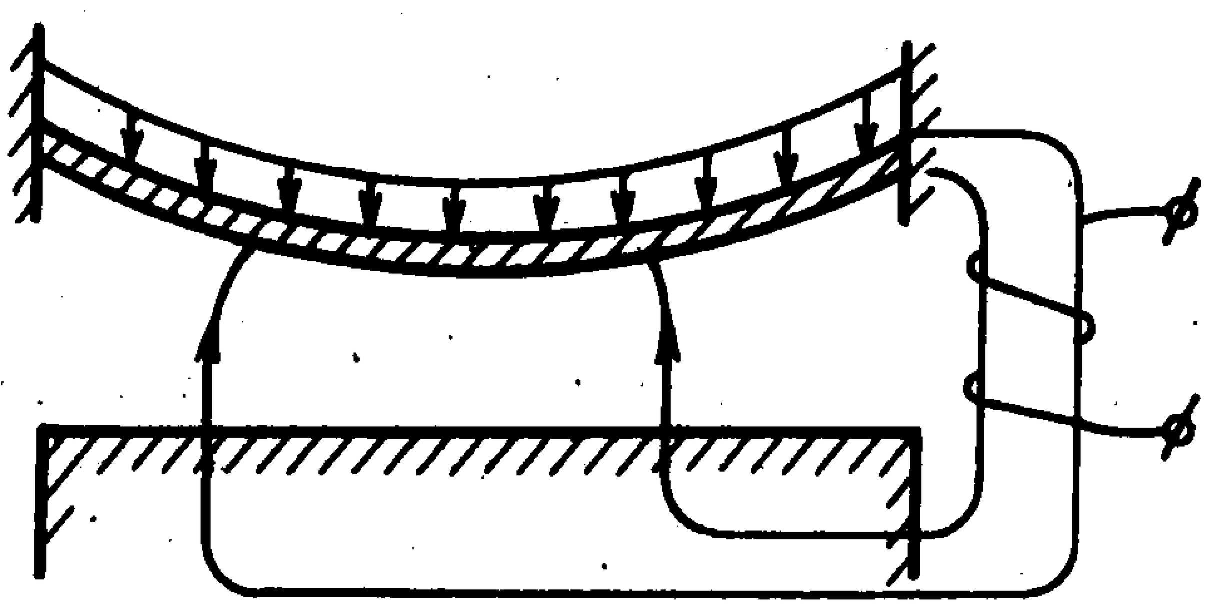
УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ

К. Ш. Ходжаев, И. З. Штилерман

(Ленинград)

Определяются формы равновесия ферромагнитной струны, расположенной вблизи плоского магнита и загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Рассматривается случай, когда первоначальное расстояние между струной и магнитом сравнимо с перемещениями. При этом необходимо учитывать зависимость поля от перемещений, несмотря на то, что последние малы. Принимаются предположения [1], позволяющие свести задачу к нелинейной краевой задаче для одних перемещений. Та же краевая задача получается при определении равновесия в поле искривленного магнита. Найдено число решений, проанализирована зависимость решений от параметров и исследована устойчивость равновесий.



Фиг. 1

1. Нелинейная краевая задача. Случай нагрузки, направленной к магниту. Рассмотрим тонкую натянутую ферромагнитную струну, притягиваемую электромагнитом и загруженную равномерно распределенной нагрузкой q. Считаем, что магнитная проницаемость струны, магнита и магнитопровода бесконечно велика, а линии индукции замыкаются, согласно фиг. 1, и охватываются одним и тем же полным током I. Пусть b — ширина, l — длина струны, Δ — расстояние между недеформированной струной и магнитом, $u(x)$ — перемещения точек струны. Предполагается, что $\Delta \ll b \ll l$, а u сравнимо с Δ. Удерживая в выражении для пондеромоторных сил младший член относительно u / b, придем к краевой задаче [1]

$$v^{\cdot\cdot} + \frac{1}{(1-v)^2} + \gamma = 0, \qquad v(0) = v(\omega) = 0, \qquad v^{\cdot} = \frac{dv}{d\tau}$$
$$v = \frac{u}{\Delta}, \quad \tau = \frac{\omega}{l}x, \quad \omega^2 = \frac{\mu_0 b l^2 I^2}{2T\Delta^3}, \quad \gamma = \frac{2g\Delta^2}{\mu_0 b I^2} \tag{1.1}$$

Здесь v, τ — безразмерные перемещения и координата, T — натяжение, μ_0 — магнитная проницаемость среды.

