

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА, БЛИЗКОГО К ИДЕАЛЬНОМУ, ПРИ СИЛЬНОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

С. И. Анисимов, О. М. Спирер

(Москва)

Рассматривается задача о точечном взрыве в слабонеидеальном газе. В качестве уравнения состояния взято вириальное разложение по степеням параметра $b\rho_0$ — произведения плотности газа на «собственный объем» молекул. Рассмотрен переход к задаче для идеального газа. Показано, что при сколь угодно малом $b\rho_0$ вблизи центра взрыва при адиабатическом движении имеется область размером $r \sim r_0 \sqrt{b\rho_0}$, в которой профиль безразмерной скорости отличается от профиля для идеального газа (в частности $V(\lambda)$ оказывается немонотонной функцией координаты). Далее показано, что в теплопроводном газе в отличие от адиабатического движения существует равномерный переход к случаю идеального газа.

1. Характер движения вещества при сильном взрыве существенно зависит от его уравнения состояния. В случае сильного точечного взрыва для широкого класса уравнений состояния движение оказывается автомодельным. Первоначально такое движение было исследовано в случае идеального газа; в дальнейшем были даны примеры решений задачи о взрыве для некоторых конкретных термодинамически неидеальных сред [1-3]. Следует отметить, однако, что при изучении взрыва в средах, отличных от идеального газа, рассматривались, как правило, эмпирические уравнения состояния, удовлетворительно описывающие поведение среды лишь в некотором ограниченном интервале плотностей. В частности, почти все эти эмпирические уравнения оказываются некорректными в области малой плотности и либо вовсе не дают в предельном случае $\rho \rightarrow 0$ уравнения состояния идеального газа, либо дают неправильный первый член так называемого вириального разложения давления по степеням плотности.

Как известно из статистической физики, при малых плотностях уравнение состояния можно записать в виде [4]

$$p = \rho R T [1 + \rho B(T) + \rho^2 C(T) + \dots] \quad (1.1)$$

где $B(T)$ и $C(T)$ называются вириальными коэффициентами и могут быть вычислены, если известен потенциал взаимодействия между молекулами. В пределе высоких температур, значительно превышающих критическую температуру вещества, который далее и будет рассматриваться, коэффициенты $B(T)$ и $C(T)$ стремятся к постоянным b и $5/8b^2$ соответственно. Величина $(mb)^{1/3}$ порядка радиуса действия межмолекулярных сил отталкивания, поэтому для газов $b\rho \ll 1$. Легко проверить, что рассмотренные в [2] уравнения состояния не дают в пределе $\rho \rightarrow 0$ разложения вида (1.1). В связи с этим остается нерешенным вопрос о распределении гидродинамических переменных в области низкой плотности в возмущенном сильным взрывом веществе.

Ниже рассматривается сильный точечный взрыв в неидеальном газе с начальной плотностью ρ_0 , удовлетворяющей неравенству $b\rho_0 \ll 1$. Вначале движение возмущенного вещества будет предполагаться адиабатическим. Будет показано, что в такой задаче не существует равномерного предельного перехода к случаю идеального газа ($b \equiv 0$). Именно в центре взрыва (где уравнение состояния среды, очевидно, ближе всего к уравнению состояния идеального газа) существует при сколь угодно малых $b\rho_0$ область размером $r \sim r_2 \sqrt{b\rho_0}$ (r_2 — радиус фронта ударной волны), в которой распределение скоростей оказывается иным, чем в модели идеального газа.

Изменение профиля скорости вблизи центра взрыва в слабонеидеальном газе не является, конечно, наблюдаемым физическим эффектом. Следует иметь в виду также, что для неадиабатических движений предельный переход при $b\rho_0 \rightarrow 0$ может носить иной характер.

Ниже показано, что при учете переноса тепла теплопроводностью в рассматриваемой задаче имеется равномерный переход к решению для идеального газа. Кроме того, легко показать, что при замене условия адиабатичности движения условием изотермичности, $\partial T/\partial r = 0$, перестройки профиля скорости при предельном переходе от слабонеидеального к идеальному газу также не происходит. Рассмотренные ниже примеры указывают лишь на чувствительность автомодельного решения задачи о сильном взрыве к сколь угодно малым изменениям уравнения состояния и связанную с этим необходимость тщательного выбора термодинамической модели среды.

