Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 62-50

УСЛОВИЯ УКЛОНЕНИЯ ОТ ТОЧКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Пацко

(Свердловск)

Приводятся необходимые и достаточные условия уклонения от точки в нелинейной дифференциальной игре второго порядка. Эти условия конкретизируются на случай линейной дифференциальной игры. Статья примыкает к работам [1-6].

1. Рассмотрим систему второго порядка

$$dx/dt = F(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый вектор, $u(v)$ — управление первого (второго) игрока, функция $F(x, u, v)$ непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по x, U и V — ограниченные, замкнутые множества. Допустим, что при любых x, $v \in V$ множество $F(x, U, v) = U_u F(x, u, v)$, $u \in U$, выпукло.

Под окончанием игры будем понимать попадание системы (1.1) в некоторую заранее заданную точку m. Предположим, что существует вектор p, для которого при всех $u \in U$, $v \in V$ скалярное произведение $p_1F_1(m, u, v) + p_2F_2(m, u, v) < 0$.

Пусть «реализация $u(\cdot)$» — произвольная измеримая функция $u(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющая при любом t условию $u(t) \in U$. Будем считать, что при $t \geqslant t_0$ второй игрок может столкнуться с любой реализацией $u(\cdot)$. Свое управление он должен строить при помощи дискретной схемы $\{v[x], \Delta\}$. Дискрет $\Delta > 0$ определяет величину полуинтервала $t^* \leqslant t < t^* + \Delta$, в течение которого управление $v = v[x(t^*)]$ держится постоянным.

Обозначим через $T[x_0; v[x], \Delta, u(\cdot)]$ время перевода системы (1.1) в точку m из начальной позиции $x_0 = x(t_0)$ при дискретной схеме $\{v[x], \Delta\}$ и реализации $u(\cdot)$. Если такой перевод не возможен, положим $T[x_0; v[x], \Delta, u(\cdot)] = \infty$.

Определение. В игре возможно уклонение, если существуют такие функции $v^\circ[x]$, $\Delta[x_0]$, что при любом $x_0 \neq m$ и при всех $\Delta \leqslant \Delta[x_0]$, $u(\cdot)$ время $T[x_0; v^\circ[x], \Delta, u(\cdot)] = \infty$.

2. Не теряя общности, будем считать, что начало прямоугольной системы координат x_1, x_2 совпадает с m, а вектор p направлен по оси x_1. Пусть O — замкнутый круг с центром в m, для любой точки x которого при всех $u \in U$, $v \in V$

$$F_1(x, u, v) < 0 \tag{2.1}$$

Положим

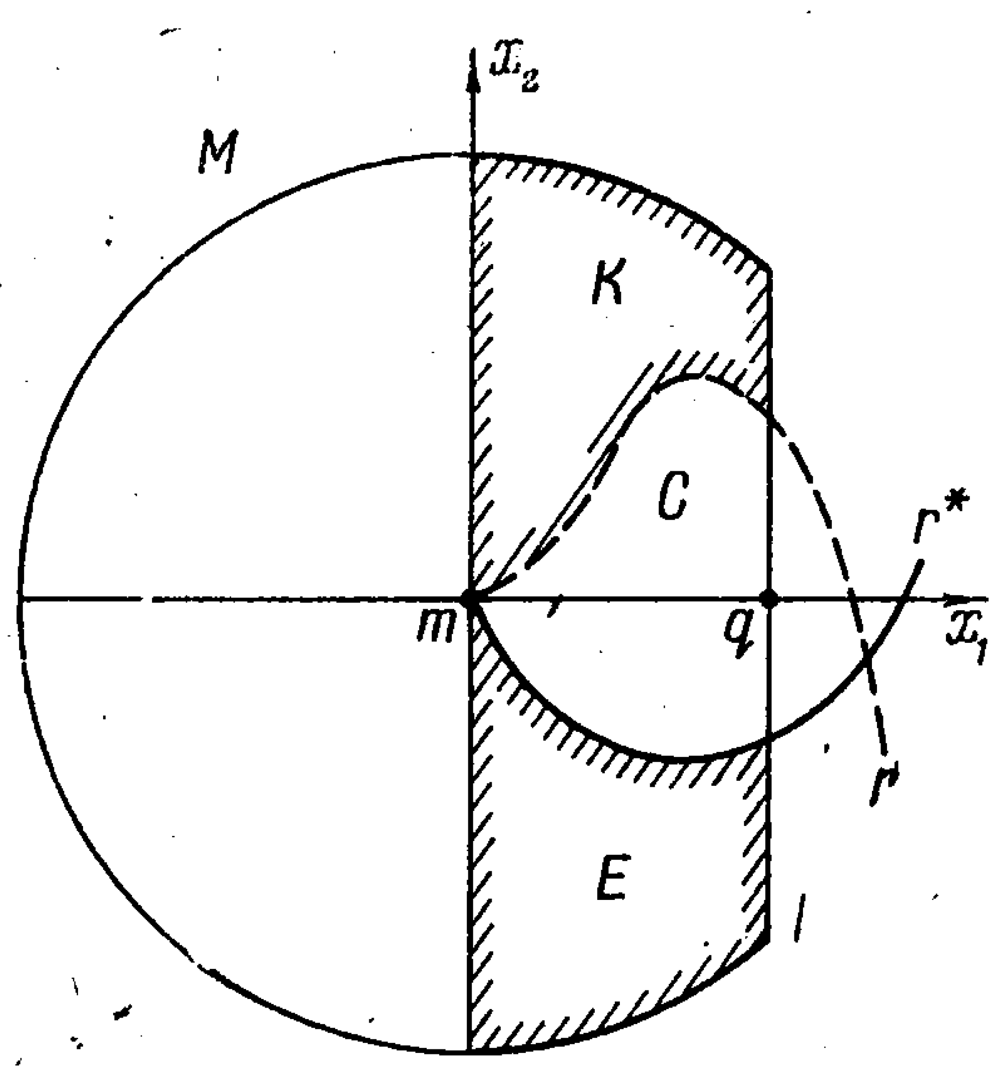
$$f(x,u,v)=\frac{F_2(x,u,v)}{F_1(x,u,v)}$$