То же уравнение описывает равновесие струны, изгибаемой магнитом в форме параболического цилиндра при отсутствии внешней нагрузки [1].

Решение краевой задачи (1.1) существенно зависит от знака γ.

Пусть $\gamma > 0$ (нагрузка направлена к магниту). Уравнение в (1.1) при этом не имеет особых точек, а его первый интеграл будет

$$w^2 = 2(v_m - v)\left[(1 - v_m)^{-1}(1 - v)^{-1} + \gamma\right], \quad w = v^{\cdot} \tag{1.2}$$

Здесь v_m — значение v при пересечении фазовой траектории с осью Ov. Решению задачи (1.1) отвечает тот из отрезков AB фазовых траекторий (фиг. 2, *а*), который изображающая точка пробегает за «время» $\tau = \omega$. Так как линии AB симметричны относительно Ov, то и форма струны будет симметричной относительно оси, проходящей через ее середину. Величина v_m равна максимальному безразмерному перемещению, достигающемуся в середине струны.

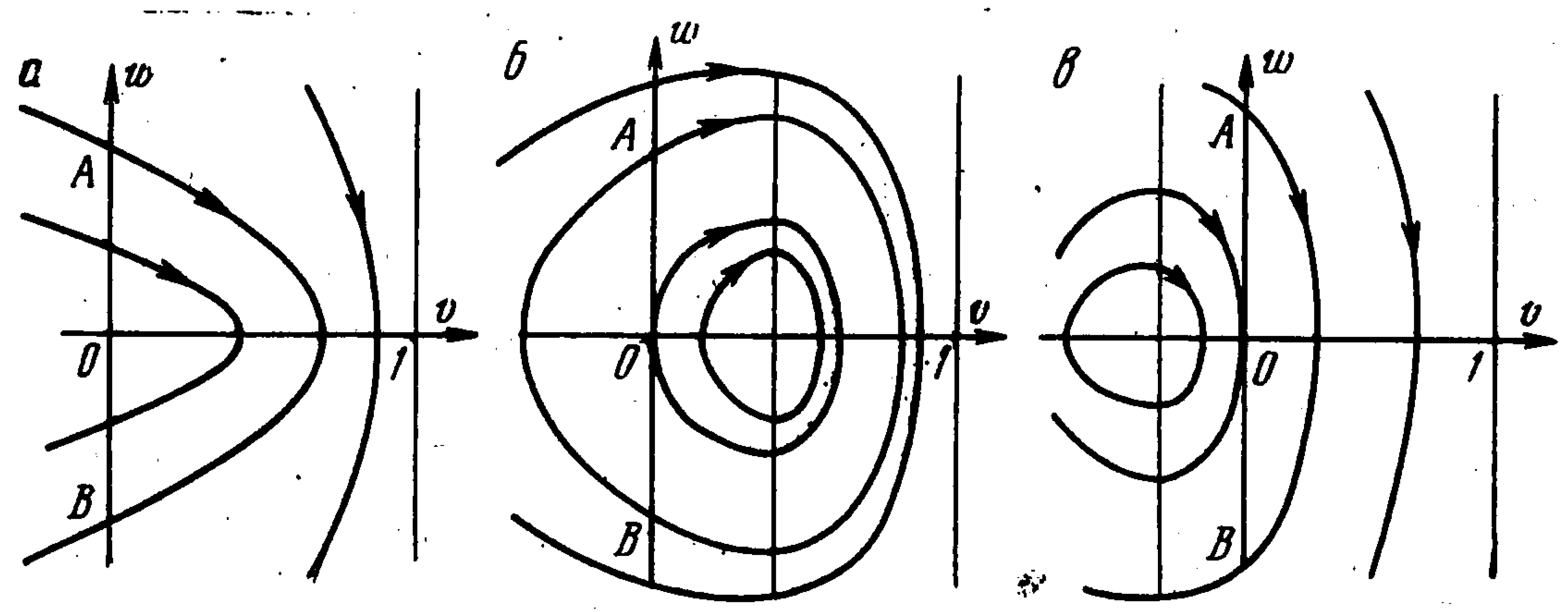
Интегрируя (1.2) с учетом условия $v(0) = 0$, получим