2. Рассмотрим адиабатическое движение газа. Отмеченные выше особенности возникают уже при учете первого слагаемого в скобках в выражении (1.1), поэтому достаточно рассмотреть уравнение состояния вида

$$p = \rho R T (1 + b\rho) \quad (2.1)$$

Теплоемкость газа предполагается постоянной. После введения автомодельных переменных

$$\lambda = r \left(\frac{\rho_0}{Et^2} \right)^{1/5}, \quad g(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$V(\lambda) = \frac{vt}{r}, \quad \Pi(\lambda) = \frac{pt^2}{\rho_0 r^2}$$

где E — энергия взрыва, задача о движении среды, как известно [1-3], может быть сведена к двум алгебраическим соотношениям (интегралам энергии и адиабатичности [1]) и одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Полная система уравнений такова:

$$\Pi [2/5 - (\gamma + \alpha g) V] + 1/2 g V^2 (2/5 - V) (\gamma - 1 + \alpha g) = 0 \quad (2.2)$$

$$(\lambda/\lambda_2)^5 \Pi (2/5 - V) = k (\gamma - 1 + \alpha g) g^{\gamma-1} \exp(\alpha g) \quad (2.3)$$

$$\frac{dV}{dg} = \frac{(2/5 - V) \{ [V(\gamma + \alpha g) - 2/5] [2 - V(3\gamma - 1 + 3\alpha g)] - 3\alpha g V^2 \}}{g \{ 4(V + 1/5) [V(\gamma + \alpha g) - 2/5] + 6/5(2/5 - V) \}} \quad (2.4)$$

$$\alpha = b\rho_0 (\gamma - 1), \quad k = \frac{16 \exp(\alpha g_2)}{g_2^{\gamma-1} (\gamma - 1 + \alpha g_2)}$$

где γ — отношение теплоемкостей при $p = 0$, индексом 2 отмечены величины непосредственно за фронтом ударной волны. Учитывая малость параметра α , граничные условия на ударной волне можно записать в виде

$$g_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{2\alpha}{\gamma - 1} \right), \quad V_2 = \frac{4(1 + \alpha/(\gamma - 1))}{5(\gamma + 1)}, \quad \Pi_2 = \frac{2}{5} V_2 \quad (2.5)$$

Постоянная λ_2 должна быть определена из условия равенства полной энергии среды и энергии взрыва E . Отношение теплоемкостей γ , которое в данном случае не следует смешивать с показателем адиабаты, заключено в пределах $1 < \gamma \leq 5/3$.

Поле интегральных кривых уравнения (2.4) изображено на фигуре. Показана лишь та часть фазовой плоскости переменных gV , которая соответствует физически реализуемым состояниям среды; стрелки на траекториях показывают направление уменьшения переменной λ . Удобно исключить из уравнения (2.4) параметр α , сделав подстановку $g_* = \alpha g$ (параметр α остается, конечно, в интегралах (2.1), (2.2) и граничных условиях (2.5)). Особая точка $A(0, 2/5)$ — седло с асимптотами $g_* = 0$ и $V = 2/5$. Особая точка $B(0, 2/5 \gamma^{-1})$ является узлом и соответствует центру симметрии $\lambda = 0$. Характеристические направления в точке B задаются прямыми $g_* = 0$ и $V = 2/5 \gamma^{-1} (1 - g_* \gamma^{-1})$. Записанное вблизи особой точки B дифференциальное уравнение (2.4) отличается от соответствующего уравнения для идеального газа дополнительным слагаемым $-3V^2 g_*$ в числителе правой части. Прибавление такого слагаемого приводит, как известно [5], к повороту всего поля интегральных кривых в окрестности особой точки на некоторый угол (в рассматриваемом случае угол поворота равен $-\arctg \gamma^{-1}$). В результате пово-

рота безразмерная скорость $V(\lambda)$ приближается к своему асимптотическому значению $2/5 \gamma^{-1}$ в центре симметрии снизу, т. е. профиль безразмерной скорости становится немонотонным (в случае идеального газа профиль был монотонным, а значение $2/5 \gamma^{-1}$ — минимальным).

Переход от фазовой плоскости $g_* V$ к физическому пространству достигается при помощи интегралов (2.1), (2.2). Для скорости $V(\lambda)$ вблизи центра симметрии получается асимптотическая формула

