

**О ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ И ОСТРОУГОЛЬНЫХ КРОМКАХ
НА ВОЛНОВЫХ ФРОНТАХ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ
ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА**

И. О. Осипов

(Петрозаводск)

В дополнение к результатам работ [1-3] изучаются волновые поля квазипродольных и квазипоперечных упругих колебаний от точечного источника типа мгновенного импульса в анизотропной среде с четырьмя упругими постоянными. Рассматриваются случаи, когда волновые фронты представляют собой выпуклые замкнутые кривые и когда внутренний фронт состоит из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки.

Решение, характеризующее упругие колебания квазипродольного и квазипоперечного типа SV в безграничной анизотропной среде от точечного источника типа мгновенного импульса, помещенного в начале координат, имеет вид [1]

$$u = \sum_{k=1}^2 R \left\{ c \int_0^{\theta_k} \zeta \lambda_k w_k(\zeta) d\zeta \right\} \quad (1)$$

$$v = \sum_{k=1}^2 R \left\{ \int_0^{\theta_k} (a\zeta^2 + d\lambda_k^2 - 1) w_k(\zeta) d\zeta \right\}$$

Комплексные переменные θ_k и величины λ_k определяются соотношениями

$$1 - \theta_k \xi + \lambda_k \eta = 0 \quad (\xi = x/t, \eta = y/t) \quad (2)$$

$$\lambda_k = \left(\frac{[(b+d) - L\theta_k^2] + (-1)^k \sqrt{Q(\theta_k)}}{2bd} \right)^{1/2} \quad (k=1, 2) \quad (3)$$

$$Q(\theta_k) = [(b+d) - L\theta_k^2]^2 - 4bd(1 - a\theta_k^2)(1 - d\theta_k^2)$$

$$L = ab + d^2 - c^2$$

Функции λ_k — ветви алгебраической функции λ , однозначной на римановой поверхности [2]. Функции w_k — ветви произвольной аналитической функции w , однозначной на двулистной римановой поверхности. Функцию w необходимо выбирать так [2, 3], чтобы вещественные части w_k обращались в нуль на берегах разрезов плоскостей римановой поверхности, где функции λ_k принимают вещественные значения. Берегам этих разрезов отвечают на плоскости $\xi \eta$ фронты волн, которые выражаются как огибающие прямых (2) при вещественных значениях θ_k и λ_k

$$\xi_k = -\lambda_k' / (\lambda_k - \theta_k \lambda_k'), \quad \eta_k = -1 / (\lambda_k - \theta_k \lambda_k') \quad (4)$$

Для реальных сред рассматриваемого класса анизотропии отношения упругих постоянных к плотности

$$a = C_{11} / \rho, \quad b = C_{22} / \rho, \quad d = C_{66} / \rho, \quad c = (C_{66} + C_{12}) / \rho \quad (5)$$

удовлетворяют условиям

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad K_1 = ab - (c - d) > 0 \quad (6)$$

Ниже ограничимся рассмотрением случаев, когда величины (5) удовлетворяют дополнительному условию

$$K_2 = ab - (c + d) < 0 \quad (7)$$

При условии (7) две точки разветвления для внутреннего радикала в (3) вещественные и две мнимые [2]

$$\theta_i^\circ = \pm \left(\frac{M \pm \sqrt{-4bdc^2N_1}}{K_1K_2} \right)^{1/2} \quad (8)$$

