ЛИТЕРАТУРА

1. Орел А. А. Задачи в вариациях для плоских околозвуковых течений газа. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. В сб. Теоретические работы по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
3. Франкль Ф. И. О прямой задаче теории сопла Лаваля. Уч. зап. Кабард.-Балкарск. ун-та, 1959, вып. 3.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

К ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КЛИНА

В. А. Бабешко, В. Н. Беркович

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются две смешанные задачи для клина, ребро которого неограниченно в обе стороны. Изучается интегральное уравнение, порожденное этими задачами, и предлагается прием их решения, отличный от известных подходов, эффективный при малых углах раствора α клина.

Случай, когда поле смещений и напряжений не зависит от координаты вдоль ребра клина, соответствует плоской граничной задаче.

Детальное исследование основных и смешанных задач для клина содержится в работах [1–4] и др. В случае пространственного клина Я. С. Уфляндом [2] решена статическая задача теории упругости второго рода, а в одной из работ А. Ф. Улитко [1] задача первого рода сведена к однозначно обратимому уравнению Фредгольма второго рода.

1. На основании решения Я. С. Уфлянда [2] исследуется антисимметричная по α статическая смешанная задача с двумя линиями раздела граничных условий, параллельными оси z, направленной вдоль ребра клина, и удаленными от нее на расстояние c и d соответственно. В области между указанными линиями на обеих гранях клина предполагается заданным нормальное давление, зависящее от z, и перемещения, параллельные граням. Вне указанной области грани клина жестко закреплены.

Вторая смешанная задача формулируется для антиплоской деформации клина. Предполагается, что одна из граней клина жестко закреплена, вторая же в отмеченной ранее области загружена штампом, подошва которого совершает гармонические колебания в направлении оси z, не зависящие от этой координаты. Единственной неизвестной под штампом является касательное напряжение, параллельное оси z. Клин предполагается вязкоупругим с постоянным во времени модулем Юнга и зависящим от разности аргументов ядром ползучести $\theta\,(t-\tau)$. В частности, при отсутствии ползучести получается упругий клин.

Описанные задачи приводятся с использованием преобразования Конторовича — Лебедева [2] к решению интегрального уравнения вида

$$\int_1^a k\,(r,\rho)\,q\,(\rho)\,d\rho = Af\,(r) \qquad (1 \leqslant r \leqslant a) \tag{1.1}$$

$$k\,(r,\rho) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} I_{-iu}\,(\varkappa r)\,K_{-iu}\,(\varkappa\rho)\,K\,(u)\,u du \tag{1.2}$$

---

[1] См. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Автореф. докт. дисс., Киев, 1971.

В случае статической задачи приняты следующие обозначения:

$$f(r) = c_1 I_\mu(\varkappa r) + c_2 K_\mu(\varkappa r) + \varphi(r) \tag{1.3}$$
$$K(u) = u(\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha)[(3-4\nu)\operatorname{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha]^{-1}(u^2+\mu^2)^{-1}$$
$$A^{-1} = 4G(1-\nu), \qquad a = d/c$$
$$r^2\varphi'' + r\varphi' - (\varkappa^2 r^2 + \mu^2)\varphi = w(r)$$

Здесь c_1, c_2 — подлежащие определению постоянные, r, ρ — безразмерные параметры, отнесенные к c, $\mu > 0$ — произвольное число, $\varphi(r)$ — частное решение дифференциального уравнения, $q(r)$ и $w(r)$ — преобразования Фурье по координате z соответственно от нормальных перемещений и напряжений, $\varkappa = |\gamma|$, γ — параметр преобразования Фурье по координате z.

В случае динамической задачи приняты обозначения

$$\varkappa^2 = -D\sigma^2 c^2 G^{-1}, \qquad K(u) = u^{-1}\operatorname{th}\alpha u, \qquad A = G/c$$
$$\sigma^2 = \omega^2\theta^*, \qquad G^\circ = G\theta^*, \qquad \theta^* = 1 + \int_0^\infty \theta(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \tag{1.4}$$

Здесь ω — круговая частота колебаний штампа, D — плотность материала клина, $f(r)$ — амплитуда смещений полосы в области контакта, G°, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала клина. Связь безразмерных параметров с размерными такая же, как и в статической задаче.

В работе [5] изложен прием, позволяющий изучать частный случай задания уравнения (1.1) на отрезке $[0, a]$; если же уравнение (1.1) задано на отрезке $[1, a]$, то этот метод непосредственно не применим.

Ниже предлагается другой подход к решению этого уравнения, основанный на сведении его к бесконечным алгебраическим системам уравнений [6].