$$\tau(v) = \int_0^v \{2(v_m - z)\left[(1 - v_m)^{-1}(1 - z)^{-1} + \gamma\right]\}^{-1/2} dz, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \omega/2 \tag{1.3}$$

Соотношением (1.3) форма струны определена с точностью до величины v_m, которая найдется из условия $v_m = v\ (\omega / 2)$. Тем самым определится зависимость $v_m = v_m\ (\omega)$, описывающая кривую, называемую обычно кривой равновесия

$$\omega = 2\tau\ (v_m) \tag{1.4}$$

Функция $\omega\ (v_m)$ выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода. Но обращение ее таким путем затруднительно, поэтому будем исходить из выражений с квадратурами.



Фиг. 2

Очевидно, $\omega\ (0) = \omega\ (1) = 0$ для всех $\gamma > 0$. Имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial v_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}\,[g_1(z, v_m) - g_2(z, v_m)\, g_3(z, v_m)]$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{v_m}}\,[(1-v_m)^{-1}(1-v_m z)^{-1} + \gamma]^{-1/2}, \qquad g_3 = \frac{1+z-2v_m z}{[(1-v_m)(1-v_m z)]^{1/2}}$$

$$g_2 = \sqrt{v_m}\,[1+\gamma(1-v_m)(1-v_m z)]^{-3/2} \tag{1.5}$$

Функции g_1, g_2 и g_3 неотрицательны и g_2, g_3 монотонно возрастают, а g_1 монотонно убывает с ростом v_m для $0 \leqslant z \leqslant 1$. Следовательно, подынтегральная функция в (1.5) с ростом v_m монотонно убывает. Поэтому производная $\partial\omega / \partial v_m$ имеет при $0 < v_m < 1$ не более одного нуля. Но так как $\partial\omega / \partial v_m \to \infty$ при $v_m \to 0$ и $\partial\omega / \partial v_m \to -\infty$ при $v_m \to 1$, то существует значение v_m, при котором $\partial\omega / \partial v_m = 0$. Таким образом, в данном случае функция $\omega\ (v_m)$ имеет единственный максимум $\omega = \omega_l$ (фиг. 3, 4). Соответственно, при $\omega < \omega_l$ существует две формы равновесия при одних и тех же значениях параметров, при $\omega = \omega_l$ — одна форма, а при $\omega > \omega_l$ равновесие невозможно.

2. Нагрузка, направленная от магнита. При $\gamma < 0$ уравнение (1.1) в полуплоскости Ovw, $v > 1$ имеет особую точку $v = 1 - (-\gamma)^{-1/2}$, $w = 0$. Первый интеграл этого уравнения