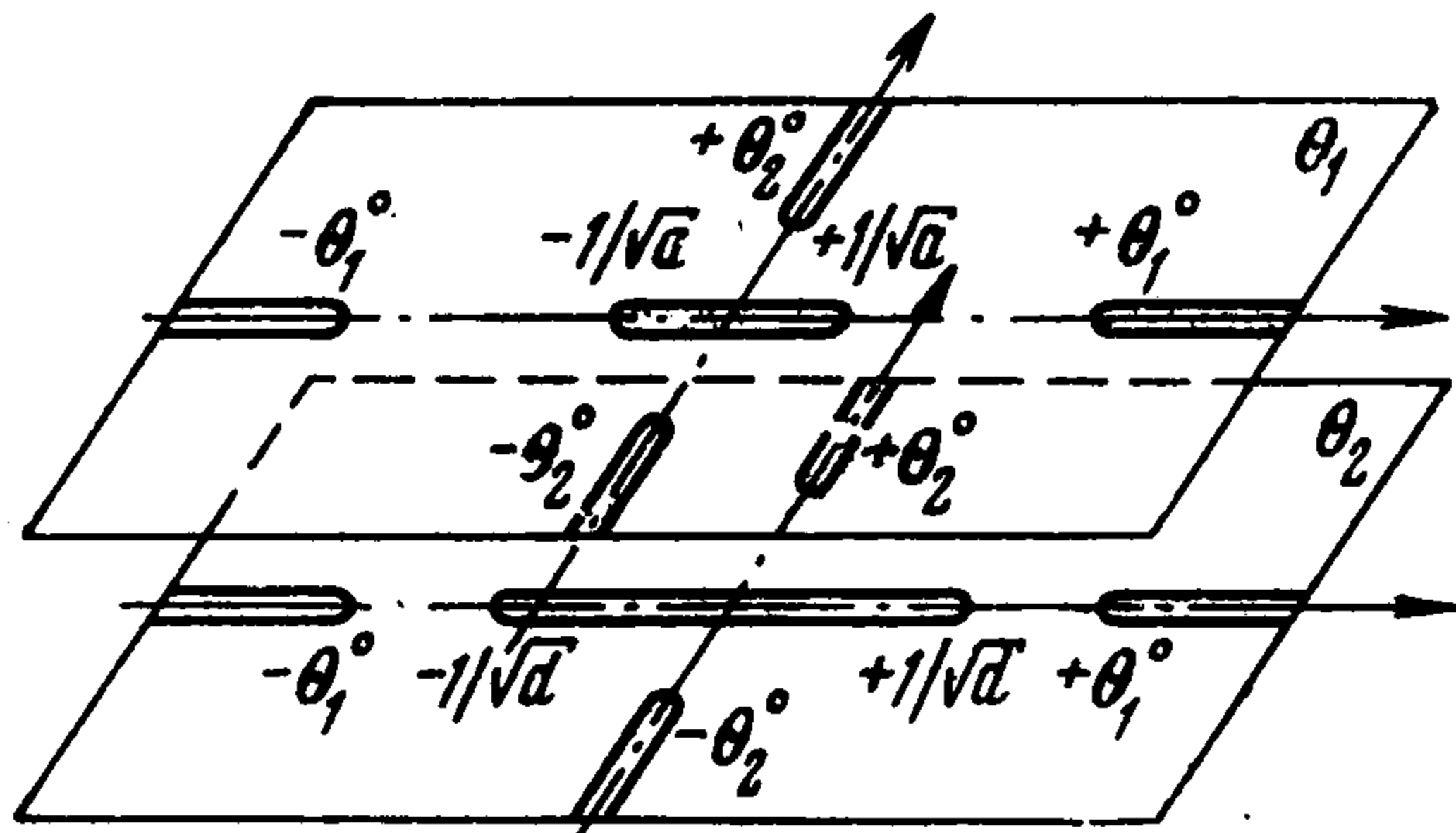
$$M = (b + d) N_1 - (b - d) (a - b) d$$

$$N_1 = (a - d) (b - d) - c^2$$

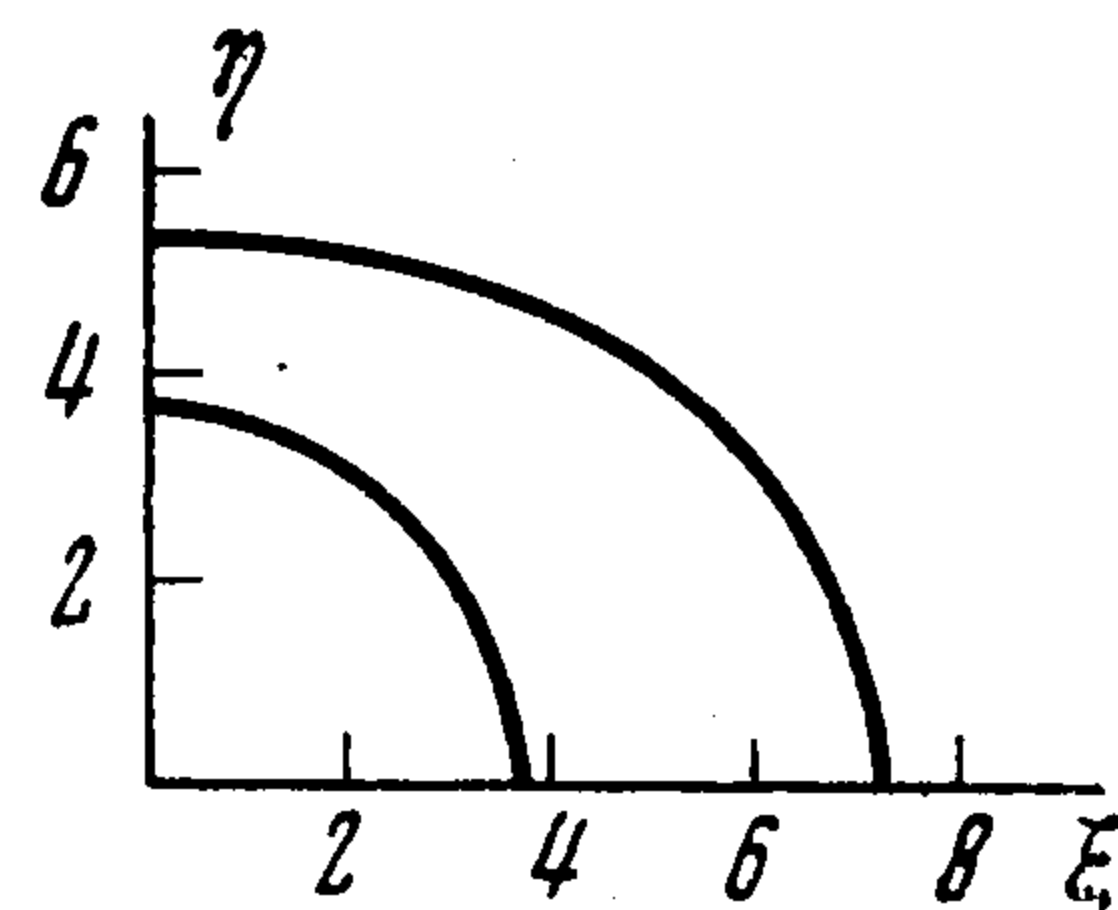
Картина распространения упругих волн в средах, удовлетворяющих условию (7), зависит от знаков величин

$$N_2 = (a - d) b - c^2, N_3 = (b - d) a - c^2 \quad (9)$$

В начале рассмотрим случай, когда $N_2 > 0$, $N_3 > 0$. В этом случае риманова поверхность имеет вид [2], изображенный на фиг. 1; берега разрезов (θ_i°, ∞) плоскостей



Фиг. 1



Фиг. 2

θ_1 и θ_2 склеены крест-накрест. Функции λ_k на плоскостях θ_k зафиксируем так, чтобы они были положительными при $\theta_k = i\beta$, где β — достаточно малая положительная величина. Соответствие между точками плоскости $\xi\eta$ и точками плоскостей θ_k выражается соотношениями (2).

Подставляя значения (3) в соотношения (2) и освобождаясь от радикалов, приходим к одному и тому же уравнению

