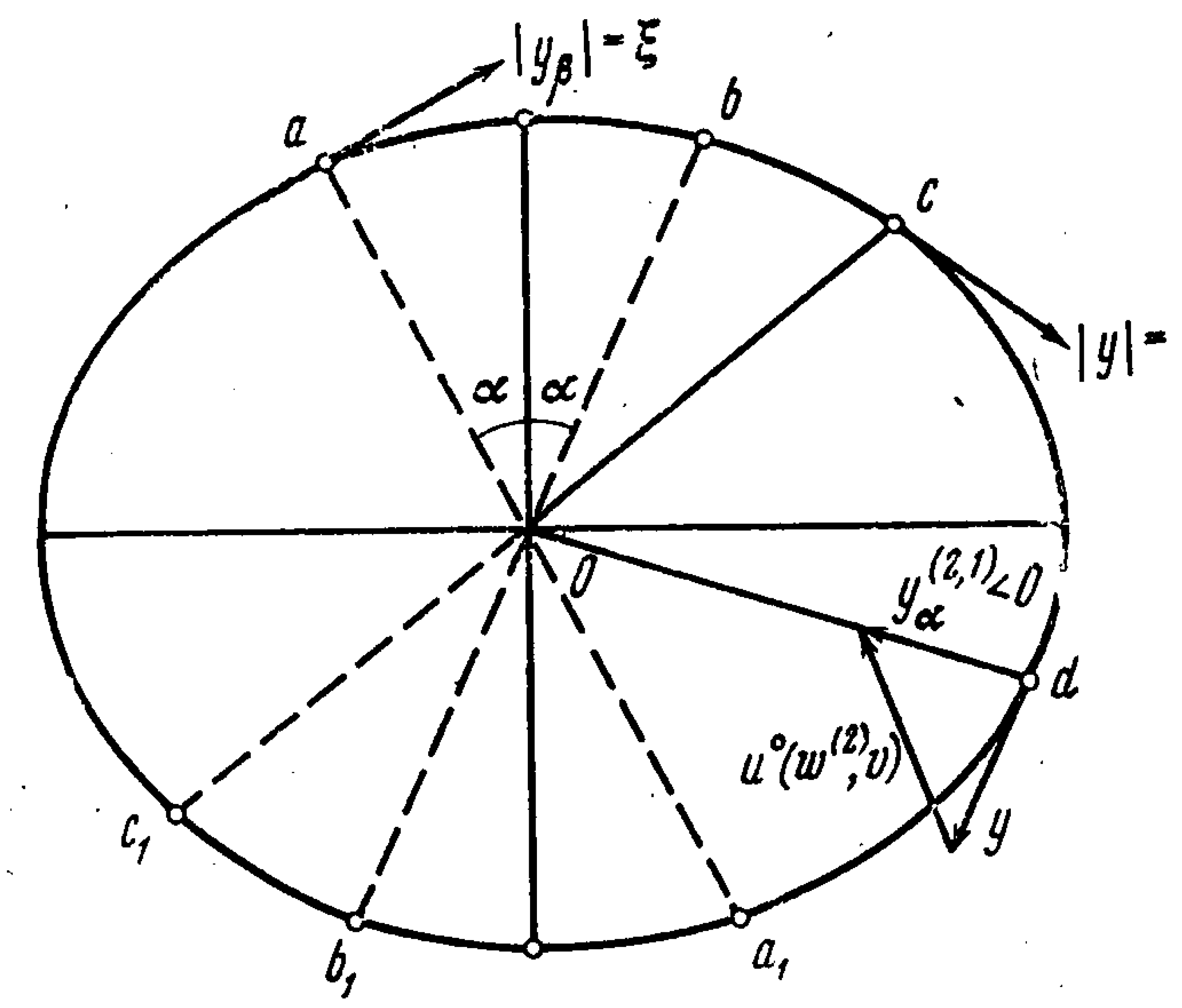
Разность Δp_1 может обращаться в неотрицательное число только при одновременном выполнении оценок

$$\sqrt{\zeta} + \nu_{2,\alpha} \geqslant 0, \quad -\xi\,|\nu_2| + \nu_{2,\alpha}\sqrt{\zeta} + \nu_{2,\beta}\,|y_\beta| \geqslant 0$$

Обе эти оценки совместны только при $v = v^\circ(w)$. При $v = \nu_2\delta \neq v^\circ(w)$ реализуется оценка $\Delta p_1 < 0$ и оценка $\Delta T^\circ < 0$, которая завершает рассмотрение случая 3.1.7.2.