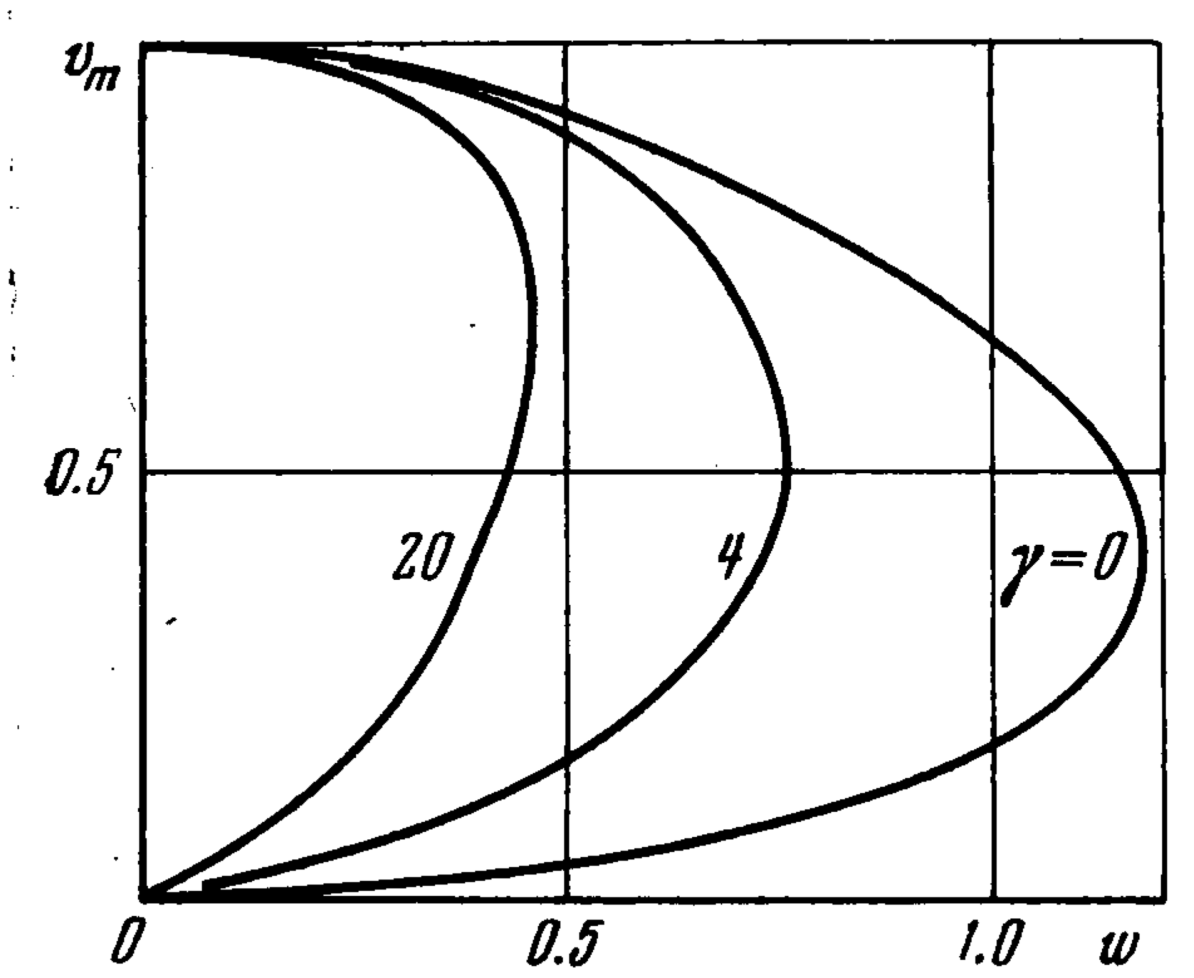
$$w^2 = 2\gamma\,(v_{m1} - v)(v_{m2} - v)(1 - v)^{-1}$$
$$(1 - v_{m1})(1 - v_{m2}) = -1 / \gamma \tag{2.1}$$

определяет замкнутые фазовые траектории, пересекающие Ov при $v = v_{m1}$ и $v = v_{m2}$. Поэтому особая точка — центр, расположенный при $\gamma < -1$ в интервале $0 < v < 1$, при $\gamma > -1$ — в интервале $-\infty < v < 0$ (фиг. 2, *б*, *в*).

