4. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 2.
5. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости математической физики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
8. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. М. Изд-во иностр. лит., 1949.
9. Левин Б. Я. Распределение нулей целых функций М., Гостехиздат, 1956.
10. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 39.
11. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5. М.— Л., Физматгиз, 1962.

---

УДК 539.3

# ВНЕШНЯЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

**В. И. Фабрикант**

(Ульяновск)

Получено в замкнутой форме точное решение основной осесимметричной смешанной задачи для трансверсально-изотропного полупространства, когда внутри круга заданы нормальное и касательное напряжения, а вне круга заданы нормальное и радиальное перемещения.

Смешанным задачам теории упругости для изотропного полупространства посвящено много работ [1–5]. Меньше внимания уделяется аналогичным задачам для трансверсально-изотропного полупространства [6, 7].

1. Рассмотрим трансверсально-изотропное упругое полупространство $z \geqslant 0$, плоскости изотропии которого параллельны границе. Пусть внутри круга радиуса $a$ заданы нормальное напряжение $\sigma_0(\rho)$ и радиальное касательное напряжение $\tau_0(\rho)$; вне круга заданы нормальное перемещение $\varphi_1(\rho)$ и радиальное перемещение $\varphi_2(\rho)$. Поставим задачу определения напряжений $\sigma(\rho)$ и $\tau(\rho)$ при $\rho > a$. Методами, аналогичными примененным в работе [8], можно свести рассматриваемую задачу к системе двух интегральных уравнений относительно искомых напряжений

$$2H\left[-\pi\alpha\int_\rho^\infty \tau(x)\,dx + 2\int_\rho^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2-\rho^2}}\int_a^u \frac{\sigma(x)\,x\,dx}{\sqrt{u^2-x^2}}\right] = \psi_1(\rho) \qquad (1.1)$$

$$2H\left[2\gamma_1\gamma_2\rho\int_\rho^\infty \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-\rho^2}}\int_a^u \frac{\tau(x)\,x^2dx}{\sqrt{u^2-x^2}} - \frac{\pi\alpha}{\rho}\int_a^\rho \sigma(x)\,x\,dx\right] = \psi_2(\rho)$$

$$\psi_1(\rho) = \varphi_1(\rho) - 4H\int_0^a \frac{du}{\sqrt{\rho^2-u^2}}\int_u^a \frac{\sigma_0(x)\,x\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

$$\psi_2(\rho) = \varphi_2(\rho) - 4\gamma_1\gamma_2\frac{H}{\rho}\int_0^a \frac{u^2du}{\sqrt{\rho^2-u^2}}\int_u^a \frac{\tau_0(x)\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}} + 2\pi\frac{H\alpha}{\rho}\int_0^a \sigma_0(x)\,x\,dx$$

Константы $H$, $\alpha$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ определяются через упругие постоянные материала полупространства [8].

Будем искать решение системы (1.1) в виде

$$\sigma(x) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\int_x^\infty \frac{f_1(t)\,tdt}{\sqrt{t^2-x^2}} + \int_a^x \frac{f_2(t)\,tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right] \tag{1.2}$$

$$\tau(x) = \frac{d}{dx}\left[C_1\int_a^x \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + C_2\int_x^\infty \frac{f_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\right] + \frac{C_1 Da}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

Здесь $f_{1,2}(t)$ — новые искомые функции; постоянные $C_1$, $C_2$, $D$ будут определены в дальнейшем.

Подстановка решений (1.2) в систему (1.1) после изменения порядка интегрирования и вычисления получившихся при этом внутренних интегралов приводит к двум уравнениям относительно $f_1(t)$ и $f_2(t)$, которые можно решать независимо, если положить $C_1 = \alpha / \gamma_1\gamma_2$, $C_2 = -1/\alpha$

$$2H\left[-\pi\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\left(D\arcsin\frac{a}{\rho} - \int_a^\rho \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\int_\rho^\infty \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{\sqrt{u^2-\rho^2}}du \int_a^\infty \frac{f_1(t)\,t\,dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t^2-u^2)}\right] = \psi_1(\rho)$$

$$2\pi\frac{H\alpha}{\rho}\left[\int_a^\infty \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}} - 1\right) f_1(t)\,dt + aD - \int_a^\rho \frac{f_2(t)\,tdt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} - \right. \tag{1.3}$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\frac{\gamma_1\gamma_2}{\alpha^2}\int_\rho^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2-\rho^2}\sqrt{u^2-a^2}}\int_a^\infty \frac{u^4(t^2-a^2)-\rho^2a^2(t^2-u^2)}{u^2\sqrt{t^2-a^2}\,(t^2-u^2)} f_2(t)\,dt\right] = \psi_2(\rho)$$