$$\begin{aligned} & (bd\xi^4 + ad\eta^4 + L\xi^2\eta^2) \theta^4 - 2\xi(2bd\xi^2 + L\eta^2) \theta^3 - \\ & - [(a + d)\eta^4 + (b + d)\xi^2\eta^2 - 6bd\xi^2 - L\eta^2] \theta^2 + 2\xi[(b + d)\eta^2 - \\ & - 2bd] \theta + [\eta^4 - (b + d)\eta^2 + bd] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

В каждой точке плоскости $\xi\eta$ уравнение (10) имеет четыре корня; в точках, симметричных относительно оси ξ , корни одинаковые. Комплексные корни парно-сопряженные.

В рассматриваемом случае фронты квазипродольных и квазипоперечных волн, выражаемые формулами (4), представляют собой выпуклые замкнутые кривые [3]. На фиг. 2 изображены фронты волн для арагонита [4]

$$C_{11} = 160, C_{22} = 86.7, C_{33} = 42.7, C_{12} = 37.3 [10^{10} \text{ дн} / \text{см}^2], \rho = 2.95 \text{ г} / \text{см}^3$$

(картина симметрична относительно осей ξ и η).

Квазипродольному и квазипоперечному фронтам волн отвечают берега разрезов $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ плоскости θ_1 и $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ плоскости θ_2 .