Не конкретизируя функцию $K(u)$, будем считать, что она вещественная и четная на вещественной оси, мероморфная в комплексной плоскости, не имеющая вещественных нулей и полюсов. Считается, что она допускает представление вида

$$K(u) = K_+(u)\,K_-(u), \qquad \lim uK(u) = C \qquad (u \to \infty) \tag{1.5}$$

Здесь K_+ и K_- — регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции, убывающие вместе с функциями $[uK_\pm(u)]^{-1}$ на системе правильных контуров.

Пусть

$$K_+'(-z_l) = C_1 l^{-1/2}[1 + O(l^{-1}\ln l)] \tag{1.6}$$
$$[K_-^{-1}(\zeta_l)]' = C_2 l^{1/2}[1 + O(l^{-1}\ln l)] \qquad (l \to \infty)$$

Здесь z_l и ξ_l — соответственно нули и полюсы функции $K(u)$, лежащие в верхней полуплоскости, предполагаемые однократными с конечной плотностью распределения β.

С целью упрощения уравнения (1.1) представим правую часть интегралом Конторовича — Лебедева и поэтому ограничимся случаем

$$f(r) = I_\eta(\varkappa r)\,I_\eta^{-1}(\varkappa a)$$

Решение уравнения (1.1) для указанной правой части будем искать в форме ряда

$$q(\rho) = A\{x_0 I_\eta(\varkappa\rho)\,I_\eta^{-1}(\varkappa a) +$$
$$+ \sum_{k=1}^\infty [x_k I_{-iz_k}(\varkappa\rho)\,I_{-iz_k}^{-1}(\varkappa a) + y_k K_{-iz_k}(\varkappa\rho)\,K_{-iz_k}^{-1}(\varkappa)]\}\,\rho^{-1} \tag{1.7}$$

где x_k, y_k — подлежащие определению постоянные.

Внесем (1.7) в левую часть уравнения (1.1) и произведем интегрирование, представив ядро $k(r, \rho)$ в форме

$$k(r,\rho)=\sum_{k=1}^{\infty} s_k \begin{pmatrix} K_{-i\zeta_k}(\varkappa r)\, I_{-i\zeta_k}(\varkappa\rho), & r>\rho \\ J_{-i\zeta_k}(\varkappa r)\, K_{-i\zeta_k}(\varkappa\rho), & r<\rho \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Указанное представление получается в результате вычисления интеграла (1.2) по теории вычетов. Последнее возможно, благодаря оценкам поведения функций $K_p(z)$ и $I_p(z)$ в комплексной плоскости p, полученных на основании результатов работы [7] и имеющих вид [8] ($|p| \to \infty$)

$$\begin{gathered} I_p(z) = 1/\pi\, \sqrt{2}\,(z^2+p^2)^{-1/4} e^{\omega}\,(1+O(p^{-1})) \\ K_p(z) = 1/\sqrt{2}\,(z^2+p^2)^{-1/4} e^{-\omega}\,(1+O(p^{-1})) \\ (\omega = \sqrt{z^2+p^2} - p \operatorname{arsh} pz^{-1}) \end{gathered} \tag{1.9}$$

В результате интегрирования получаются ряды типа Дирихле по функциям $I_p(z)$, $K_p(z)$. Требуя, чтобы эти ряды давали правую часть уравнения (1.1), приходим к бесконечной системе для определения постоянных x_l, y_l

$$\begin{gathered} A_{11}X + A_{12}Y = B_1, \qquad X = \{x_l\} \\ A_{21}X + A_{22}Y = B_2, \qquad Y = \{y_l\} \\ A_{11} = \{a_{rl}(1,1)\} = iW\,[I_{-iz_l}(\lambda)\, K_{-i\zeta_r}(\lambda)]\,[(\zeta_r^2 - z_l^2)\, I_{-zi_l}(\lambda)\, K_{-i\zeta_r}(\lambda)]^{-1} \\ A_{12} = \{a_{rl}(1,2)\} = iW\,[K_{-iz_l}(\lambda)\, K_{-i\zeta_r}(\lambda)]\,[(\zeta_r^2 - z_l^2)\, K_{-iz_l}(\varkappa)\, K_{-i\zeta_r}(\lambda)]^{-1} \\ A_{21} = \{a_{rl}(2,1)\} = -iW\,[I_{-iz_l}(\varkappa)\, I_{-i\zeta_r}(\varkappa)]\,[\zeta_r^2 - z_l^2)\, I_{-iz_l}(\lambda)\, I_{-i\zeta_r}(\varkappa)]^{-1} \\ A_{22} = \{a_{rl}(2,2)\} = -iW\,[K_{-iz_l}(\varkappa)\, I_{-i\zeta_r}(\varkappa)]\,[(\zeta_r^2 - z_l^2)\, K_{-iz_l}(\varkappa)\, I_{-i\zeta_r}(\varkappa)]^{-1} \\ B_1 = \{b_r(1)\} = ix_0 W\,[K_{-i\zeta_r}(\lambda)\, I_\eta(\lambda)]\,[(\zeta_r^2 + \eta^2)\, K_{-i\zeta_r}(\lambda)\, I_\lambda(\lambda)]^{-1} \\ B_2 = \{b_r(2)\} = -ix_0 W\,[I_{-i\zeta_r}(\varkappa)\, I_\eta(\varkappa)]\,[(\zeta_r^2 + \eta^2)\, I_{-i\zeta_r}(\varkappa)\, I_\eta(\lambda)]^{-1} \\ W[x,y] = x'y - y'x, \qquad x_0 = K^{-1}(i\eta), \qquad \lambda = \varkappa a \end{gathered} \tag{1.10}$$