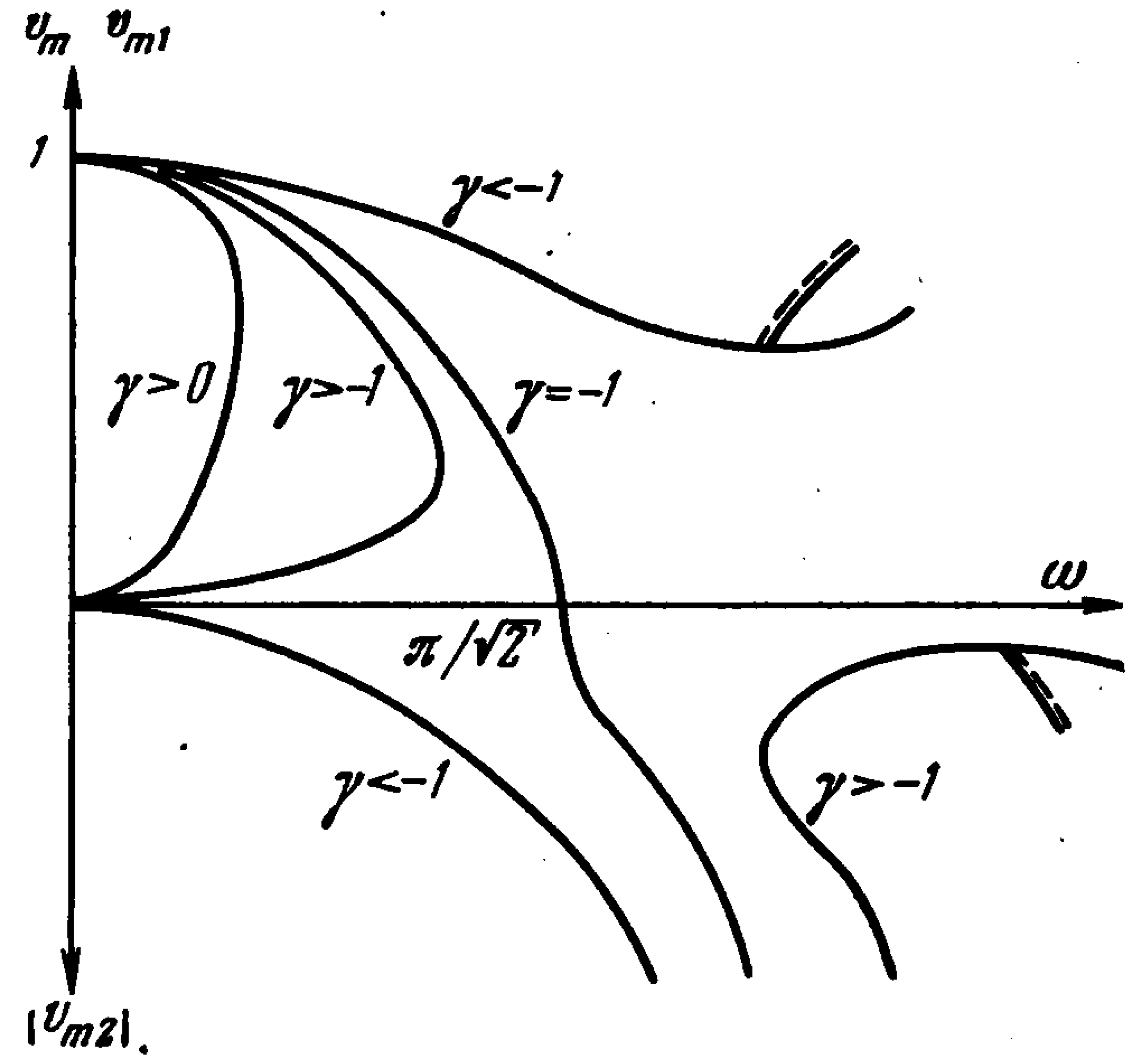
Решению задачи (1.1) в данном случае могут отвечать, помимо прочих, две группы отрезков фазовой траектории: отрезки вида AB и BA (фиг. 2, *б*, *в*). Отрезки AB определяют формы равновесия с положительными перемещениями (см. п. 1), отрезки BA — с отрицательными перемещениями. Эти формы симметричны и максимальное по модулю перемещение, равное $v_{m1} > 0$ для «положительных» и $v_{m2} < 0$ для «отрицательных» форм, достигается в середине струны. Кроме того, возможны формы равновесия, отвечающие переходам ABA, $ABAB$ и т. д. Среди всех этих отрезков нужно выбрать те, которые пробегаются за время $\tau = \omega$.