В точках плоскости $\xi\eta$, внешних по отношению к фронту квазипродольной волны, все четыре корня уравнения (10) вещественные. Два из них сохраняют постоянные значения вдоль касательных к фронту квазипродольной волны и принадлежат берегам разреза $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ плоскости θ_1 , другие два сохраняют постоянные значения вдоль касательных к фронту квазипоперечной волны и принадлежат берегам разреза $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ плоскости θ_2 . В области, внешней по отношению к фронту квазипродольной волны, и в точках самого фронта решение (1) обращается в нуль.

В точках области, заключенной между фронтами волн, уравнение (10) имеет два вещественных и два комплексных корня. Вещественные корни сохраняют постоянные значения вдоль касательных к фронту квазипоперечной волны и принадлежат берегам разреза $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$ плоскости θ_2 , на которых в решении (1) обращаются в нуль члены, соответствующие $k = 2$.

В точках области, внутренней по отношению к фронту квазипоперечной волны, все четыре корня уравнения (10) комплексные, оба слагаемых в решении (1) отличны от нуля.

Сказанное о корнях уравнения (10) в точках областей, ограниченных волновыми фронтами, не относится к корням на участках оси ξ , где они имеют вещественные значения.

В точке $\xi = 0, \eta = 0$ все корни уравнения (10) обращаются в бесконечность; окрестности начала координат на плоскости $\xi \eta$ соответствуют окрестности бесконечно удаленных точек на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности.

Изучим соответствие между точками волновых полей и точками римановой поверхности, выражаемое соотношениями (2). Пусть $\theta_k = \delta_k + i\varepsilon_k, \lambda_k = E_k + iF_k$. Тогда соответствие между точками римановой поверхности и волновых полей выразится формулами

$$\xi = -F_k / (\varepsilon_k E_k - \delta_k F_k), \quad \eta = -\varepsilon_k / (\varepsilon_k E_k - \delta_k F_k) \quad (11)$$

Условно считаем, что квазипродольная волна распространяется на плоскости $\xi_1 \eta_1$, квазипоперечная — на плоскости $\xi_2 \eta_2$. В выражениях (2) и (11) индексы у координат точек, показывающие принадлежность точек плоскостям $\xi_k \eta_k$, пока не указываем.

Согласно (11), отрезкам $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ и $(-1/\sqrt{d}, +1/\sqrt{d})$, отсекаемым фронтами волн на осях ξ_1 и ξ_2 , отвечают отрезки $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm \infty)$ и $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \infty)$ на вещественных осях плоскостей θ_1 и θ_2 , приводимые в соответствие выражениями $\theta_k = 1/\xi_k$. Слагаемые решения (1), соответствующие этим отрезкам, отличны от нуля.

Верхним полуплоскостям θ_k отвечают части волновых полей на нижних полуплоскостях $\xi_k \eta_k$.

Функции (3) на участках $(0, \theta_2^0)$ положительно мнимых полуосей плоскостей θ_k , т. е. при $\theta_k = i\varepsilon_k$, принимают положительные вещественные значения

$$\lambda_k(i\varepsilon_k) = \left(\frac{[(b+d) + L\varepsilon_k^2] + (-1)^k \sqrt{Q(i\varepsilon_k)}}{2bd} \right)^{1/2} \quad (12)$$

$$Q(i\varepsilon_k) = [(b+d) + L\varepsilon_k^2]^2 - 4bd(1 + a\varepsilon_k^2)(1 + d\varepsilon_k^2)$$

Первые производные по переменным ε_k имеют вид

$$\lambda_k' = \frac{\varepsilon_k \Psi_k}{2bd\lambda_k(i\varepsilon_k)}, \quad \Psi_k = L + (-1)^k (K_1 K_2 \varepsilon_k^2 + M) / \sqrt{Q(i\varepsilon_k)}$$

На участках $0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon^0$, где $\varepsilon^0 = \theta_2^0 / i$, выполняются условия $\Psi_1' > 0$ и $\Psi_2' < 0$; на границах участков

$$\Psi_1(0) = 2d[(b-d)d + c^2] / (b-d), \quad \Psi_1(\varepsilon^0) = \infty$$

$$\Psi_2(0) = 2bN_3 / (b-d), \quad \Psi_2(\varepsilon^0) = -\infty$$

Следовательно, здесь функции Ψ_1 и λ_1' имеют положительные значения, функции Ψ_2 и λ_2' меняют знак с плюса на минус в точке

$$\varepsilon_2^* = [-(\sqrt{ad}M + L\sqrt{c^2[c^2 - (a-d)(b-d)]} / \sqrt{ad}K_1K_2)]^{1/2}$$