2. Найдем решение первого из уравнений (1.3). Разделим обе его части на $\rho\,(\rho^2 - r^2)^{1/2}$, проинтегрируем по $\rho$ от $r$ до $\infty$, результат умножим на $r$ и продифференцируем по $r$. После преобразований получим уравнение

$$\lambda^2\int_a^\infty \Phi_1(r,t)\,dt - \int_a^\infty F_1(r,t)\,dt = \chi_1(r) \tag{2.1}$$

$$\chi_1(r) = \frac{1}{2\pi H}\frac{d}{dr}\left(r\int_r^\infty \frac{\psi_1(\rho)\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-r^2}}\right) - \lambda^2\frac{D}{r}\ln\sqrt{\frac{r+a}{r-a}}$$

$$\Phi_1(r,t) = \frac{f_1(t)}{t^2-r^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}$$

$$F_1(r,t) = \frac{t\sqrt{r^2-a^2}}{r\sqrt{t^2-a^2}}\Phi_1(r,t)$$

Введем обозначения

$$Y_{c,s}(r) = \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right. \left[\theta\ln\frac{r+a}{r-a}\right]$$

Величина постоянной $\theta$ будет определена в дальнейшем.

Умножим обе части уравнения (2.1) на $Y_c(r)/(r^2 - x^2)$ и проинтегрируем по $r$ от $a$ до $\infty$, используя формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана [10]. После преобразований получим

$$\frac{\pi^2(1-\lambda^2)}{4x^2}Y_c(x)f_1(x)+\frac{\pi}{2}\lambda^2\operatorname{cth}\pi\theta\int_a^\infty\Phi_1(x,t)\left[\frac{Y_s(x)}{x}-\frac{Y_s(t)}{t}\right]dt-$$

$$-\frac{\pi a}{2x^2\operatorname{ch}\pi\theta}\int_a^\infty\frac{f_1(t)\,dt}{t\sqrt{t^2-a^2}}-th\pi\theta\int_a^\infty\left[F_1(x,t)\frac{Y_s(x)}{x}-\right. \tag{2.2}$$

$$\left.-\Phi_1(x,t)\frac{Y_s(t)}{t}\right]dt=\frac{1}{x}X_1^c(x)$$

Здесь и в дальнейшем обозначены

$$X_{1,2}^{c,s}(x)=\int_a^\infty\frac{\chi_{1,2}(r)}{r^2-x^2}\begin{Bmatrix}xY_c(r)\\ rY_s(r)\end{Bmatrix}dr$$

Выберем величину $\theta$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda^2\operatorname{cth}\pi\theta-\operatorname{th}\pi\theta=0,\qquad\qquad \theta=\pi^{-1}\operatorname{Arth}\lambda$$

Тогда выражение (2.2) упростится

$$\frac{\pi^2}{4x^2\operatorname{ch}^2\pi\theta}Y_c(x)f_1(x)+\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\theta\frac{Y_s(x)}{x}\int_a^\infty[\Phi_1(x,t)-F_1(x,t)]\,dt-$$

$$-\frac{\pi a}{2x^2\operatorname{ch}\pi\theta}\int_a^\infty\frac{f_1(t)\,dt}{t\sqrt{t^2-a^2}}=\frac{1}{x}X_1^c(x) \tag{2.3}$$

Если умножить обе части уравнения (2.1) на $rY_s(r)/(r^2-x^2)$ и проделать выкладки, аналогичные указанным выше, то получим

$$\frac{\pi^2}{4x\operatorname{ch}^2\pi\theta}Y_s(x)f_1(x)-\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\theta Y_c(x)\int_a^\infty[\Phi_1(x,t)-F_1(x,t)]\,dt=X_1^s(x) \tag{2.4}$$

