УДК 539.21.084 + 539.374

ОБ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Рассматриваются общие соотношения теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды при условии пластичности Треска и его обобщениях на основании определения диссипативной функции. Работа примыкает к исследованиям [1, 2].

1. Диссипативная функция при условии пластичности Треска имеет вид

$$D = 2k\,|\,\varepsilon_i\,|_{\max}, \qquad k = \text{const} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_{i\,\max}$ — максимальная главная компонента скорости деформации. В дальнейшем примем для определенности $\varepsilon_i = \varepsilon_3$; материал будем считать несжимаемым. Исходный функционал для определения ассоциированного закона нагружения запишем в виде

$$D = 2k\,\varepsilon_3\,(\varepsilon_{ij}) + \mu\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \tag{1.2}$$

где ε_{ij} — компоненты тензора скорости деформации, μ — множитель Лагранжа. Необходимо знать выражение $\varepsilon_3 = \varepsilon_3\,(\varepsilon_{ij})$.

Обозначим через n_i направляющие косинусы третьего главного направления в декартовой системе координат x_i. Тогда $n_i\varepsilon_3 = \varepsilon_{ij}n_j$. Отсюда следует известная формула

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{ij}\,n_i n_j \tag{1.3}$$

Используя соотношение (1.3), необходимо учесть, что $n_i = n_i\,(\varepsilon_{ij})$, так как при изменении компонент тензора скоростей деформации изменяется ориентация главных направлений. Учитывая (1.2), (1.3), получим, согласно ассоциированному закону нагружения

$$\sigma_{mn} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{mn}}\,[\varepsilon_{ij}n_i\,(\varepsilon_{kl})\,n_j\,(\varepsilon_{pq})] + \mu\,\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{mn}}\,(\varepsilon_{ij}\delta_{ij}) \tag{1.4}$$

Покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{mn}}\,[\varepsilon_{ij}n_i\,(\varepsilon_{kl})\,n_j\,(\varepsilon_{pq})] = n_m n_n \tag{1.5}$$

Пусть, например, $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_x$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_x}\,(\varepsilon_{ij}n_i n_j) = n_1^2 + 2\varepsilon_{ij}n_i\,\frac{\partial n_j}{\partial \varepsilon_x} = n_1^2 + 2\varepsilon_3\left(n_i\,\frac{\partial n_i}{\partial \varepsilon_x}\right) \tag{1.6}$$

Так как $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, то последнее выражение в круглых скобках в (1.6) равно нулю. Аналогично доказывается утверждение (1.5) в общем случае.

Согласно (1.4), (1.5), будем иметь

$$\sigma_x = \mu + 2kn_1^2, \ldots \qquad \tau_{xy} = 2kn_1n_2, \ldots \tag{1.7}$$

Невыписанные выражения (1.7) получаются круговой перестановкой индексов. Согласно (1.7)

$$\mu = \sigma - {}^2/_3k, \qquad \sigma = {}^1/_3\sigma_{ij}\delta_{ij} \tag{1.8}$$

Соотношения (1.7), (1.8) определяют условия пластичности, соответствующие ребру призмы Треска, известного под названием «условие полной пластичности». Для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ $(\sigma_2 \leqslant \sigma_3 \leqslant \sigma_1)$. Из ассоциированного закона течения в этом случае $\varepsilon_1 = \lambda$, $\varepsilon_2 = -\lambda$, $\varepsilon_3 = 0$. Диссипативная функция имеет вид

$$D = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 = 2k\,\lambda = 2k\,\varepsilon_1$$

Будем исходить из диссипативной функции $D = 2k\varepsilon_1$ при условиях $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$. Исходный функционал будет иметь вид

$$D = 2k\varepsilon_1 + \mu_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mu_2\varepsilon_3 \tag{1.9}$$

где μ_2, μ_2 — множители Лагранжа. Пусть l_i, m_i — направляющие косинусы главных направлений ε_1, ε_2 из (1.11). Согласно (1.4), (1.5), получим

$$\sigma_x = 2kl_1^2 + \mu_2(l_1^2 + m_1^2) + \mu_2 n_2^2, \ldots \tag{1.10}$$
$$\tau_{xy} = 2kl_1l_2 + \mu_1(l_1l_2 + m_1m_2) + \mu_2 n_1 n_2, \ldots$$