Таким образом, на участке $(0, \theta_2^0)$ положительно мнимой полуоси плоскости θ_1 функция λ_1 монотонно возрастает; функция λ_2 внутри того же участка на плоскости θ_2 имеет максимум в точке $\theta_2^* = i\varepsilon_2^*$, т. е. в интервале $(0, \theta_2^*)$ монотонно возрастает, в интервале (θ_2^*, θ_2^0) монотонно убывает, причем $\lambda_1(\theta_2^0) = \lambda_2(\theta_2^0)$.

Из (13) следует, что участкам положительно мнимых полуосей $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2^\circ$ и $0 \leq \theta_2 \leq \theta_2^*$ отвечают участки $-\sqrt{b} \leq \eta_1 \leq +\eta_2^\circ$ и $-\sqrt{d} \leq \eta_2 \leq +\eta_2^*$ отрицательных полуосей η_k , приводимые в соответствие выражениями $\eta_k = -\varepsilon_k / \lambda_k$, где $\eta_2^* < \eta_2^\circ < 0$. Участку $\theta_2^\circ \geq \theta_2 \geq \theta_2^*$ на плоскости θ_2 отвечает участок $+\eta_2^\circ \leq \eta_1 \leq +\eta_2^*$ на плоскости $\xi_1 \eta_1$, приводимый в соответствие выражением $\eta_1 = -\varepsilon_2 / \lambda_2$, в противном случае не будет однозначного соответствия между точками римановой поверхности и волновых полей.

На берегах разрезов $(\theta_2^\circ, i\infty)$ плоскостей θ_k функции (12) принимают комплексные значения

$$\begin{aligned} \lambda_k &= E \pm Fi & (13) \\ E &= \sqrt{S+T}/2\sqrt{bd}, & F &= \sqrt{S-T}/2\sqrt{bd} \\ S &= 2\sqrt{bd(1+a\varepsilon_k^2)(1+d\varepsilon_k^2)}, & T &= (b+d) + L\varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

Из (11) следует, что точкам берегов разрезом $(\theta_2^\circ, i\infty)$ плоскостей θ_k соответствуют точки плоскости $\xi_1 \eta_1$

$$\xi_1 = \mp F / \varepsilon_k E, \quad \eta_1 = -1 / F \quad (14)$$

В выражениях (13) и (14) склейке левого (правого) берега разреза плоскости θ_1 и правого (левого) берега разреза плоскости θ_2 отвечают верхние (соответственно нижние) знаки. Первой склейке берегов разрезом отвечает линия в третьем квадранте плоскости $\xi_1 \eta_1$, второй — в четвертом квадранте. Концы этих линий совпадают в точках $\eta_1 = \eta_2^\circ$ и $\eta_1 = 0$ оси ординат, образуя замкнутый контур P_1 , ограничивающий внутри поля квазипродольной волны область B_1 , симметричную относительно этой оси.

Остальную часть поля квазипродольной волны в нижней полуплоскости $\xi_1 \eta_1$, ограниченную фронтом волны и контуром P_1 , обозначим A_1 . Область A_1 отвечает верхней полуплоскости θ_1 , приводимая в соответствие соотношением (2) при $k=1$. Смещения в области A_1 поля квазипродольной волны выражаются членами решения (1), определенными на верхней полуплоскости θ_1 римановой поверхности.

Область B_1 может отвечать некоторая область лишь на плоскости θ_2 . Из (11) следует, что участкам $(\eta_2^*, 0)$ осей η_k могут отвечать комплексные точки плоскости θ_2 , удовлетворяющие условию $F_2 = 0$, из которого имеем

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \pm [(A + \sqrt{A^2 - B}) / \sqrt{adK_1K_2}]^{1/2} & (15) \\ A &= \sqrt{ad} [M - (L^2 + 4abd^2)\varepsilon_2^2] \\ B &= K_1K_2 \{adK_1K_2\varepsilon_2^4 + 2adM\varepsilon_2^2 + N_3 [(b-d)d + c^2]\} \end{aligned}$$

Выражения (15) только при вещественных значениях ε_2 на участке $(\varepsilon_2^*, \infty)$ определяют вещественные значения δ_2 , принадлежащие участкам $(0, \pm\infty)$. Следовательно, участкам $(\eta_2^*, 0)$ отрицательных полуосей η_k отвечают линии L_2 в первом и втором квадрантах плоскости θ_2 , выходящие из точки $\theta_2^* = i\varepsilon_2^*$ к бесконечно удаленной точке. Линии L_2 ограничивают область D_2 , симметричную относительно мнимой оси; остальную часть верхней полуплоскости θ_2 обозначим C_2 .