Теперь уравнения (2.3) и (2.4) дают

$$f_1(x)=\frac{4\operatorname{ch}^2\pi\theta}{\pi^2}x\,[X_1^c(x)Y_c(x)+X_1^s(x)Y_s(x)] \tag{2.5}$$

3. Второе из уравнений (1.3) подобными же приемами приводится к виду

$$-\int_a^\infty\frac{f_2(t)\,t\,dt}{t^2-r^2}+\frac{1}{\lambda^2}\left[r\sqrt{r^2-a^2}\int_a^\infty\frac{f_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-a^2}\,(t^2-r^2)}+\right. \tag{3.1}$$

$$\left.+\int_a^\infty\frac{f_2(z)\,dt}{\sqrt{t^2-a^2}}\right]=\frac{1}{2\pi H\alpha}\frac{d}{dr}\left(r\int_r^\infty\frac{\psi_2(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\right)=\chi_2(r)$$

Точное решение уравнения (3.1) дается формулой

$$f_2(x)=-\frac{4\operatorname{sh}^2\pi\theta}{\pi^2}[X_2^c(x)Y_c(x)+X_2^s(x)Y_s(x)] \tag{3.2}$$

Следует отметить, что решение (3.2) удовлетворяет второму из уравнений (1.3) только с точностью до слагаемых вида const / $\rho$, которые были потеряны в процессе решения при дифференцировании. Однако всегда можно выбрать величину $D$ таким образом, чтобы уравнение удовлетворялось тождественно. Полученное решение можно использовать и в случае полной изотропии, если положить

$$H=\frac{1-\nu^2}{\pi E},\qquad \alpha=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},\qquad \gamma_1=\gamma_2=1$$

4. Рассмотрим пример: пусть по площади круга $\rho\leqslant a$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка $\sigma_0=q$ и отсутствуют касательные напряжения; остальная часть границы полупространства жестко защемлена. Определим касательное и нормальное напряжения при $\rho>a$, а также перемещения внутри круга.

Используя ранее полученные формулы, будем иметь

$$\psi_1(\rho)=-4qH\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{\sqrt{\rho^2-u^2}}\,du,\qquad \psi_2(\rho)=\pi qH\alpha\frac{a^2}{\rho}$$

$$\chi_1(r)=2\pi qH\left(1-\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right)-\lambda^2\frac{D}{r}\ln\sqrt{\frac{r+a}{r-a}} \tag{4.1}$$

$$f_1(t)=\frac{2}{\pi}q\,\mathrm{cth}\,\pi\theta\,[tY_s(t)-2a\theta Y_c(t)]-D[1-Y_c(t)]$$

$$\chi_2(r)=f_2(t)=0$$

Подстановка выражений (4.1) во второе из уравнений (1.3) позволяет определить

$$D=\frac{2}{\pi}qa\theta\,\mathrm{cth}\,\pi\theta \tag{4.2}$$

Совокупность формул (1.2), (4.1), (4.2) полностью определяет напряжения в защемленной части границы полупространства.

Теперь можно определить перемещения внутри круга $\rho\leqslant a$ в виде

$$u=2\pi qH\alpha\left\{\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{cth}\,\pi\theta}{\rho}\left[\int_a^\infty\frac{tY_s(t)-a\theta[1+Y_c(t)]}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,tdt-a\theta\sqrt{a^2-\rho^2}\right]-\frac{\rho}{2}\right\}$$

$$w=4qH\left[\int_a^\infty\frac{\sqrt{t^2-a^2}-tY_c(t)-a\theta Y_s(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,dt+\int_0^\rho\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\sqrt{\rho^2-t^2}}\,dt-\frac{\pi}{2}a\theta\,\mathrm{th}\,\pi\theta\right] \tag{4.3}$$

Перемещения в центре круга выражаются в элементарных функциях

$$u=0,\qquad w=4\pi qHa\theta\frac{1+\mathrm{ch}\,\pi\theta}{\mathrm{sh}\,2\pi\theta} \tag{4.4}$$

