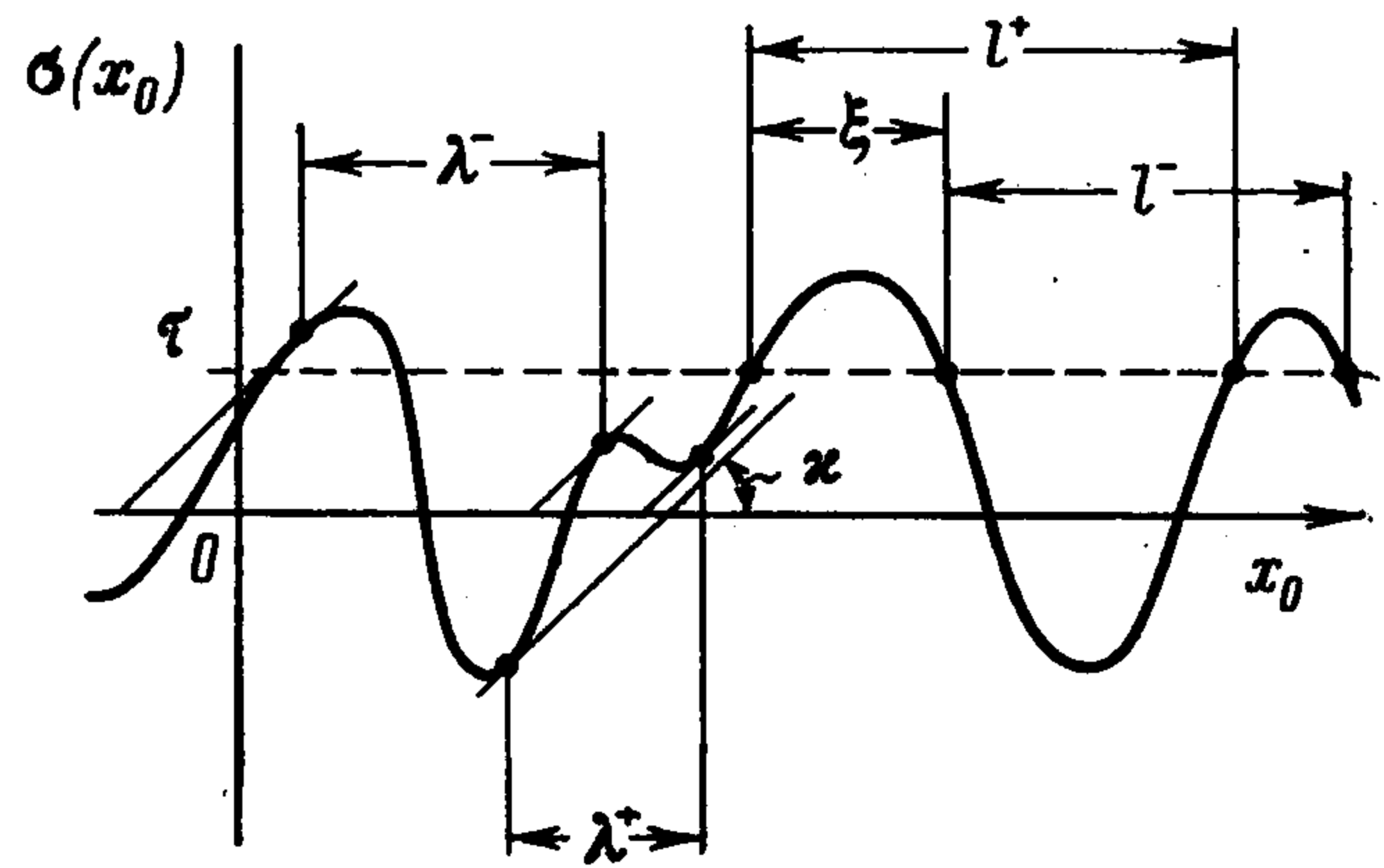


**ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЯ, ПОРОЖДЕННОГО СЛУЧАЙНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ**

А. А. Алексеев, Б. М. Струнин

(Москва)

Рассматриваются статистические характеристики траекторий (скалярного, векторного, тензорного) случайного поля  $\sigma$ , порожденного независимо расположенными источниками. Для траектории компоненты  $\sigma$  такого поля вдоль произвольной прямой  $x_0$  получены формулы, определяющие средние значения следующих характеристик (фиг. 1):  $l^+ = l^+(\tau)$  и  $l^- = l^-(\tau)$  — расстояния между соседними выходами и входами за уровень  $\tau$ ;  $\xi = \xi(\tau)$  — протяженность выброса за уровень  $\tau$ ;  $\lambda^+ = \lambda^+(x)$  и  $\lambda^- = \lambda^-(x)$  — расстояния между соседними точками на траектории с одинаковой первой производной  $x$  при положительной и отрицательной кривизне соответственно. В отличие от общей математической теории траекторий стационарных случайных процессов эти формулы позволяют практически находить характеристики траекторий для широкого класса физических полей.