Из (1.12) следует

$$\sigma = 2/3\,k + \mu_1 + \mu_2 \tag{1.11}$$

После исключения из (1.10) величин μ_2, μ_2 так, как это сделано в [1], получим условие пластичности в форме Леви; соответствующие грани призмы Треска имеют вид

$$4(q + k^2)(q + 4k^2)^2 + 27\,r^2 = 0 \tag{1.12}$$
$$q = \sigma_{ij}'\sigma_{ij}', \qquad r = \sigma_{ij}'\sigma_{jk}'\sigma_{ki}'$$

штрих приписан компонентам девиаторов.

2. Основное предельное условие статики сыпучей среды запишем в виде

$$\max|\tau_n| = k + \sigma_n \operatorname{tg}\rho, \quad k, \rho = \text{const} \tag{2.1}$$

где τ_n, σ_n — касательные и нормальные напряжения. Соотношение (2.1) определяет в пространстве главных напряжений призму Кулона, уравнение ребра которой можно записать в виде

$$(\sigma_3 - \sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\rho = 2k\cos\rho$$
$$(\sigma_3 - \sigma_2) - (\sigma_2 + \sigma_3)\sin\rho = 2k\cos\rho \tag{2.2}$$

Согласно обобщенному ассоциированному закону течения

$$\varepsilon_2 = \lambda_2(-1 - \sin\rho), \quad \varepsilon_3 = \lambda_2(-1 - \sin\rho) \tag{2.3}$$
$$\varepsilon_3 = \lambda_1(1 - \sin\rho) + \lambda_2(1 - \sin\rho)$$

Из (2.3) получим

$$D = \sigma_i\varepsilon_i = 2k\cos\rho\,(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{2.4}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{2\sin\rho}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = {}^1/_2\,[\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \tag{2.5}$$

Таким образом, имеет место дилатансионная зависимость

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + [\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\sin\rho = 0 \tag{2.6}$$

При определении соотношений статики сыпучей среды, исходя из определения диссипативной функции, следует постулировать наличие дилатансионной зависимости (2.6). Исходный функционал следует принять в одной из эквивалентных форм

$$D = -\frac{k\cos\rho}{\sin\rho}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu_1\,]\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\rho] \tag{2.7}$$

$$D = k\cos\rho\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \mu_2\,[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\rho \tag{2.8}$$

где μ_1, μ_2 — множители Лагранжа.

Будем исходить из выражения (2.7). Преобразуя (2.7) к виду

$$D = -\frac{k\cos\rho}{\sin\rho}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu_1[(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)(1 - \sin\rho) + \varepsilon_2\sin\rho] \qquad (2.9)$$

и учитывая (1.7), получим

$$\sigma_x = -\frac{k\cos\rho}{\sin\rho} + \mu[(1 - \sin\rho) + 2n_1^2\sin\rho], \ldots, \tau_{xy} = 2\mu n_1 n_2 \sin\rho, \ldots \qquad (2.10)$$

Из (2.10) следует

$$\sigma = -\frac{k\cos\rho}{\sin\rho} + \mu\left[1 - \frac{1}{3}\sin\rho\right] \qquad (2.11)$$

Из (2.10), (2.11) следуют соотношения, определяющие условия пластичности, соответствующие ребру призмы Кулона, рассмотренные в [1]. Аналогично может быть рассмотрен общий случай зависимости $\max\{|\tau_n| - f(\sigma_n)\} = 0$.

Поступила 10 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
2. Ивлев Д. Д. О диссипативной функции упрочняющихся пластических сред. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 5.
3. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 25/VII-1972 г. Т-16907 Подписано к печати 3/X-1972 г. Тираж 2775 экз.
Зак. 975 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 17,5 + 1 вкл. Бум. л. 6¹/₄ Уч.-изд. л. 17,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10