Различия в расположении центра и случаях $\gamma < -1$ и $\gamma > -1$ существенно влияют на характер решений.

Пусть $\gamma < -1$. Рассмотрим сначала положительные одноэкстремальные формы. Для них сохраняются соотношения (1.3), (1.4), но пределы возможного изменения v_m в данном случае будут $v_p < v_m < 1$, где $v_p = 1 + 1 / \gamma$. Необходимо, чтобы подынтегральная функция в (1.3) была вещественной. Введем в (1.3) переменную $t = zv_p / v_m$. Придем в (1.4) к интегралу с пределами O, v_p, в котором подынтегральная функция будет монотонно убывающей функцией v_m. Поэтому при увеличении v_m от $v_m = v_p$ до $v_m = 1$ функция $\omega(v_m)$ монотонно убывает до нуля. Из (1.5) имеем $\partial\omega / \partial v_m \to -\infty$ при $v_m \to 1$ и $v_m \to v_p$. Таким образом, положительные одноэкстремальные формы существуют в данном случае в области $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p(\gamma)$, где $v_m(\omega_p) = v_p$; при данном ω такая форма единственна (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим отрицательные одноэкстремальные формы. Для них зависимость $\omega(v_m)$ имеет вид

$$\frac{\omega}{\sqrt{2}} = \int_0^1 \left[\frac{|v_{m2}|(1+|v_{m2}|)(1+|v_{m2}|z)}{(1-z)[-1-\gamma(1+|v_{m2}|)(1+|v_{m2}|z)]}\right]^{1/2} dz \tag{2.2}$$

Производная подынтегрального выражения в (2.2) по $|v_{m2}|$ положительна при любых $|v_{m2}|$. Следовательно, $\omega(v_m)$ существует при всех $|v_{m2}|$ и монотонно возрастает, с ростом $|v_{m2}|$. Поэтому при данном ω отрицательная одноэкстремальная форма существует и единственна при всех $\omega \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$, $\partial\omega / \partial v_m \to -\infty$ при $|v_{m2}| \to 0$ (фиг. 4).

При $\omega = \omega_p$ от ветви положительных одноэкстремальных форм ответвляются три ветви многоэкстремальных форм. Две эти формы несимметричные, отвечают путям изображающей точки ABA и BAB (фиг. 2, *б*) и получаются одна из другой зеркальным отражением в плоскости, проходящей через середину струны перпендикулярно Ox. Третья форма симметричная и отвечает пути $BABA$.

Все эти формы могут быть найдены следующим образом. Рассмотрим положительную одноэкстремальную форму для некоторого $\omega = \omega_1$. Ей отвечает $v_{m1}(\omega_1)$. Найдем «сопряженное» значение v_{m2} из (2.1). Определим ω_2 из соотношения $v_{m2} = v_{m2}(\omega_2)$ для отрицательных одноэкстремальных форм. Значению $\omega = \omega_1 + \omega_2$ отвечает двухэкстремальная форма типа ABA. Струна, имеющая такую форму, разбивается на два участка: на первом ее форма совпадает с одноэкстремальной формой при $\omega = \omega_1$, на втором — при $\omega = \omega_2$. Аналогично определяются формы типа $ABABA$, рождающиеся при $\omega = 2\omega_p(\gamma)$, и т. д.