$$f^*(x)=\max_v \min_u f(x,u,v) \tag{2.2}$$

$$f_*(x)=\min_v \max_u f(x,u,v) \tag{2.3}$$

$$x\in O,\qquad u\in U,\qquad v\in V$$

Из определения функций $f^*(x)$, $f_*(x)$ и выполнения условия Липшица по x для функции $F(x,u,v)$ следует, что функции $f^*(x), f_*(x)$ удовлетворяют в O условию Липшица по x. Пусть $x_2=\psi^*(x_1)$ $(x_2=\psi_*(x_1))$, $x_1\geqslant 0$ — решение уравнения $dx_2/dx_1=f^*(x)$ $(dx_2/dx_1=f_*(x))$ с начальным условием $x_2(0)=0$, продолженное до границы круга O. График этого решения обозначим через r^* (r_*). Скажем, что $r^*>r_*$, если на пересечении положительной полуоси x_1 с кругом O найдется монотонно убывающая последовательность точек $\{x_1^{(n)}\}$, сходящаяся к нулю, для которой при любом n будет $\psi^*(x_1^{(n)})>\psi_*(x_1^{(n)})$. В противном случае скажем, что $r^*\leqslant r_*$.



Фиг. 1

Теорема 2.1. Для того чтобы уклонение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $r^*>r_*$.

Доказательство вытекает из лемм 2.1, 2.2.

Пусть

$$f^{(1)}(x,v)=\min_u f(x,u,v),\qquad f^{(2)}(x,v)=\max_u f(x,u,v)$$

$$x\in O,\qquad u\in U,\qquad v\in V$$

Лемма 2.1. Если $r^*\leqslant r_*$, то уклонение невозможно.

Доказательство. Так как $r^*\leqslant r_*$, то найдется такое число $q>0$, что $\psi^*(x_1)\leqslant\psi_*(x_1)$ при $x_1\in[0,q]$. Пусть O° — внутренность круга O. Положим (см. фиг. 1)