Фиг. 1

Для случайного стационарного процесса (скалярного поля на прямой) с дифференцируемой траекторией среднее число выходов  $\mu^+(\tau)$  за уровень  $\tau$  на единице длины можно определить через двумерную плотность распределения  $\varphi(y, z, l)$  компоненты поля в двух точках на линии наблюдения  $x_0$ , отстоящих друг от друга на  $l$ , следующим образом, аналогично [1]:

$$\mu^+(\tau) = [\langle l^+(\tau) \rangle]^{-1} = \lim_{l \rightarrow +0} \frac{P^+(l)}{l} \tag{1}$$

$$P^+(l) = \int_{-\infty}^{\tau} dy \int_{\tau}^{\infty} dz \varphi(y, z, l)$$

Среднее число входов  $\mu^-(\tau)$  за уровень  $\tau$  определится аналогично. Полное число пересечений уровня  $\tau$  на единице длины  $\mu(\tau) = \mu^+(\tau) + \mu^-(\tau)$ .

Для большинства реальных полей двумерное распределение  $\varphi(y, z, l)$  неизвестно. Если поле  $\sigma$  порождено случайно и независимо расположенными источниками, причем действие источника, расположенного в точке  $x$ , на точку  $x_0$  определяется функцией  $S(x_0, x)$ , то характеристическая функция  $\Psi(u_1, u_2, l)$  распределения  $\varphi(y, z, l)$  определится выражением, аналогичным [2-4]

$$\ln \Psi(u_1, u_2, l) = -\rho \int \{1 - \exp[iu_1 S(0, x) + iu_2 S(l, x)]\} dx \tag{2}$$

где  $\rho$  — средняя плотность источников,  $0$  и  $l$  — точки на линии наблюдения (вдоль которой направляем ось  $x_1$ ); интегрирование проводится по пространству  $x$ . Размерность  $x$  зависит от типа источников. Записывая  $\varphi(y, z, l)$  через характеристическую функцию (2) и выполняя предельный переход (1), получим после интегрирования

$$\mu^+(\tau) = \frac{1}{2} \rho \int S_1(0, x) \varphi[\tau - S(0, x)] dx \tag{3}$$

$$S_1(x_0, x) = \partial S(x_0, x) / \partial x_0$$

где  $\varphi(y)$  — плотность распределения вероятностей  $\sigma$  в произвольной точке; интегрирование проводится по области  $x$ , для которых  $S_1(0, x) > 0$ . Среднее число входов

$\mu^-(\tau) = \mu^+(\tau)$ . Формула (3) в отличие от формул, приведенных в [1, 4], определяет среднее число пересечений через одномерное распределение значений и действие источника.

Применение формулы (3) к траектории производной  $\sigma_1(x_0) = \partial\sigma(x_0)/\partial x_0$  приводит к выражению

$$[\langle\lambda^+(x)\rangle]^{-1} = [\langle\lambda^-(x)\rangle]^{-1} = \frac{1}{2} \rho \int S_2(0, x) \varphi_1 [x - S_1(0, x)] dx \quad (4)$$