Равенства (1.10) являются достаточными условиями разрешимости уравнения (1.1) в классе решений, представленных в форме (1.7). Эти условия оказываются и необходимыми при условии, что система $I_{\lambda_k}(z)$, $K_{\lambda_k}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обладает свойством минимальности (усиленной линейно независимости) на отрезке вещественной оси, не содержащем начала координат. В рассматриваемом случае свойство минимальности указанной системы удается доказать, построив операторы преобразования ([9], стр. 552) и применив их к минимальной системе экспоненциальных функций ([10], стр. 133).

Нетрудно проверить, что при $|\zeta_r| \to \infty$, $|z_l| \to \infty$ элементы матриц A_{kk} стремятся к матрице A с элементами $(\zeta_r - z_l)^{-1}$, а элементы матриц A_{kj}, $k \neq j$ исчезают. Бесконечная система с матрицей A исследовалась в работе [11]. Ниже результаты этой работы будут использованы для исследования систем (1.10).

2. Используя обратную матрицу A^{-1} [11], систему (1.10) можно привести к нормальному виду

$$\begin{gathered} X = A^{-1}(A - A_{11})\,X - A^{-1}A_{12}Y + A^{-1}B_1 \\ Y = A^{-1}(A - A_{22})\,Y - A^{-1}A_{21}X + A^{-1}B_2 \end{gathered} \tag{2.1}$$

При помощи оценок (1.6) и (1.9) можно установить, что матрицы в правой части системы (2.1) порождают вполне непрерывные операторы в пространстве последовательностей $s(\sigma)$, $(0 < \sigma < 1/2)$.

Здесь $X \in s(\sigma)$, при условии

$$\| X \|_{s(\sigma)} = \sup_k |x_k k^{\sigma}| < \infty, \qquad \lim |x_k k^{\sigma}| = 0 \qquad (k \to \infty)$$

В ряде случаев удается доказать однозначную разрешимость в $s(\sigma)$ системы (2.1). Последнее имеет место, например, при $\varkappa > 0$. В этом случае оператор в левой части

(1.1) положительно определенный в некотором гильбертовом пространстве. В общем случае система (2.1) квазирегулярна и ее можно исследовать известными методами [12].

При малых углах раствора клина операторы в правой части системы (2.1) малы и могут быть сделаны сжимающими; система может быть решена методом последовательных приближений.

3. Исследуем решение системы (2.1) в нулевом приближении. Учитывая сказанное выше, заметим, что такое решение будет эффективно при малых углах раствора клина. Вычислив элементы матриц $A^{-1}B_k$ и подставив их значения в соотношение (1.7), получим приближенное решение уравнения (1.1), причем коэффициенты x_l, y_l имеют вид

$$x_l = x(z_l) = \frac{1}{K_+'(-z_l)\,2\eta}\left[\frac{V(\lambda)-\eta}{(z_l+i\eta)\,K_-(i\eta)} - \frac{V(\lambda)+\eta}{(z_l-i\eta)\,K_+(i\eta)}\right] \tag{3.1}$$

$$y_l = y(z_l) = \frac{1}{K_+'(-z_l)\,2\eta}\left[\frac{V(\varkappa)-\eta}{(z_l-i\eta)\,K_+(i\eta)} - \frac{V(\varkappa)+\eta}{(z_l+i\eta)\,K_-(i\eta)}\right]\frac{I_\eta(\varkappa)}{I_\eta(\lambda)}$$

$$V(x) = I_\eta'(x)\,I_\eta^{-1}(x)$$

Для вычисления функции $q(\rho)$ вдали от точек $\rho = 1$ и $\rho = a$ в соотношении (1.7) можно ограничиваться конечным числом членов. Ряд при этом сходится как геометрическая прогрессия.

Для изучения функции $q(\rho)$ вблизи указанных точек соотношение (1.7) суммируется в интеграл и преобразуется к формулам операционного исчисления

$$q(\rho) = A\,\{x_0 I_\eta(\varkappa\rho)\,I_\eta^{-1}(\varkappa a) - (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma [x(-t)\,I_{it}(\varkappa\rho)\,I_{it}^{-1}(\varkappa a) +$$

$$+ y(-t)\,K_{it}(\varkappa\rho)\,K_{it}^{-1}(\varkappa)]\,K_+'(t)\,K_+^{-1}(t)\,dt\}\,\rho^{-1} \tag{3.2}$$

Контур Γ лежит в нижней полуплоскости, огибая сверху нули и полюсы функции $K_+(z)$ и снизу — точки $t = \pm i\eta$.