$$M=O^\circ\cap\{x:x_1<q\},\qquad H=M\cap\{x:x_1\geqslant 0\}$$

$$C=\{x:x\in H,\quad \psi^*(x_1)\leqslant x_2\leqslant\psi_*(x_1)\}$$

$$K=\{x:x\in H,\quad x_2>\psi_*(x_1)\}$$

$$E=\{x:x\in H,\quad x_2<\psi^*(x_1)\}$$

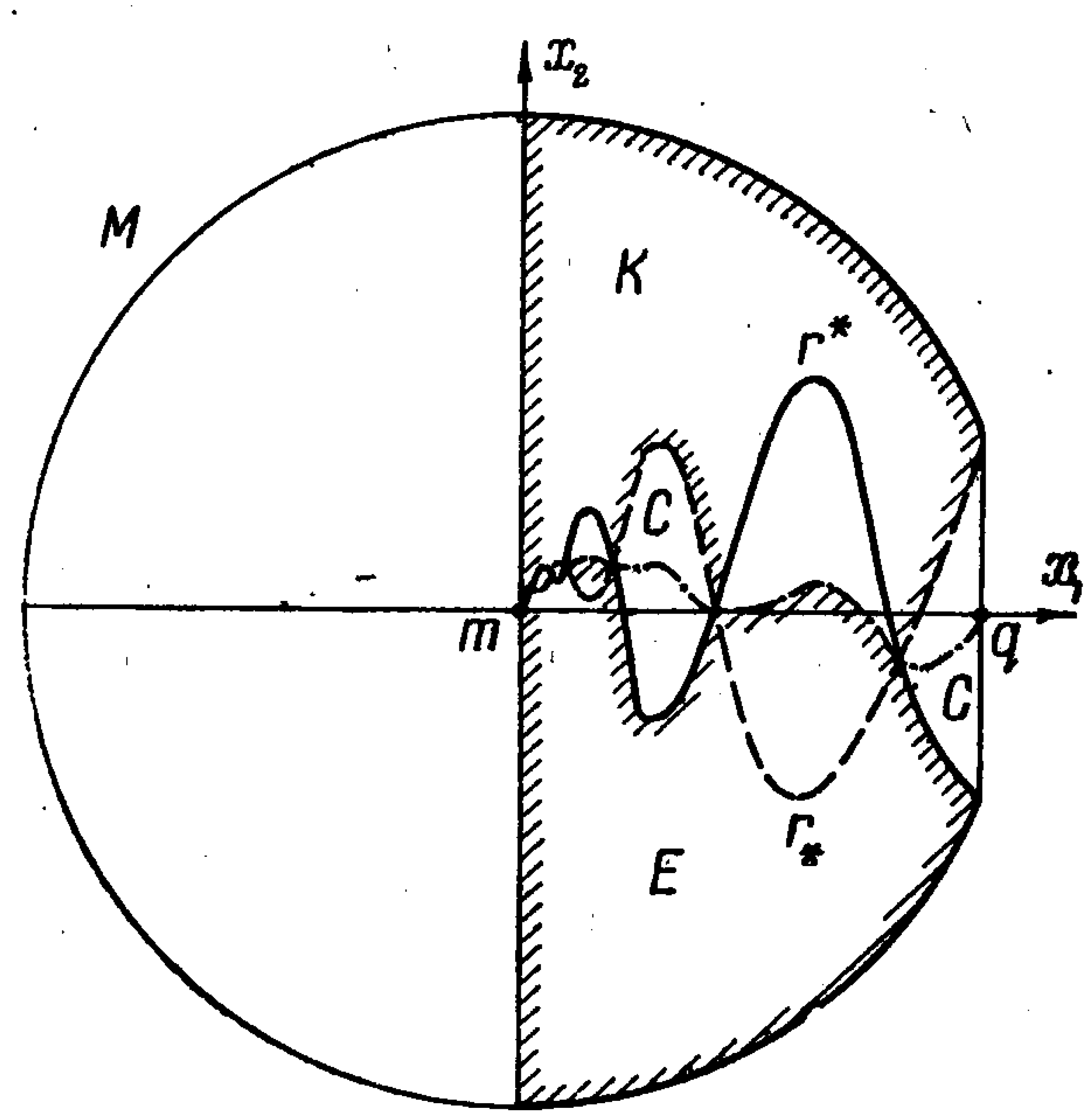
Для любых $x\in M$, $v\in V$ примем

$$U^{(i)}(x,v)=\{u:u\in U,\quad f(x,u,v)=f^{(i)}(x,v)\},\qquad i=1,2$$

$$U(x,v)=\begin{cases}U^{(1)}(x,v) & \text{если}\quad x\in E\\ U^{(2)}(x,v), & \text{если}\quad x\in K\\ U, & \text{если}\quad x\in M\diagdown(K\cup E)\end{cases}$$

При всяком $v\in V$ множество $U(x,v)$ полунепрерывно сверху относительно включения по x в M (см. [7], теорема 1.1). Следовательно, аналогичным свойством обладает множество $F(x, v) = U_u F(x, u, v)$, $u \in U(x, v)$. Из выпуклости множества $F(x, U, v)$ при всех $x \in M$, $v \in V$ вытекает выпуклость множества $F(x, v)$ при всех $x \in M$, $v \in V$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $dx/dt \in F(x, v)$. При любом начальном условии $x_0 \in M$ и при любом постоянном $v \in V$ оно имеет по меньшей мере одно решение [8]. Так как в E (K) $f^{(1)}(x, v) \leqslant f^*(x)$ $(f^{(2)}(x, v) \geqslant f_*(x, v))$, то любое решение $x(t)$ с началом в произвольной точке $x_0 = x(t_0) \in C$ при $t \geqslant t_0$ вплоть до первого момента t^* выхода на границу множества H будет идти не выше (не ниже) кривой r_* (r^*). Следовательно, решение будет идти в C и попадет в точку m за время $t^* - t_0 < \vartheta = q / j$, где $j = \min |F_1(x; u, v)|$ на произведении $O \times U \times V$. Как вытекает из леммы (см. [9], стр. 27), по решению $x(t)$ можно подобрать такую измеримую функцию $u(t)$, $t \in [t_0, t^*]$, со значениями в множестве $U(x(t), v)$, что решение уравнения $dx/dt = F(x, u(t), v)$ (x_0 и v — прежние) на отрезке $[t_0, t^*]$ совпадет с $x(t)$.