Область B_1 поля квазипродольной волны в нижней полуплоскости $\xi_1 \eta_1$ отвечает области D_2 в верхней полуплоскости θ_2 , приводимая в соответствие соотношением

$$1 - \theta_2 \xi_1 + \lambda_2 \eta_1 = 0 \quad (16)$$

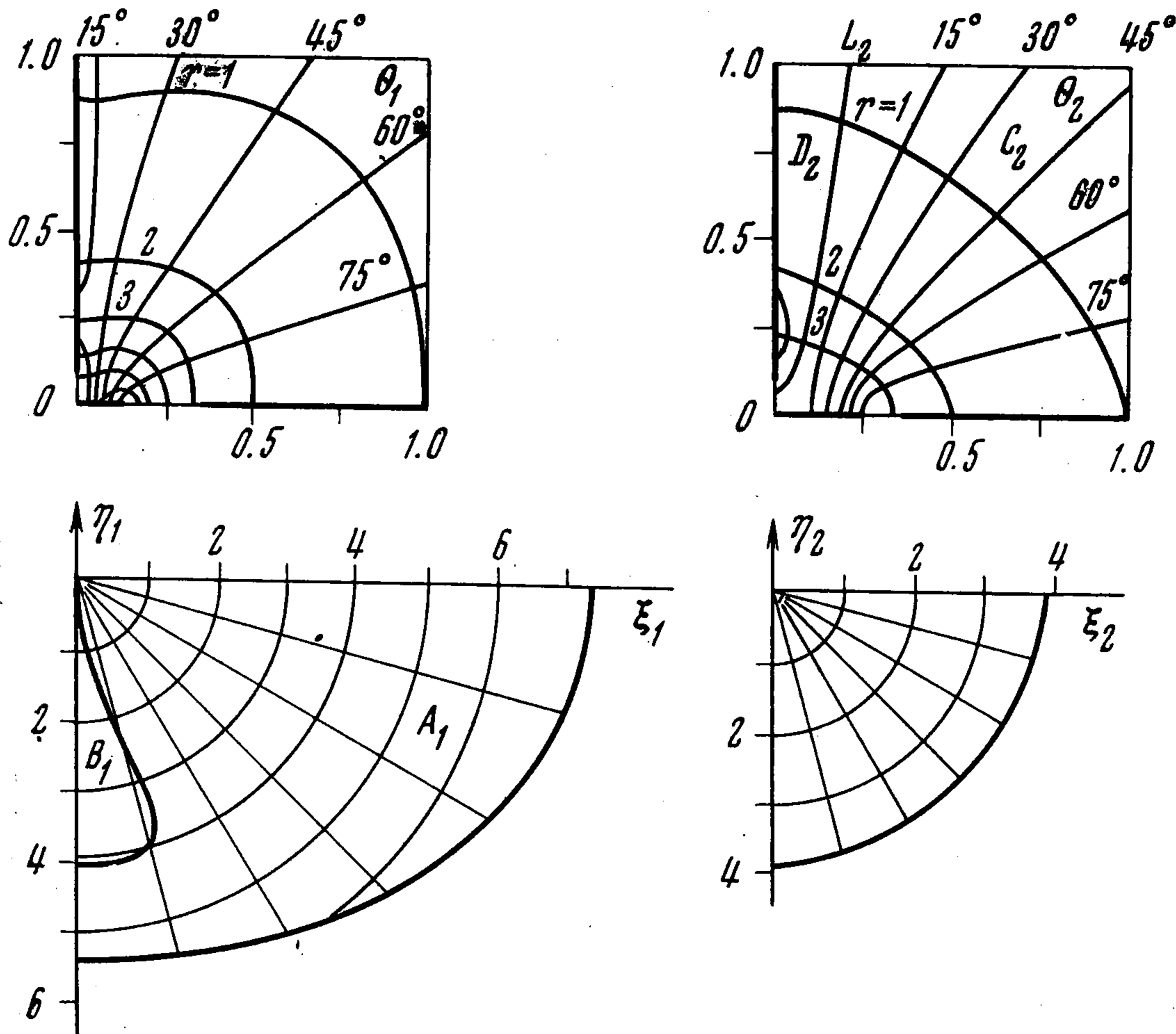
Смещения в области B_1 поля квазипродольной волны выражаются членами решения (1) при $k=2$, определенными в области D_2 верхней полуплоскости θ_2 .