Заменяя отношения бесселевых функций их асимптотическими значениями (1.9), получим в первом приближении выражение для $q(\rho)$ при $\rho \to 1$ и $\rho \to a$ соответственно в виде

$$q(\rho) \sim v\,(1-\rho^{-\beta})^{-1/2}\,(1 + O(\ln\rho))$$

$$q(\rho) \sim w\,[1-(a/\rho)^{-\beta}]^{-1/2}\,(1 + O(\ln a/\rho)) \tag{3.3}$$

$$v = \frac{1}{2\eta\sqrt{\pi C}}\left[\frac{V(\lambda)-\eta}{K_-(i\eta)} - \frac{\eta+V(\lambda)}{K_+(i\eta)}\right]$$

$$w = \frac{1}{2\eta\sqrt{\pi C}}\left[\frac{V(\varkappa)-\eta}{K_+(i\eta)} - \frac{V(\varkappa)+\eta}{K_-(i\eta)}\right]\frac{I_\eta(\varkappa)}{I_\eta(\lambda)}$$

В случае статической задачи решение $q(\rho)$ интегрального уравнения (1.1) зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2, которые находятся из условия ограниченности перемещений в точках $\rho = 1$ и $\rho = a$.

Метод данной работы обобщается на случай нескольких участков контакта. В этом случае на каждом из участков задания интегрального уравнения (1.2) его решение необходимо отыскивать в форме ряда (1.7) со своими на каждом участке коэффициентами x_k, y_k.

Поступила 8 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов С. М. Плоские задачи теории упругости для клина при заданных на границе напряжениях или смещениях. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 5.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
3. Тоноян В. С. Об одной плоской задаче для четвертьплоскости. Докл. АН АрмССР, 1966, т. 37, № 3.

4. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 2.
5. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости математической физики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
8. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. М. Изд-во иностр. лит., 1949.
9. Левин Б. Я. Распределение нулей целых функций М., Гостехиздат, 1956.
10. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 39.
11. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5. М.— Л., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

ВНЕШНЯЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. И. Фабрикант

(Ульяновск)

Получено в замкнутой форме точное решение основной осесимметричной смешанной задачи для трансверсально-изотропного полупространства, когда внутри круга заданы нормальное и касательное напряжения, а вне круга заданы нормальное и радиальное перемещения.

Смешанным задачам теории упругости для изотропного полупространства посвящено много работ [1–5]. Меньше внимания уделяется аналогичным задачам для трансверсально-изотропного полупространства [6, 7].

1. Рассмотрим трансверсально-изотропное упругое полупространство $z \geqslant 0$, плоскости изотропии которого параллельны границе. Пусть внутри круга радиуса a заданы нормальное напряжение $\sigma_0(\rho)$ и радиальное касательное напряжение $\tau_0(\rho)$; вне круга заданы нормальное перемещение $\varphi_1(\rho)$ и радиальное перемещение $\varphi_2(\rho)$. Поставим задачу определения напряжений $\sigma(\rho)$ и $\tau(\rho)$ при $\rho > a$. Методами, аналогичными примененным в работе [8], можно свести рассматриваемую задачу к системе двух интегральных уравнений относительно искомых напряжений

$$2H\left[-\pi\alpha\int_\rho^\infty \tau(x)\,dx + 2\int_\rho^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2-\rho^2}}\int_a^u \frac{\sigma(x)\,x\,dx}{\sqrt{u^2-x^2}}\right] = \psi_1(\rho) \qquad (1.1)$$

$$2H\left[2\gamma_1\gamma_2\rho\int_\rho^\infty \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-\rho^2}}\int_a^u \frac{\tau(x)\,x^2dx}{\sqrt{u^2-x^2}} - \frac{\pi\alpha}{\rho}\int_a^\rho \sigma(x)\,x\,dx\right] = \psi_2(\rho)$$

$$\psi_1(\rho) = \varphi_1(\rho) - 4H\int_0^a \frac{du}{\sqrt{\rho^2-u^2}}\int_u^a \frac{\sigma_0(x)\,x\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

$$\psi_2(\rho) = \varphi_2(\rho) - 4\gamma_1\gamma_2\frac{H}{\rho}\int_0^a \frac{u^2du}{\sqrt{\rho^2-u^2}}\int_u^a \frac{\tau_0(x)\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}} + 2\pi\frac{H\alpha}{\rho}\int_0^a \sigma_0(x)\,x\,dx$$