Фиг. 2

Из сказанного следует, что при любом $x_0 \in C$ и при любой дискретной схеме $\{v[x], \Delta\}$ найдется реализация $u(\cdot)$, для которой время $T[x_0; v[x], \Delta, u(\cdot)] < \vartheta$. Уклонение невозможно. Доказательство закончено.

Обозначим через $V^*(x)$ $(V_*(x))$, $x \in O$, максимальную совокупность векторов $v \in V$, на каждом из которых достигается максимум (минимум) в (2.2) ((2.3)).

Лемма 2.2. Если $r^* > r_*$, то уклонение возможно.

Доказательство. Пусть $[0, q]$ — наибольший общий отрезок определения функций $\psi^*(x_1)$ и $\psi_*(x_1)$. Положим

$$\psi(x_1) = {}^1/_2(\psi^*(x_1) + \psi_*(x_1)), \quad s(x_1) = \psi^*(x_1) - \psi_*(x_1)$$

$$x_1 \in [0, q]$$

$$\omega^{(1)}(x) = \psi^*(x_1) - x_2, \qquad \omega^{(2)}(x) = x_2 - \psi_*(x_1)$$

$$x \in \{x : x_1 \in [0, q]\}$$

$$M = O^\circ \cap \{x : x_1 < q\}, \qquad H = M \cap \{x : x_1 > 0\}$$

$$C = \{x : x \in H, \quad \psi^*(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \psi_*(x_1)\}$$

$$D = \{x_1 : x_1 \in [0, q], \quad \psi^*(x_1) > \psi_*(x_1)\}$$

$$K = \{x : x \in H \setminus C, \quad x_2 \geqslant \psi(x_1)\}$$

$$E = \{x : x \in H \setminus C, \quad x_2 < \psi(x_1)\}$$

Введенные обозначения поясняются на фиг. 2. Сплошной линией (пунктиром) показана кривая r^* (r_*), штрих-пунктиром обозначена кривая $x_2 = \psi(x_1)$, $x_1 \in [0, q]$.

Определим

$$v^\circ[x] = \begin{cases} \text{любому} \quad v \in V_*(x), & \text{если} \quad x \in K \\ \text{любому} \quad v \in V^*(x), & \text{если} \quad x \in E \\ \text{любому} \quad v \in V, & \text{если} \quad x \overline{\in} K \cup E \end{cases}$$

1). Пусть $x_0 = x(t_0) \in (M \setminus \{m\}) \setminus H$ и пусть второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x], \Delta\}$. Вследствие (2.1) и того, что на произведении $O \times U \times V$ функция $|f(x, u, v)|$ ограничена сверху числом $G = \max |f(x, u, v)|$, получаем, что при всех Δ, $u(\cdot)$ движение $x(t)$ системы (1.1) с момента t_0 до первого момента t^* выхода на границу множества M будет идти в секторе $\{x : G(x_1 - x_{10}) + x_{20} \leqslant x_2 \leqslant -G(x_1 - x_{10}) + x_{20}, x_1 \leqslant x_{10}\}$ и значит

$$|x(t)| \geqslant \frac{|x_0|}{\sqrt{1+G^2}}, \qquad t \in [t_0, t^*] \tag{2.4}$$

2). Пусть $y = x(t_*) \in E$ и на полуинтервале $[t_*, t_* + \Delta)$, где Δ достаточно мало, действует постоянное $v = v^\circ[y]$ и произвольная реализация $u(\cdot)$. Оценим функцию $\omega^{(1)}(x(t))$, $t \in [t_*, t_* + \Delta)$.

Так как $f^*(y) = f^{(1)}(y, v^\circ[y])$ и функции $f^*(x)$, $f^{(1)}(x, v)$ удовлетворяют условию Липшица по x (с общей константой k), то

$$\begin{gathered} f^*(x(t)) - f(x(t), u(t), v^\circ[y]) \leqslant \\ \leqslant f^*(x(t)) - f^{(1)}(x(t), v^\circ[y]) \leqslant \\ \leqslant |f^*(x(t)) - f^*(y)| + |f^{(1)}(y, v^\circ[y]) - \\ - f^{(1)}(x(t), v^\circ[y])| \leqslant 2k|x(t) - y| \leqslant \\ \leqslant 2kN\Delta, \quad t \in [t_*, t_* + \Delta), \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $N = \max |F(x, u, v)|$ на $O \times U \times V$.