Область поля квазипоперечной волны на нижней полуплоскости $\xi_2 \eta_2$ отвечает области C_2 верхней полуплоскости θ_2 , приводимая в соответствие соотношением (2) при $k=2$. Смещения в этой области поля квазипоперечной волны выражаются членами решения (1) при $k=2$, определенными в области C_2 верхней полуплоскости θ_2 .

На фиг. 3 изображены сетки на верхних полуплоскостях θ_k , соответствующие сеткам полярных координат на волновых полях в нижних полуплоскостях $\xi_k \eta_k$ для арагонита (картины симметричны относительно мнимых осей или осей ординат).

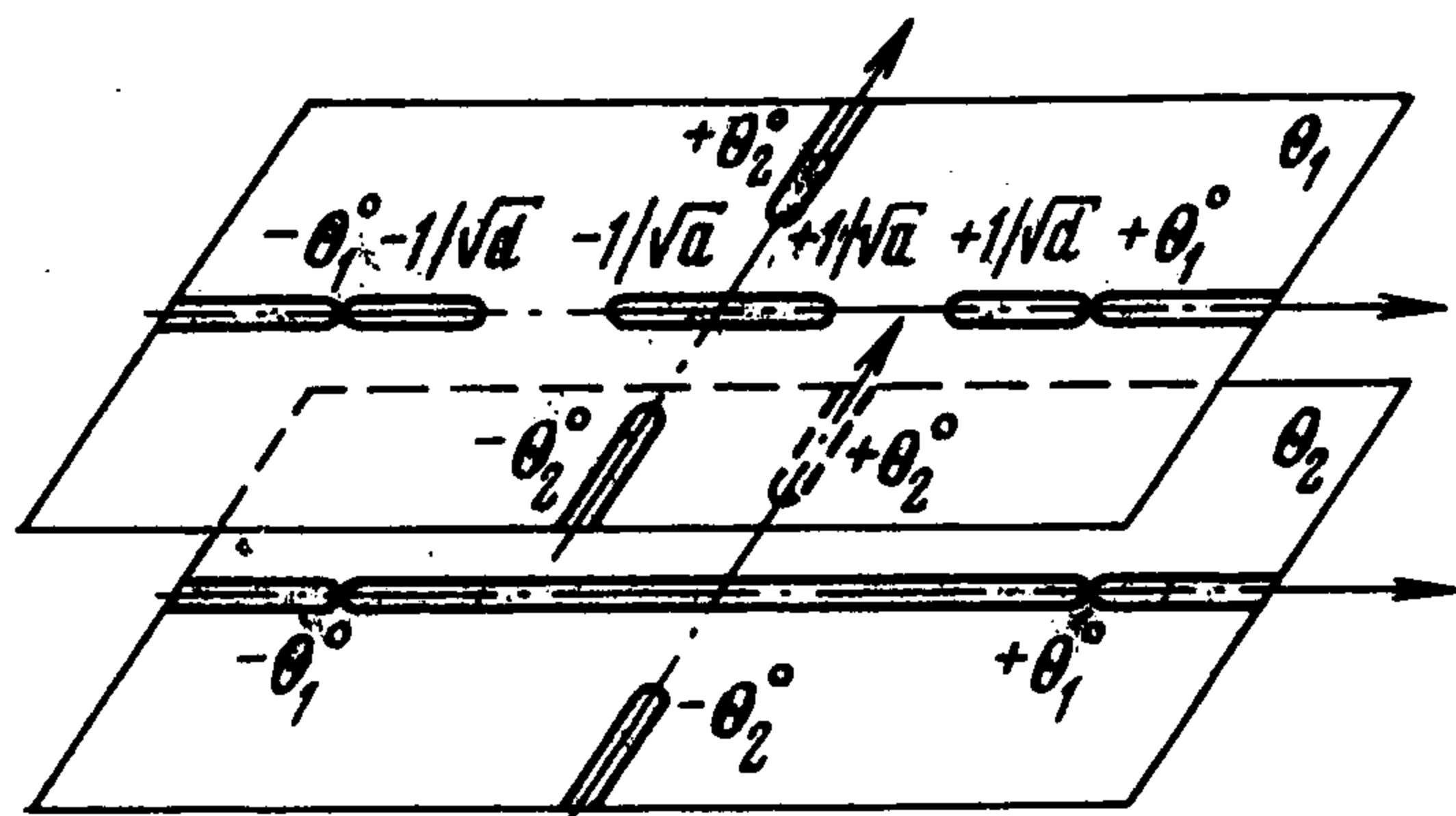
Теперь рассмотрим случай, когда $N_2 < 0, N_3 < 0$. Здесь риманова поверхность имеет вид [3], изображенный на фиг. 4; берега разрезов (θ_i°, ∞) плоскостей θ_k склеены крест-накрест.