Пусть $\gamma > -1$. Рассмотрим положительные одноэкстремальные формы. Они определяются соотношениями (1.3), (1.4), $0 \leqslant v_m \leqslant 1$, как в случае $\gamma > 0$. Покажем, что зависимость $\omega = \omega(v_m)$ имеет только один максимум. Как и ранее, $\partial\omega / \partial v_m \to \infty$ при $v_m \to 0$ и $\partial\omega / \partial v_m \to -\infty$ при $v_m \to 1$, т. е. $\omega(v_m)$ имеет, по крайней мере, один максимум. Допустим, что при $\gamma = \gamma_*$ один максимум расщепляется на несколько максимумов и минимумов. Пусть при $\gamma = \gamma_*$ максимум достигается при $v_m = v_{m*}$. Тогда при $v_m = v_{m*}$, $\gamma = \gamma_*$ должно быть

$$\partial\omega/\partial v_m = 0, \qquad \partial^2\omega/\partial v_m \partial\gamma = 0 \tag{2.3}$$

Можно показать, что равенства (2.3) несовместны. Отсюда следует, что при изменении γ в $(-1, 0)$ рождение новых экстремумов невозможно, и кривые $\omega(v_m)$ имеют только один максимум (фиг. 4).

В данном случае также возможны отрицательные одноэкстремальные формы равновесия. Для них зависимость $\omega(|v_{m2}|)$ определяется по-прежнему соотношением (2.2), где, однако, должно быть $|v_{m2}| \geqslant v_p = |1 + 1/\gamma|$. Найдем производную $\partial\omega / \partial |v_{m2}|$, которая имеет вид (1.5), но v_m заменяется на $-|v_{m2}|$. При $|v_{m2}| = v_p$ функция g_2 в (1.5) обращается в $g_2 = z^{-3/2} v_p^{-1}$ и соответствующий интеграл расходится. С другой стороны, при $|v_{m2}| \to \infty$ функция $g_1(z, |v_{m2}|)$ убывает как $|v_{m2}|^{-1/2}$, а произведение $g_2 g_3$ — как $|v_{m2}|^{-5/2}$. Поэтому при некотором $|v_{m2}|$ подынтегральная функция в выражении для производной будет положительна. Таким образом, ветвь отрицательных форм имеет предельную точку (фиг. 4).

Ветвь одноэкстремальных форм, идущая из предельной точки в сторону меньших $|v_{m2}|$, в точке (ω_p, v_p), $\omega_p = \omega(v_p)$ расщепляется на три ветви; ветвь трехэкстремальных симметричных форм $ABAB$ и две ветви двухэкстремальных несимметричных ABA и BAB. Эти формы можно найти указанным выше методом сложения.

Осталось рассмотреть случай $\gamma = -1$. В этом случае при любых ω имеется решение $v \equiv 0$, отвечающее недеформированной струне. При $\gamma = -1$ из (1.3), (1.4) получим

$$\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - v_m} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - v_m z}{1 - z}} \frac{dz}{\sqrt{1 + (1 - v_m) z}} \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) при $v_m > 0$ описывает ветвь одноэкстремальных форм, в которую при $\gamma \to -1 + 0$ переходит ветвь одноэкстремальных положительных форм, отвечающая случаю $\gamma > -1$ и расположенная между предельной точкой и точкой $v_m = 1$. Другая («нижняя») ветвь этих форм переходит в отрезок оси ω между точкой $\omega = 0$ и точкой пересечения оси ω с линией (2.4). Полагая в (2.4) $v_m = 0$, получим $\omega = \pi / \sqrt{2}$. В точку $\omega = \pi / \sqrt{2}$, $v_m = 0$ приходит предельная точка ветви положительных одноэкстремальных форм при $\gamma \to -1 + 0$, поэтому в этой точке касательная к кривой $v_m(\omega)$ вертикальна (фиг. 4).

В точку $\omega = \pi / \sqrt{2}$, $v_m = 0$ при $\gamma \to -1 + 0$ приходит также предельная точка ветви отрицательных одноэкстремальных форм. Отрезок этой ветви, расположенный между предельной точкой и точкой ветвления, переходит в отрезок $\pi / \sqrt{2} \leqslant \omega \leqslant \pi\sqrt{2}$ оси ω, а ее бесконечная часть — в бесконечную ветвь одноэкстремальных форм, которые описываются тем же выражением (2.4), если заменить v_m на $-|v_{m2}|$. Кроме того, от решения $v \equiv 0$ при значениях ω, кратных $\pi / \sqrt{2}$, ответвляется теоретически бесконечное число ветвей многоэкстремальных форм.