Из (2.1), (2.5) следует, что на полуинтервале $[t_*, t_* + \Delta)$ движение $x(t)$ при любом $u(\cdot)$ пойдет не выше интегральной кривой уравнения $\partial x_2/\partial x_1 = f^*(x) - 2kN\Delta$, проведенной через точку y. Так как кривая r^* есть интегральная кривая уравнения $\partial x_2/\partial x_1 = f^*(x)$, выходящая из точки m, то

$$\begin{gathered} \omega^{(1)}(x(t)) \geqslant (\omega^{(1)}(y) + 2N\Delta)\exp(-k|x_1(t) - y_1|) - 2N\Delta \\ t \in [t_*, t_* + \Delta) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Аналогично, если $y = x(t_*) \in K$ и на полуинтервале $[t_*, t_* + \Delta)$, где Δ достаточно мало, действует постоянное $v = v^\circ[y]$ и произвольная реализация $u(\cdot)$, то

$$\begin{gathered} \omega^{(2)}(x(t)) \geqslant (\omega^{(2)}(y) + 2N\Delta)\exp(-k|x_1(t) - y_1|) - 2N\Delta \\ t \in [t_*, t_* + \Delta) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Пусть $x_0 \in H$. Положим

$$\begin{gathered} \chi(x_0) = \max_{x_1}(s(x_1)\exp(-kx_1)) \\ x_1 \in [0, x_{10}] \cap D \end{gathered} \tag{2.8}$$

Наименьшее x_1, на котором достигается максимум в (2.8), обозначим через $\alpha(x_0)$.

Зафиксируем начальную позицию $x_0 = x(t_0) \in H$. Предположим, что второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x], \Delta\}$, где $\Delta \leqslant \Delta[x_0]$, а $\Delta[x_0]$ достаточно мало.

Пусть до первого момента пересечения прямой $x_1 = \alpha(x_0)$ движение $x(t)$ из точки x_0 идет в H и пусть указанное пересечение происходит на некотором l-м (l — натуральное число, зависящее от Δ и $u(\cdot)$) полуинтервале дискретной схемы. Из определения функции $v^\circ[x]$ и из неравенств (2.6), (2.7) получаем, что при достаточно малом $\Delta[x_0]$ движение $x(t)$ при всех $\Delta \leqslant \Delta[x_0]$, $u(\cdot)$ с момента $t_1 = t_0 + \Delta(l-1)$ до первого момента t_2 выхода из H на каждом дискрете Δ будет идти либо строго выше кривой r_*, либо строго ниже кривой r^*. При этом

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} \{\omega^{(1)}(x(t)), \omega^{(2)}(x(t))\} \geqslant \chi(x_0) - \xi(\Delta) \tag{2.9}$$

Здесь и ниже $\xi(\Delta)$ означает положительную бесконечно малую первого порядка при $\Delta \to 0$. Так как функции $|f^*(x)|$, $|f_*(x)|$ не превышают числа G, то максимум $\lambda(t)$ из расстояний от точки $x(t)$ до кривых r^*, r_* в момент t оценивается неравенством

$$\lambda(t) \geqslant \frac{\chi(x_0)}{\sqrt{1+G^2}} - \xi(\Delta) \overset{\text{def}}{=} \mu(x_0, \Delta), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.10}$$

Из (2.4), (2.9), (2.10) следует, что при любом $t \geqslant t_1$ до первого момента t^* выхода из M будет $|x(t)| \geqslant \mu(x_0, \Delta)$.

Очевидно, что на отрезке $[t_0, t^*]$ будет $|x(t)| \geqslant \min\{\mu(x_0, \Delta), \alpha(x_0)\}$. Так как $\alpha(x_0) \geqslant s(\alpha(x_0))/G > \mu(x_0, \Delta)$, то отсюда

$$|x(t)| \geqslant \mu(x_0, \Delta), \qquad t \in [t_0, t^*] \tag{2.11}$$

Таким образом, если $x_0 = x(t_0) \in H$ и второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x], \Delta\}$, то при достаточно малом $\Delta[x_0]$ движение системы (1.1) при всех $\Delta \leqslant \Delta[x_0], u(\cdot)$ не может подойти на отрезке $[t_0, t^*]$, где t^* — первый момент выхода из M, к точке m ближе, чем на расстояние $\mu(x_0, \Delta) = \chi(x_0)/\sqrt{1+G^2} - \xi(\Delta)$.

3). При $x_1 \in D$ положим

$$\nu^{(i)}(x_1) = \min_y (\omega^{(i)}(y) \exp(-ky_1))$$
$$y \in \{y : y \in M, y_1 \in [0, x_1], \omega^{(i)}(y) > 0\}, \quad i = 1, 2$$
$$\nu(x_1) = s(x_1)\exp(-kx_1), \qquad \varkappa = \max_{x_1} \min\{\nu^{(1)}(x_1), \nu^{(2)}(x_1), \nu(x_1)\}$$

Используя результаты пунктов 1), 2), можно показать, что если $x_0 = x(t_0) \in M$ и второй игрок применяет дискретную схему $\{v^\circ[x], \Delta\}$, то при всех $\Delta \leqslant \delta, u(\cdot)$, где $\delta > 0$ — достаточно мало и не зависит от x_0

$$|x(t)| \geqslant \frac{\varkappa}{\sqrt{1+G^2}} - \xi(\Delta), \qquad t \geqslant t_0 \tag{2.12}$$

Из (2.4), (2.11), (2.12) получаем, что для любого $x_0 \neq m$ найдется такое $\Delta[x_0]$, что при всех $\Delta \leqslant \Delta[x_0]$, $u(\cdot)$ время $T[x_0; v^\circ[x], \Delta, u(\cdot)] = \infty$. Доказательство закончено.