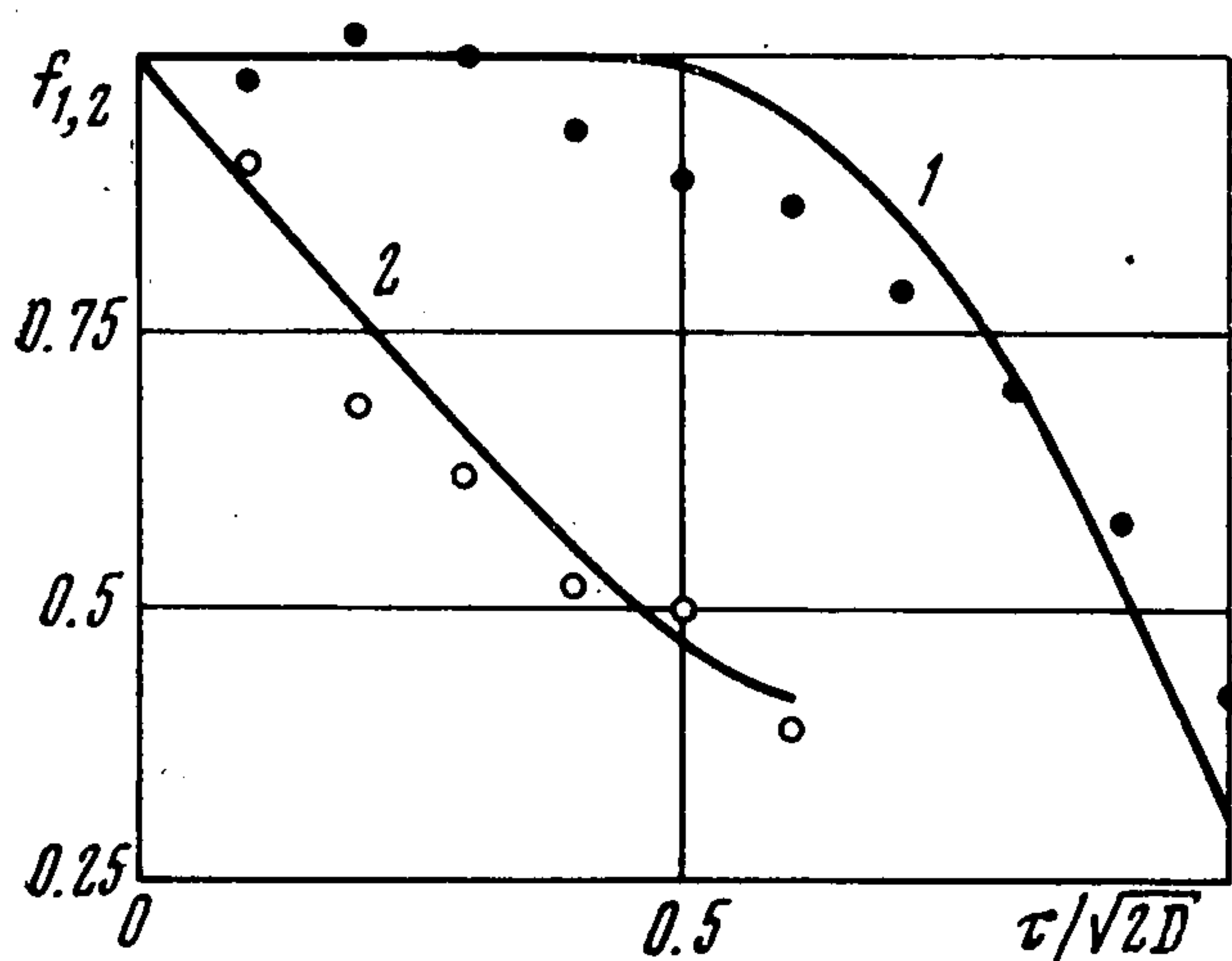
$$S_2(x_0, x) = \partial S_1(x_0, x)/\partial x_0$$

где  $\varphi_1(t)$  — плотность распределения вероятностей  $\sigma_1$  в произвольной точке; интегрирование проводится по области  $x$ , для которых  $S_2(0, x) > 0$ .

Для эргодических случайных полей отношение суммарной длины участков траектории, на которых  $\sigma \geq \tau$ ,  $\sum \xi(\tau)$ , к общей длине  $L$  связано [1] с одномерной функцией распределения выражением

$$1 - \int_{-\infty}^{\tau} \varphi(y) dy = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \sum \xi_i(\tau) = \mu^+(\tau) \langle \xi(\tau) \rangle \quad (5)$$

Соотношения (5) и (3) определяют  $\langle \xi(\tau) \rangle$ .



Фиг. 2

В качестве примера практического применения формул (3) — (5) найдем характеристики траекторий компонент  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{23}$  поля внутренних напряжений  $\sigma$ , порожденного параллельными, независимым образом расположенными дислокациями. Распределения  $\varphi(y)$  и  $\varphi_1(t)$  для этого поля найдены в [3, 5]. Ось  $x_3$  направлена вдоль линии дислокаций,  $S = S(x_0, x_1, x_2)$  [6], где  $x_0$  отсчитывается вдоль линии наблюдения,  $\rho$  — средняя плотность дислокаций в плоскости  $(x_1, x_2)$ . При нахождении среднего числа пересечений для этого случая интеграл (3) удается вычислить лишь приближенно. На фиг. 2 для компоненты  $\sigma_{23}$  поля, порожденного случайно расположенными винтовыми дислокациями, показаны зависимости

$$1 - \mu^+ \left( \frac{\tau}{\sqrt{2D}} \right) [\mu^+(0)]^{-1} = f_1 \left( \frac{\tau}{\sqrt{2D}} \right), \quad \mu^+(0) = 0.29 \rho^{1/2}$$

$$2 - \left\langle \xi \left( \frac{\tau}{\sqrt{2D}} \right) \right\rangle [\langle \xi(0) \rangle]^{-1} = f_2 \left( \frac{\tau}{\sqrt{2D}} \right), \quad \langle \xi(0) \rangle = 1.7 \rho^{-1/2}$$

где  $D = \langle [\sigma_{23}]^2 \rangle$ .