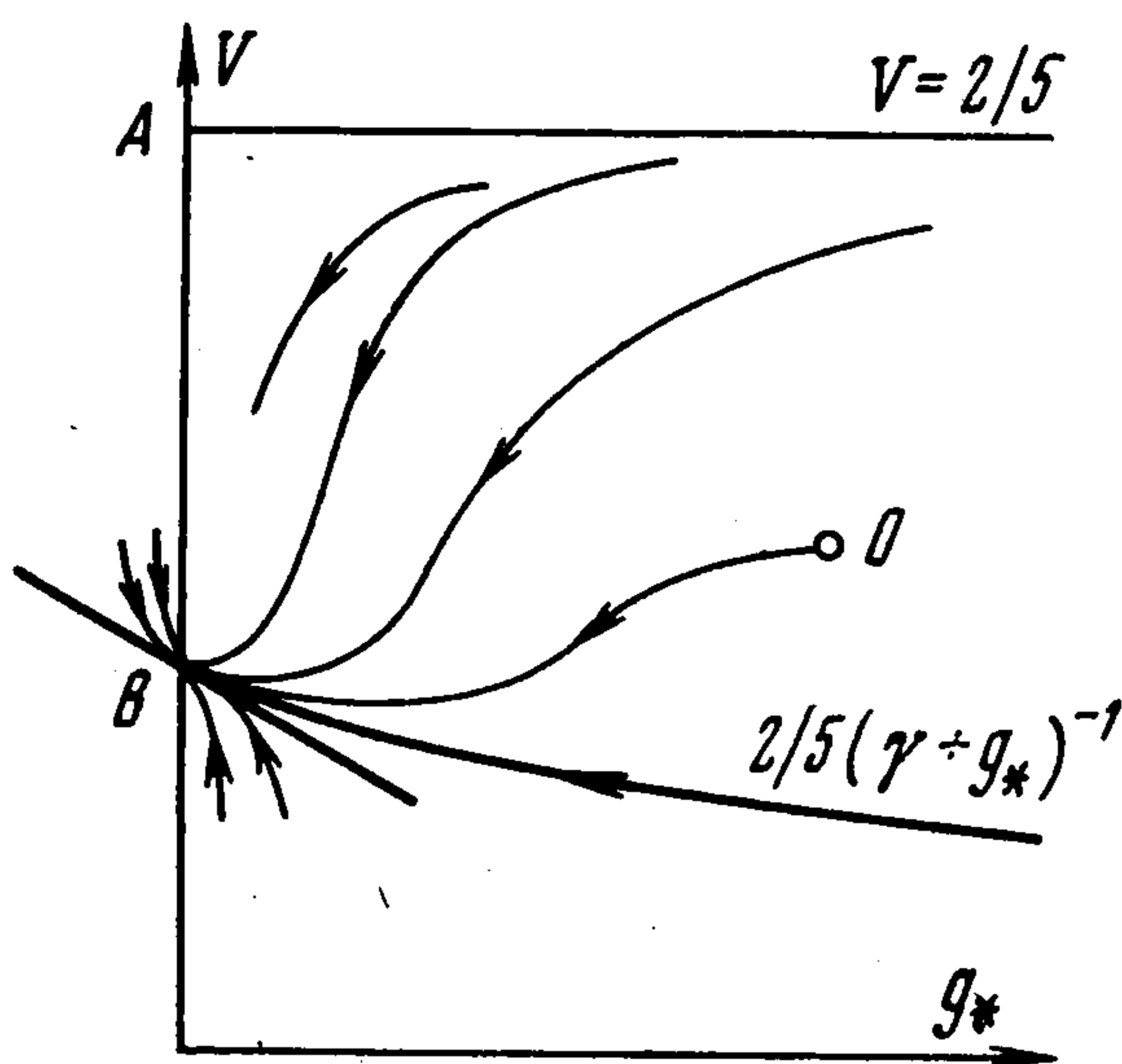
$$V(\lambda) \sim 2/5 \gamma^{-1} - a \lambda^{3(\gamma-1)} \quad (2.6)$$

где $a > 0$ — постоянная (в случае идеального газа было [1]: $V(\lambda) \sim 2/5 \gamma^{-1} + c \cdot \lambda^{(2\gamma+1)/(\gamma-1)}$, $c > 0$). Учитывая следующий член в разложении (2.6), можно показать, что функция $V(\lambda)$ достигает минимума при значении

$$\lambda = \left[\frac{3a}{(2\gamma+1)c} \right]^{1/2}$$

причем значение $V(\lambda)$ в точке минимума отличается от предельного $2/5 \gamma^{-1}$ на величину порядка $\alpha^{(2\gamma+1)/2(\gamma-1)}$.

При стремлении к нулю параметра неидеальности α асимптотика скорости вблизи центра не переходит в асимптотику для идеального газа. Однако интервал значений переменной λ , в котором поведение $V(\lambda)$ «неидеально», при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к нулю как $\sqrt{\alpha}$. Асимптотические формулы для безразмерных плотности и давления вблизи центра взрыва в отличие от скорости переходят при $\alpha \rightarrow 0$ в соответствующие формулы для идеального газа.