Очевидно, что $r^* > r_*$ ($r^* \leqslant r_*$) при $f^*(m) > f_*(m)$ ($f^*(m) < f_*(m)$), поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Если $f^*(m) > f_*(m)$ ($f^*(m) < f_*(m)$), то уклонение возможно (невозможно).

3. Рассмотрим двумерную систему

$$dx/dt = Ax + u - v, \qquad u \in U, \qquad v \in V \tag{3.1}$$

Здесь A — постоянная матрица 2×2, U и V — выпуклые, ограниченные замкнутые множества. Предположим, что $U \cap V = \phi$ и что хотя бы одно из множеств U, V является многоугольником.

За точку m примем начало координат.

Для системы (3.1) при указанных предположениях справедлива теорема 2.1. Ниже для системы (3.1) укажем более простые необходимые и достаточные условия уклонения, чем условия теоремы 2.1.

Систему координат и круг O выберем так же, как и в п. 2. Прямую $x_2 = f^*(m)\, x_1$ обозначим через β, ее часть при $x_1 > 0$ — через α.

Теорема 3.1. Для того чтобы уклонение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих двух условий: 1) $f^*(m) > f_*(m)$, 2) $f^*(m) = f_*(m)$ и существует такой круг $L \subset O$ с центром в точке m, что $f^*(x) > f_*(x)$ при любом $x \in \alpha \cap L$.

Аналогичная теорема в несколько иных терминах и при более жестких предположениях была сформулирована в [6].

Доказательство теоремы опирается на лемму 3.1, которая рассматривается ниже.

Предположим, что $f^*(m) = f_*(m)$ и пусть прямая β не инвариантна относительно преобразования A, соответствующего матрице A. Тогда множество $\gamma = \{x : Ax \in \beta\}$ есть прямая, проходящая через точку m и не совпадающая с β. Ту из полуплоскостей, определяемых прямой γ, что содержит полупрямую α, назовем Γ. Прямую γ не будем включать в полуплоскость Γ.

Пусть $C(l) = \{x : x \in O,\ |x| < l\}$, $l > 0$

Если $f^*(m) = f_*(m)$ и прямая β инвариантна (не инвариантна), положим $D(l) = C(l) \cap \beta$ $(D(l) = C(l) \cap \Gamma)$.

Лемма 3.1. Пусть $f^*(m) = f_*(m)$. Тогда существует такое число $l^\circ > 0$, что либо $f^*(x) > f_*(x)$ при любом $x \in D(l^\circ)$, либо $f^*(x) \leqslant f_*(x)$ при любом $x \in D(l^\circ)$.

Доказательство. Если прямая β инварианта, то лемма очевидна. Пусть прямая β не инвариантна.

Так как $f^*(m) = f_*(m)$, то при всех $v^* \in V^*(m)$, $v_* \in V_*(m)$ множества $-U + v^*$ и $-U + v_*$ разделяются (но не строго) прямой β. Положим

$$P(v) = (-U + v) \cap \beta$$

$$\rho^* = \max_v \min \{|w| : w \in P(v)\}, \qquad v \in V^*(m) \tag{3.2}$$

$$\rho_* = \min_v \max \{|w| : w \in P(v)\}, \qquad v \in V_*(m) \tag{3.3}$$

Возможны три случая: 1) $\rho^* > \rho_*$, 2) $\rho^* < \rho_*$, 3) $\rho^* = \rho_*$.

Преобразование A отображает полуплоскость Γ в одну из полуплоскостей, определяемых прямой β. Обозначим ее через B. Прямая β не входит в B. Ниже анализ случаев

1) — 3) будем проводить в предположении, что полуплоскость B лежит выше прямой β (см. фиг. 3). Если она лежит ниже, рассуждения аналогичны.

Положим

$$\varphi(z, u, v) = \frac{z_2 + u_2 - v_2}{z_1 + u_1 - v_1}$$

$$\varphi^*(z) = \max_v \min_u \varphi(z, u, v) \tag{3.4}$$

$$\varphi_*(z) = \min_v \max_u \varphi(z, u, v) \tag{3.5}$$

$$z \in A(O), \quad u \in U, \quad v \in V$$

Через h^* (h_*) обозначим вектор $v \in V^*(m)$ ($v \in V_*(m)$), на котором достигается максимум (минимум) в (3.2) ((3.3)).