Были вычислены значения напряжений в защемленной части границы полупространства, а также перемещения внутри круга на ЭВМ «Одра-1204». Для контроля в

*Таблица 1*

| $\rho/a$ | $-\sigma/q\times10^4$ | | | $\tau/q\times10^4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | сталь | бетон | песчаник | сталь | бетон | песчаник |
| 1.01 | 34 856 | 33 797 | 34 440 | 12 689 | 17 988 | 16 638 |
| 1.10 | 6 752 | 6 859 | 6 796 | 1 364 | 1 966 | 1 801 |
| 1.20 | 3 414 | 3 494 | 3 446 | 548 | 791 | 723 |
| 1.30 | 2 139 | 2 196 | 2 162 | 294 | 425 | 388 |
| 1.50 | 1 083 | 1 116 | 1 096 | 119 | 172 | 157 |
| 1.80 | 521 | 538 | 528 | 45 | 65 | 60 |
| 2.00 | 354 | 366 | 359 | 27 | 39 | 36 |
| 4.00 | 36 | 38 | 37 | 1 | 2 | 2 |
| 10.00 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |

*Таблица 2*

| $\rho/a$ | $w/4qHa \times 10^4$ | | | $-u/4qHa\alpha \times 10^4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | сталь | бетон | песчаник | сталь | бетон | песчаник |
| 0.00 | 9652 | 9337 | 9523 | 0 | 0 | 0 |
| 0.10 | 9602 | 9287 | 9473 | 545 | 539 | 542 |
| 0.20 | 9451 | 9137 | 9322 | 1085 | 1073 | 1080 |
| 0.30 | 9194 | 8881 | 9066 | 1614 | 1596 | 1607 |
| 0.40 | 8822 | 8512 | 8694 | 2123 | 2101 | 2115 |
| 0.50 | 8320 | 8013 | 8194 | 2606 | 2574 | 2593 |
| 0.60 | 7664 | 7362 | 7540 | 3046 | 3007 | 3030 |
| 0.70 | 6813 | 6517 | 6691 | 3416 | 3367 | 3396 |
| 0.80 | 5682 | 5398 | 5565 | 3656 | 3596 | 3632 |
| 0.90 | 4064 | 3803 | 3956 | 3588 | 3511 | 3557 |
| 0.95 | 2852 | 2616 | 2755 | 3216 | 3129 | 3181 |
| 0.99 | 1196 | 1025 | 1125 | 2106 | 2009 | 2067 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

случаях полной изотропии вычислялись также нормальные напряжения по формулам, полученным в работе [2]. В пределах принятой относительной точности вычислений, равной 0.01, результаты вычислений по формулам данной работы и по формулам работы [2] оказались совпадающими, поэтому они не приводятся. Величины упругих постоянных стали, бетона и песчаника приняты такими же, как и в работе [7]; обозначениям работы [7] $B$, $C$, $\nu_1$, $\nu_2$ соответствуют здесь $(2\pi H)^{-1}$, $\alpha$, $\gamma_1$, $\gamma_2$. В табл. 1 приведены результаты вычислений безразмерных напряжений, в табл. 2 — безразмерных перемещений. Следует отметить, что в принятом виде безразмерные перемещения, а также нормальные напряжения слабо зависят от свойств материала полупространства.

Поступила 9 VII 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О симметричном давлении кругового штампа на полупространство при наличии сцепления. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Keer L. M. Mixed boundary-value problems for an elastic half—space. Proc. Cambrige Philos. Soc., 1967, vol. 63, No 4.
5. Капшивый А. А., Маслюк Г. Ф. О решении смешанной осесимметричной задачи теории упругости для полупространства. Вестн. Киевск. ун-та, Сер. Матем., механ., 1968, № 10.
6. Сунчелеев Р. Я. Упругое равновесие неограниченного трансверсально-изотропного тела, ослабленного внутренним плоским круговым разрезом. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
7. Кизима Я. М., Грилицкий Д. В. К осесимметричной задаче о давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. Прикл. механ., 1964, т. 10, вып. 3.
8. Фабрикант В. И. Действие сдвигающей силы и опрокидывающего момента на цилиндрический штамп, сцепленный с трансверсально-изотропным полупространством. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.