3.1.7.3. Пусть $w \in D_1^\circ$, $w^{(2)} \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$.

Импульс $v = \nu_2\delta$ может привести к переходу границы $\overset{\circ}{D}_{2,1}[\zeta = 0;\ y_\alpha \leqslant 0]$. При этом переходе функция $T^\circ(w)$ терпит отрицательный скачок. При переходе границы $\overset{\circ}{D}_{2,2}[\zeta > 0,\ y_\alpha - \sqrt{\xi} = 0]$ функция $T^\circ(w)$ непрерывна. Эти два факта в совокупности с результатами 3.1.7.1, 3.1.7.2 позволяют доказать утверждение 3.1.7 в случае 3.1.7.3.



3.1.8. Никакое импульсное управление $v = \nu_2\delta$ не может осуществить следующие переходы

$$[w \in D_2^\circ \cup D_3^\circ;\quad w^{(2)} \in D_1^\circ],$$
$$[w \in D^\circ;\ w^{(2)} \in D_0]$$

Доказательство проводится на основании оценки $\Delta p_1 \leqslant 0$ и леммы 2.1.

3.1.9. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta \neq mu^\circ(w, u)$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$ либо строго увеличивает функцию $T^\circ(w)$, либо переводит позицию в область D_0; $(T^\circ(w^{(1)}) > T^\circ(w))$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством утверждения 3.1.7. последовательным рассмотрением случаев

3.1.9.1 $w \in D_1^\circ$, $\quad w^{(1)} \in D_1^\circ$

3.1.9.2 $w \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$; $\quad w^{(1)} \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$

3.1.9.3 $w \in D_2^\circ \cup D_3^\circ$, $\quad w^{(1)} \in D_1^\circ$

3.1.10. Никакое импульсное управление $u = \mu_1\delta$ не может осуществить перехода

$$[w \in D_1^\circ;\ w^{(1)} \in D_2^\circ \cup D_3^\circ].$$

Доказательство основывается на оценке $\eta(w^{(1)}, 0) > 0$. Совокупность утверждений 3.1.1 — 3.1.10 доказывает теорему 3.1.

4. Дадим краткую геометрическую интерпретацию оптимальному движению.

Пусть изображающая точка, положение которой определяется вектором x, в движении, свободном от управлений, описывает эллипс (фигура).

Дуги эллипса ac и a_1c_1 принадлежат области D_1°. На этих дугах первый игрок либо на участке ab) не может погасить боковую составляющую $|y_\beta| > \xi$ либо (на участке bc) придет к значению $y_x^{(1)}(w) > 0$ $(p_1(w) > 0)$. Это справедливо, конечно, для управлений u, сохраняющих включение $w^{(1)} \in D^\circ$.

Изложенные соображения заставляют обоих игроков следовать по дуге (ac) с управлениями $u^\circ = v^\circ = 0$, до точки c, в которой впервые реализуется равенство $\xi = |y|$. В точке c первый игрок применяет импульс $u^\circ(w^{(2)}, v) = -y\delta$, и в дальнейшем движение происходит по прямой $c\,0$. Равенство $\xi = |y(t_1)|$ эквивалентно уравнению $\eta(w, t_1) = 0$ при $w \in D_1^\circ$, и суммарное время попадания в точку O $(|x| = 0)$ оказывается равным $t_1(w) + \pi / 2 = T^\circ(w)$.

Если же позиция $w \in D_2^\circ$, что отвечает положению на дугах $[c, a_1]$, $[c_1, a]$, то в любой точке d дуги $[c, a_1]$ оптимальное управление $u^\circ(w^{(2)}, v)$ реализуется в виде импульса (n, m), а полученная радиальная скорость $y_\alpha^{(2,1)}$ $(w^{(2)})$ оказывается неположительной. Движение в дальнейшем происходит вдоль прямой $(d, 0)$ и попадание в начало 0 реализуется через время $T(w) = \pi / 2 + \operatorname{arc\,tg}(p_1(w) / |x|)$. Если в точке a первый игрок не погасит скорость y_β импульсом $u^\circ = -y_\beta \delta j_\beta$, а применит какое-либо конечное управление $u(w)$, то позиция перейдет в область D_1°, а время $T(w)$ увеличится скачком.

Поступила 30 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Усп. матем. н., 1966, т. 21, № 4.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
4. Красовский Н. Н., Третьяков В. Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения. 1966, т. 2, № 5.
5. Пожарицкий Г. К. Игровая задача импульсной мягкой встречи двух материальных точек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.