В случае 1) $P(h^*) \cap P(h_*) = \varnothing$. Поэтому $(-U + h^*) \cap (-U + h_*) = \varnothing$. Следовательно, найдется такое достаточно малое $l_0 > 0$, что для любого $z \in K(l_0) = C(l_0) \cap B$

$$\varphi^*(z) \geqslant \min_u \varphi(z, u, h^*) > \max_u \varphi(z, u, h_*) \geqslant \varphi_*(z)$$

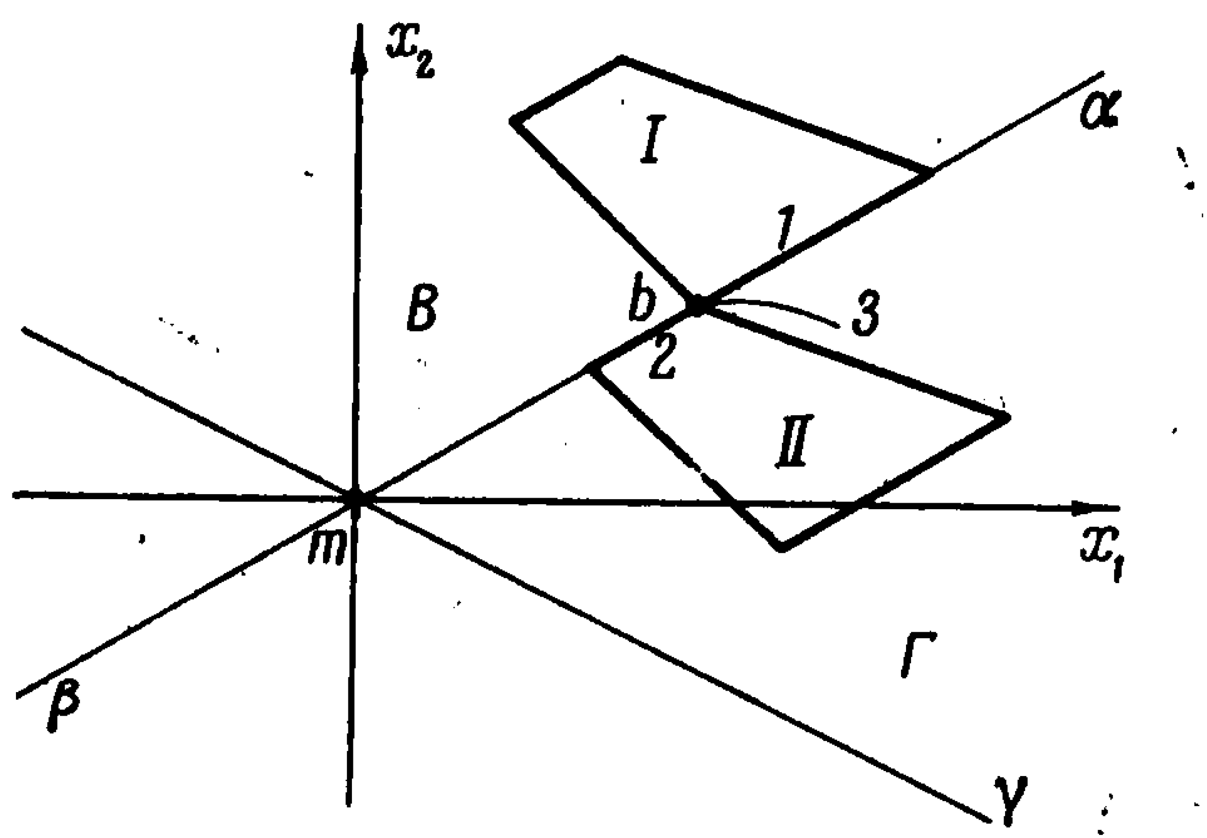
$$u \in U$$

В силу непрерывности преобразования A и равенств $f^*(x) = \varphi^*(Ax)$, $f_*(x) = \varphi_*(Ax)$ отсюда следует существование такого достаточно малого $l^\circ > 0$, что при любом $x \in D(l^\circ)$ будет $f^*(x) > f_*(x)$.

В случае 2) покажем существование такого $l_0 > 0$, что для любого $z \in K(l_0)$

$$\varphi^*(z) < \varphi_*(z) \tag{3.6}$$

Предположим противное. Тогда можно выделить последовательность $\{z^{(n)}\}$ точек из $B_{(n)}$, сходящуюся к m, для которой при любом n будет $\varphi^*(z^{(n)}) \geqslant \varphi_*(z^{(n)})$. Каждой точке $z^{(n)}$ поставим в соответствие пару $(v^{(n)}, v_n)$, где $v^{(n)}$ (v_n) — произвольный вектор из V, на котором достигается максимум (минимум) в (3.4) ((3.5)) при $z = z^{(n)}$. Из последовательности $\{v^{(n)}, v_n\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{v^{(k)}, v_k\}$. Пусть (v°, v_0) — ее предел. Очевидно, что $v^\circ \in V^*(m)$, $v_0 \in V_*(m)$. Так как отрезок $E^{(k)} = P(h^*) + v^{(k)} - h^* \subset -U + v^{(k)}$ лежит в секторе



