ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
2. Струнин Б. М. О распределении внутренних напряжений при случайном расположении дислокаций. Физика твердого тела, 1967, т. 9, вып. 3.
3. Струнин Б. М. Вероятностное описание поля внутренних напряжений в кристалле, содержащем случайно расположенные дислокации. Матер. Всес. совещ. по дефектам структуры в полупроводниках. I, Новосибирск, 1969.
4. Райс С. Сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Струнин Б. М. Вероятностное описание поля внутри напряжений при случайном расположении дислокаций. Физика твердого тела, 1971, т. 13, № 3.
6. Рид. В. Т. Дислокации в кристаллах. М., Металлургиздат, 1957.

УДК 533.6.011

ЗАМЕЧАНИЕ О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

А. А. Орел (Саратов)

Исследуется поведение функции $\nu(x)$, пропорциональной вариации функции тока на звуковой линии. Уточняются условия для определения параметров, не заданных при постановке вариационной задачи, полученные в работе [1]. Показано, что параметр, определяющий сдвиг границы варьированного течения относительно основного, несуществен.

Прямая задача плоскопараллельного трансзвукового течения газа была сведена к краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа [2, 3]. При этом предполагалось, что поток мало отличается от заданного.

В работе [1] была решена прямая задача о течении газа через плоскопараллельное симметричное сопло Лаваля со стенками, мало отличающимися от прямолинейных образующих некоторый угол, и задача об обтекании звуковым потоком газа клинообразного профиля под нулевым углом атаки. Соответствующие краевые задачи были сведены к сингулярному интегральному уравнению для функции $\nu(x)$

$$\nu(x) + \lambda \int_0^1 \nu(t) K(x, t)\, dt = g(x) \tag{1}$$

$$K(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{|2n+t|}\right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x}\right)$$

$$\lambda = \frac{\cos \pi\beta}{\pi(\sin \pi\beta - 1)}$$

Функция $g(x)$ выражается через краевые условия задачи. Она непрерывна в интервале $(0, 1]$ и может обращаться в бесконечность порядка -2β в точке $x = 0$. Следовательно, функция $f(x) = x^{-2\beta} g(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $[0, 1]$.

В работе [1] найдено приближенное решение $\nu_1(x)$ уравнения (1), учитывающее особенность функции $\nu(x)$ в точке $x = 0$

$$\nu_1(x) = \cos^2 \pi\mu\, x^{2\beta} [f(x) - \lambda I(x)], \qquad \mu = {}^1/_2({}^1/_2 + \beta) \tag{2}$$

$$I(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2\pi t}{\operatorname{tg} {}^1/_2\pi x}\right)^{2\mu} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(t-x) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}(t+x)\right] f(t)\, dt$$

Исследуем сингулярный интеграл $I(x)$. Для этого перейдем к новым переменным

$$y = \sin^2 {}^1/_2 \pi x, \qquad \tau = \sin^2 {}^1/_2 \pi t, \qquad f(x) = \varphi(y)$$

и сделаем замену переменной интегрирования

$$\xi = \frac{(1-\tau) y}{(1-y)\tau}, \qquad \tau = \frac{y}{y + (1-y)\xi}$$

Имеем

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)\xi^{-\mu} d\xi}{1-\xi} + (1-y)\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)\xi^{-\mu} d\xi}{y + (1-y)\xi}$$

Переходя в последнем интеграле к прежним переменным, получим

$$I(x) = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{y}{y+(1-y)\xi}\right)\frac{\xi^{-\mu} d\xi}{1-\xi} + \pi\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x\right)^{2\mu}\int_0^1 \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)^{\beta-1/2} f(t)\,dt \tag{3}$$

Так как $-1/2 < \beta < 0$, $0 < \mu < 1/4$, то оба интеграла в (3) существуют, причем первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Функция $I(x)$ непрерывна в интервале $(0, 1]$. Вблизи точки $x = 0$ имеет место разложение

$$I(x) = A + O(x) + x^{-2\mu}[2^{2\mu}\pi^{1-2\mu}B + O(x)] \tag{4}$$

$$A = f(0)\int_0^\infty \frac{\xi^{-\mu} d\xi}{1-\xi}, \qquad B = \int_0^1 \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)^{\beta-1/2} f(t)\,dt$$