3. Устойчивость равновесий. Уравнение (1.1) может быть выведено из вариационного принципа

$$\delta V = 0, \qquad V = \int_0^\omega \left(\frac{1}{2} v'^2 - \frac{1}{1 - v} - \gamma v \right) d\tau \tag{3.1}$$

где к сравнению допускаются функции $v(\tau)$ такие, что $v(0) = v(\omega) = 0$, $v'(\tau) \in L_2(0, \omega)$ и $v(\tau) < 1$. Форму равновесия считаем устойчивой, если она сообщает функционалу V локальный минимум на указанном классе функций. Исследуем устойчивость недеформированного состояния при $\gamma = -1$. Вторая вариация функционала (3.1) на решении $v \equiv 0$ имеет вид

$$\delta^2 V = \int_0^\omega \left(\frac{1}{2}\zeta^{\cdot 2} - \zeta^2\right) d\tau \tag{3.2}$$

где $\zeta(0) = \zeta(\omega) = 0$ и $\zeta^{\cdot}(\tau) \in L_2(0, \omega)$. Для таких $\zeta(\tau)$ имеем

$$\int_0^\omega \zeta^{\cdot 2}\, d\tau \geqslant \frac{\pi^2}{\omega^2}\int_0^\omega \zeta^2\, d\tau \tag{3.3}$$

причем для бо́льших коэффициентов перед вторым интегралом существуют такие $\zeta(\tau)$, что выполняется противоположное неравенство. Поэтому при $\omega < \pi / \sqrt{2}$ будет $\delta^2 V > 0$, т. е. недеформированное состояние до точки бифуркации $\omega = \pi / \sqrt{2}$ устойчиво. В точке бифуркации оно становится неустойчивым первой степени неустойчивости, а устойчивость переходит к ветви отрицательных одноэкстремальных форм. В следующей особой точке $\omega = \pi\sqrt{2}$ недеформированное состояние становится неустойчивым второй степени неустойчивости, а отходящие ветви будут первой степени неустойчивости и т. д., как в задаче о продольном изгибе.

Рассмотрим положительные одноэкстремальные формы при $\gamma > -1$. Возьмем $v(\omega, \gamma)$ на ветви с меньшими v_m. При $\omega = \text{const}$ и $\gamma \to -1$ эта форма непрерывно переходит в устойчивое недеформированное состояние. Устойчивость при таком переходе не меняется, поэтому данная форма устойчива. Из вида кривых равновесия $v_m(\omega)$ при $\gamma = \text{const}$ следует, что в предельной точке устойчивость исчезает, и ветвь с бо́льшими v_m неустойчива. Тем же путем находим, что при $0 > \gamma > -1$ ветвь отрицательных одноэкстремальных форм, уходящая из предельной точки в бесконечность, устойчива. Устойчивы также отрицательные одноэкстремальные формы при $\gamma < -1$. Все остальные формы неустойчивы.

Примечательно, что при $0 > \gamma > -1$ существует две непересекающиеся устойчивые ветви, причем на отрицательной ветви формы равновесия имеют точки перегиба; последнее обусловлено сменой возрастания и убывания $\omega(\tau)$ (фиг. 2, *в*). Для сравнения укажем, что в родственной задаче, рассмотренной в [2], и в ряде задач об эластике Эйлера формы с перегибом заведомо неустойчивы.

В задаче о равновесии струны без внешней нагрузки над действием искривленного магнита перемещения определяются как сумма найденной ранее функции $v(\tau)$ и полинома второй степени от τ. В результате получаются только положительные формы без точек перегиба, как и должно быть в случае нагрузки, не меняющей знака при любых перемещениях.

Поступила 14 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходжаев К. Ш. Нелинейные задачи о деформировании упругих тел магнитным полем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Ackerberg R. C. On a nonlinear differential equation of electrohydrodynamics. Proc. Roy. Soc. A, 1969, vol. 312, No. 1508.