Фиг. 3

$$\{x : \varphi^*(z^{(k)})(x_1 - z_1^{(k)}) + z_2^{(k)} \leqslant x_2 \leqslant f^*(m)\, x_1\}$$

а отрезок $E_k = P(h_*) + v_k - h_* \subset -U + v_k$ — в секторе

$$\{x : f^*(m)\, x_1 \leqslant x_2 \leqslant \varphi_*(z^{(k)})(x_1 - z_1^{(k)}) + z_2^{(k)}\}$$

то из условий

$$\varphi^*(z^{(k)}) \geqslant \varphi_*(z^{(k)}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$P(v^\circ) = \lim_{k\to\infty} E^{(k)}, \qquad P(v_0) = \lim_{k\to\infty} E_k$$

получаем, что

$$\min\{|w| : w \in P(v^\circ)\} \geqslant \max\{|w| : w \in P(v_0)\}$$

Последнее противоречит условию $\rho^* < \rho_*$. Таким образом, (3.6) справедливо. Из (3.6) вытекает существование такого $l^\circ > 0$, что $f^*(x) < f_*(x)$ при любом $x \in D(l^\circ)$.

В случае 3) пересечение $P(h^*) \cap P(h_*)$ состоит из одной точки, которую обозначим буквой b.

Предположим вначале, что множество U — многоугольник. Есть две возможности: 3а) граница множества V касается в точке h^* справа прямой $x_2 - h_2^* = f^*(m) \times (x_1 - h_1^*)$, в противном случае она касается в точке h_* слева прямой $x_2 - h_{2*} = f^* \cdot (m)(x_1 - h_{1*})$; 3б) условие 3а) не выполняется.

В случае 3а) предположим для определенности, что есть касание справа в точке h^*. Пусть χ — дуга границы множества V, примыкающая справа к h^*. Нетрудно видеть, что если дуга χ достаточно мала, то при любом $v \in \chi$ множество $-U+v$ лежит не ниже (U — многоугольник!) дуги $\chi + b - h^*$. Следовательно, при достаточно малом $l_0 > 0$ для любого $z \in K(l_0)$

$$\varphi^*(z) > \frac{z_2 - b_2}{z_1 - b_1} \geqslant \varphi_*(z) \tag{3.7}$$

Случай 3а) показан на фиг. 3. Цифрой I (II) обозначено множество $-U+h^*$ ($-U+h_*$), цифрой 1 (2) — отрезок $P(h^*)$ ($P(h_*)$). Дуга $\chi + b - h^*$ отмечена цифрой 3.

В случае 3б) при достаточно малом $l_0 > 0$ для любого $z \in K(l_0)$

$$\varphi^*(z) = \frac{z_2 - b_2}{z_1 - b_1} = \varphi_*(z) \tag{3.8}$$

Из (3.7) ((3.8)) следует, что в случае 3а) (3б)) существует такое $l^\circ > 0$, что $f^*(x) > f_*(x)$ ($f^*(x) = f_*(x)$) при любом $x \in D(l^\circ)$.

Если множество V — многоугольник, то при достаточно малом $l_0 > 0$

$$\varphi^*(z) \leqslant \frac{z_2 - b_2}{z_1 - b_1} \leqslant \varphi_*(z)$$

и значит, существует такое $l^\circ > 0$, что $f^*(x) \leqslant f_*(x)$ при любом $x \in \in D(l^\circ)$. Доказательство закончено.

Вернемся к теореме 3.1. Пусть выполнено условие 2) теоремы 3.1 (пусть $f^*(m) = f_*(m)$, но условие 2) не выполнено). Тогда по лемме 3.1 существует такое $l^\circ > 0$, что $f^*(x) > f_*(x)$ ($f^*(x) \leqslant f_*(x)$) при любом $x \in D(l^\circ)$. Из геометрии множества $D(l^\circ)$ и из определения кривых r^*, r_* следует, что в этом случае $r^* > r_*$ ($r^* \leqslant r_*$). Теорема 3.1 вытекает теперь из теоремы 2.1 и следствия 2.1.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за внимание к работе.

Поступила 6 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
3. Понтрягин Л. С. Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., «Наука», 1971, т. 112.
4. Лагунов В. Н. Нелинейная дифференциальная игра убегания. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 3.
5. Пацко В. С. Об одной дифференциальной игре второго порядка. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
6. Пацко В. С. Условия уклонения в линейной дифференциальной игре второго порядка. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
7. Пшеничный Б. Н. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.
8. Филиппов А. Ф. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. Математические заметки, 1971, т. 10, вып. 3.
9. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 2.