Вычислив сингулярный интеграл (см. [4], формула 3.222.2) и подставляя разложение (4) в формулу (2), получим

$$\nu_1(x) = \cos^2\pi\mu\,\{x^{2\beta}[f(0) - f(0) + O(x)] - \lambda x^{\beta-1/2}[2^{2\mu}\pi^{1-2\mu}B + O(x)],$$

$$\frac{1}{\lambda} = \pi\operatorname{ctg}[\pi(1-\mu)]$$

Следовательно, при $x \to 0$ функция $\nu_1(x)$ обращается в бесконечность порядка $1/2 - \beta$. Условием, необходимым и достаточным для ограниченности $\nu_1(x)$, будет (см. [1], формула (5.21))

$$B = \int_0^1 \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t\right)^{\beta-1/2} t^{-2\beta} g(t)\,dt = 0 \tag{5}$$

При этом требовать ограниченности функции $g(x)$, т. е. $f(0) = 0$ (см. [1], формула (5.20)), не нужно.

Условие (5) служит для определения вариации расхода газа в прямой задаче сопла Лаваля или коэффициента при особом решении в задаче о трансзвуковом обтекании клинообразного профиля.

Соотношение $f(0) = 0$ в работе [1] использовалось для определения сдвига границы варьированного течения относительно основного. Поскольку это условие не обязательно, то сдвиг следует определять из соображения минимальности расстояний между границами.

Автор благодарит С. В. Фальковича за руководство и постоянное внимание к работе.

Поступила 2 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Орел А. А. Задачи в вариациях для плоских околозвуковых течений газа. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. В сб. Теоретические работы по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
3. Франкль Ф. И. О прямой задаче теории сопла Лаваля. Уч. зап. Кабард.-Балкарск. ун-та, 1959, вып. 3.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

К ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КЛИНА

В. А. Бабешко, В. Н. Беркович

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются две смешанные задачи для клина, ребро которого неограниченно в обе стороны. Изучается интегральное уравнение, порожденное этими задачами, и предлагается прием их решения, отличный от известных подходов, эффективный при малых углах раствора α клина.

Случай, когда поле смещений и напряжений не зависит от координаты вдоль ребра клина, соответствует плоской граничной задаче.

Детальное исследование основных и смешанных задач для клина содержится в работах [1–4] и др. В случае пространственного клина Я. С. Уфляндом [2] решена статическая задача теории упругости второго рода, а в одной из работ А. Ф. Улитко [1] задача первого рода сведена к однозначно обратимому уравнению Фредгольма второго рода.

1. На основании решения Я. С. Уфлянда [2] исследуется антисимметричная по α статическая смешанная задача с двумя линиями раздела граничных условий, параллельными оси z, направленной вдоль ребра клина, и удаленными от нее на расстояние c и d соответственно. В области между указанными линиями на обеих гранях клина предполагается заданным нормальное давление, зависящее от z, и перемещения, параллельные граням. Вне указанной области грани клина жестко закреплены.

Вторая смешанная задача формулируется для антиплоской деформации клина. Предполагается, что одна из граней клина жестко закреплена, вторая же в отмеченной ранее области загружена штампом, подошва которого совершает гармонические колебания в направлении оси z, не зависящие от этой координаты. Единственной неизвестной под штампом является касательное напряжение, параллельное оси z. Клин предполагается вязкоупругим с постоянным во времени модулем Юнга и зависящим от разности аргументов ядром ползучести $\theta(t - \tau)$. В частности, при отсутствии ползучести получается упругий клин.

Описанные задачи приводятся с использованием преобразования Конторовича — Лебедева [2] к решению интегрального уравнения вида

$$\int_1^a k(r, \rho)\, q(\rho)\, d\rho = Af(r) \qquad (1 \leqslant r \leqslant a) \tag{1.1}$$

$$k(r, \rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} I_{-iu}(\varkappa r)\, K_{-iu}(\varkappa\rho)\, K(u)\, u\, du \tag{1.2}$$

---

[1] См. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Автореф. докт. дисс., Киев, 1971.