3. Рассмотрим автомоделный сильный взрыв в теплопроводном неидеальном газе с уравнением состояния (1.1).

Введем автомоделные переменные

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \quad V(\lambda) = \frac{\gamma+1}{2D} v(r, t)$$

$$g(\lambda) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p(r, t)}{\rho_0}, \quad \theta(\lambda) = \frac{R(\gamma+1)^2}{2D^2(\gamma-1)} T(r, t)$$

$$r_2 = \left(\frac{\sigma E t^2}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad D = \frac{2}{5} \frac{r_2}{t}$$

где σ — безразмерная постоянная, определяемая из условия равенства энергии взрыва и полной энергии возмущенной среды.

Требование автомоделности движения налагает ограничение на зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Согласно [1], следует положить $\kappa = \kappa_1 T^{1/2}$, где $\kappa_1 > 0$ — постоянная.

Учитывая, что в рассматриваемой задаче существует интеграл энергии [2], можно записать следующую из уравнений газодинамики систему обыкновенных дифференциальных уравнений в виде (штрих означает дифференцирование по λ)

$$V'g [2V - \lambda(\gamma+1)] + g'\theta(\gamma-1 + 2\alpha g) + \theta'g(\gamma-1 + \alpha g) = 3/2(\gamma+1) Vg$$

$$V'g + g' \left(V - \frac{\gamma+1}{2} \lambda \right) + 2 \frac{Vg}{\lambda} = 0 \quad (3.1)$$

$$B\theta^{1/2}\theta' = \frac{12}{\gamma+1} (\gamma-1 + \alpha g) Vg\theta - 6 \left(\lambda - \frac{2V}{\gamma+1} \right) (\theta + V^2) g$$

$$B = \frac{6\kappa_1 2^{1/2} (\gamma-1)^{1/2} (\gamma+1)^{-1/2}}{(\sigma E)^{1/2} R^{1/2} (0.4\rho_0)^{1/2}}, \quad \alpha = b\rho_0(\gamma+1)$$

Систему уравнений (3.1) следует решать при граничных условиях

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} V_2\right) g_2 = 1, \quad \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} V_2\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \theta_2 \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma-1} g_2\right)$$

$$B\theta_2^{1/2}\theta_2' = \frac{12}{\gamma+1} (\gamma + \alpha g_2 - 1) V_2 g_2 \theta_2 - 6 \left(1 - \frac{2}{\gamma+1} V_2\right) (\theta_2 + V_2^2) g_2$$

и условию симметрии $V(0) = 0$.

В соответствии с результатом п. 2. наибольший интерес представляет движение газа вблизи центра симметрии, т. е. в области, где в случае адиабатического движения возникает в асимптотической формуле слагаемое, нарушающее равномерный переход к формулам для идеального газа. Вычисляя из уравнений (3.1) асимптотику газодинамических переменных при $\lambda \rightarrow 0$, получим следующие формулы для безразмерных скорости, плотности и температуры:

$$V = \frac{(\gamma+1)^2 (\gamma-1 + \alpha g_0) g_0}{5B\theta_0^{1/2} (\gamma-1 + 2\alpha g_0)} \lambda^3$$

$$g = g_0 \left[1 + \frac{3(\gamma-1 + \alpha g_0)}{B\theta_0^{1/2} (\gamma-1 + 2\alpha g_0)} \lambda^2 \right] \quad (3.2)$$

$$\theta = \theta_0 \left[1 - \frac{3g_0}{B\theta_0^{1/2}} \lambda^2 \right]$$

Здесь g_0 и θ_0 — величины безразмерных плотности и температуры в центре симметрии (при $\gamma = 1.4$ и $B = 1.48$, согласно [2], $g_0 = 0.052$, $\theta_0 = 2.04$).

Из формул (3.2) видно, что при стремлении к нулю параметра α предельные выражения для слабонеидеального газа равномерно переходят в соответствующие выражения для газа идеального. Таким образом, учет теплопроводности среды позволяет, кроме конечного значения температуры в центре взрыва, получить правильный предельный переход от неидеального газа к идеальному. Поправки к решению задачи о взрыве в идеальном теплопроводном газе, обусловленные неидеальностью среды, нетрудно вычислить из системы уравнений (3.1).

Поступила 23 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
2. Коробейников В. П., Мельникова Н. Ф., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
3. Анисимов С. И., Кузнецов Н. М. Автомодельный сильный взрыв в воде. ПМТФ, 1961, № 6.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
5. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.