Для проверки правильности этих вычислений было проведено моделирование поля  $\sigma$  от 1000 винтовых дислокаций, параллельных оси  $x_3$ , размещенных на площадке  $1 \times 1$  в плоскости  $x_1 x_2$ . На фиг. 2 приведено сопоставление вычисленных по формулам (3) и (5) зависимостей  $f_1(\tau/\sqrt{2D})$  и  $f_2(\tau/\sqrt{2D})$  с данными моделирования, которые нанесены соответственно светлыми и черными точками. Из данных моделирования найдено  $\mu^+(0) = 0.28 \rho^{1/2}$ ,  $\langle \xi(0) \rangle = 1.9 \rho^{-1/2}$ .

Для  $\langle \lambda^+(x) \rangle$  получены выражения

$$[\langle \lambda^+(x) \rangle]^{-1} = \frac{\alpha \rho \sqrt{A}}{(c^2 + x^2)^{1/2}} \{ [(c^2 + x^2)^{1/2} + x]^{1/2} + [(c^2 + x^2)^{1/2} - x]^{1/2} \} \quad (6)$$

где  $A = Gb/(2\pi k)$ ,  $G$  — модуль упругости при сдвиге,  $b$  — вектор Бюргера дислокации; для винтовых дислокаций (компонента  $\sigma_{23}$ )  $k = 1$ ,  $\alpha = 0.6$ ; для краевых дислокаций (компонента  $\sigma_{12}$ )  $k = 1 - \nu$ ,  $\alpha = 1.05$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $c = \pi A \rho$ .

Авторы благодарят В. П. Носко за обсуждение работы.

Поступила 20 XII 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
2. Струнин Б. М. О распределении внутренних напряжений при случайном расположении дислокаций. Физика твердого тела, 1967, т. 9, вып. 3.
3. Струнин Б. М. Вероятностное описание поля внутренних напряжений в кристалле, содержащем случайно расположенные дислокации. Матер. Всес. совещ. по дефектам структуры в полупроводниках. I, Новосибирск, 1969.
4. Райс С. Сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Струнин Б. М. Вероятностное описание поля внутри напряжений при случайном расположении дислокаций. Физика твердого тела, 1971, т. 13, № 3.
6. Рид В. Т. Дислокации в кристаллах. М., Металлургиздат, 1957.

УДК 533.6.011

ЗАМЕЧАНИЕ О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

А. А. Орел (Саратов)

Исследуется поведение функции  $v(x)$ , пропорциональной вариации функции тока на звуковой линии. Уточняются условия для определения параметров, не заданных при постановке вариационной задачи, полученные в работе [1]. Показано, что параметр, определяющий сдвиг границы варьированного течения относительно основного, не существует.

Прямая задача плоскопараллельного трансзвукового течения газа была сведена к краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка смешанного типа [2, 3]. При этом предполагалось, что поток мало отличается от заданного.

В работе [1] была решена прямая задача о течении газа через плоскопараллельное симметричное сопло Лаваля со стенками, мало отличающимися от прямолинейных образующих некоторый угол, и задача об обтекании звуковым потоком газа клинообразного профиля под нулевым углом атаки. Соответствующие краевые задачи были сведены к сингулярному интегральному уравнению для функции  $v(x)$

$$v(x) + \lambda \int_0^1 v(t) K(x, t) dt = g(x) \quad (1)$$

$$K(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{x}{|2n+t|} \right)^{2\beta} \left( \frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x} \right)$$

$$\lambda = \frac{\cos \pi\beta}{\pi (\sin \pi\beta - 1)}$$

Функция  $g(x)$  выражается через краевые условия задачи. Она непрерывна в интервале  $(0, 1]$  и может обращаться в бесконечность порядка  $-2\beta$  в точке  $x = 0$ . Следовательно, функция  $f(x) = x^{-2\beta} g(x)$  непрерывна и ограничена в интервале  $[0, 1]$ .

В работе [1] найдено приближенное решение  $v_1(x)$  уравнения (1), учитывающее особенность функции  $v(x)$  в точке  $x = 0$

$$v_1(x) = \cos^2 \pi\mu x^{2\beta} [f(x) - \lambda I(x)], \quad \mu = 1/2 (1/2 + \beta) \quad (2)$$

$$I(x) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left( \frac{\operatorname{tg} 1/2\pi t}{\operatorname{tg} 1/2\pi x} \right)^{2\mu} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (t-x) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} (t+x) \right] f(t) dt$$