Внешний фронт волны представляет собой выпуклую замкнутую кривую и выражается формулами (4) на берегах разреза $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ плоскости θ_1 .

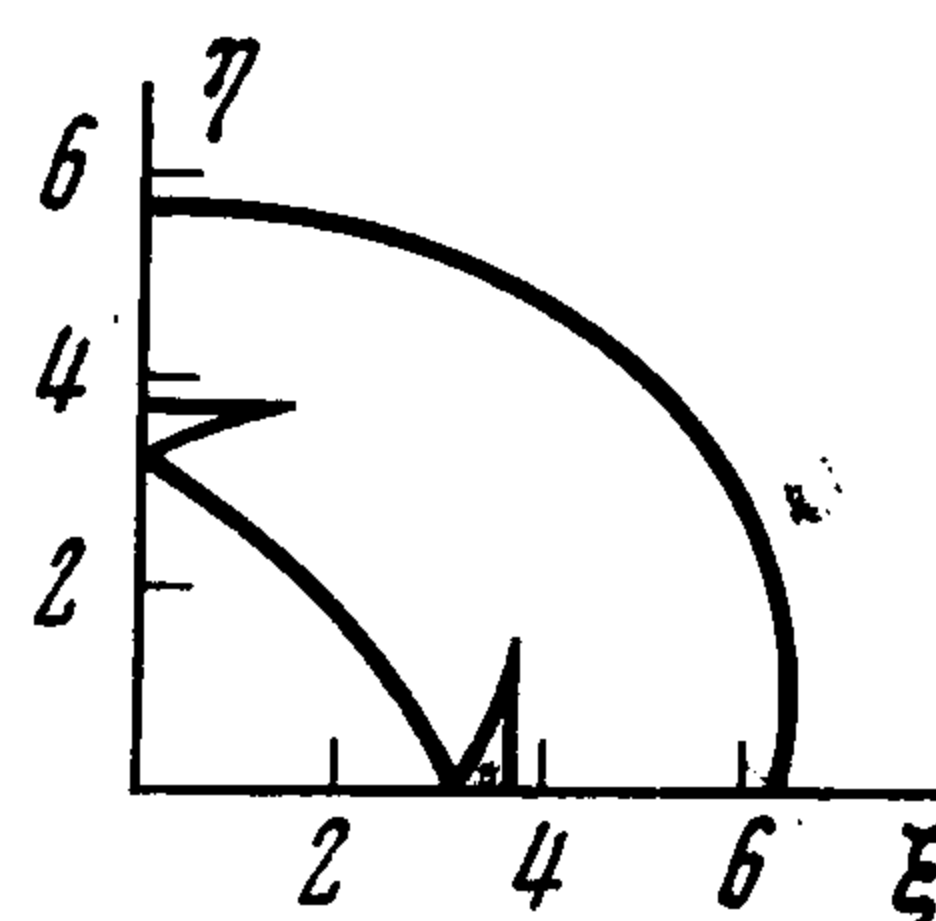


Фиг. 3

Внутренний фронт волны состоит из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки, и выражается формулами (4) на берегах разрезов $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 и $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm \theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 .



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 изображены волновые фронты для магнезия сульфата гептагидрата [4]

$$C_{11} = 69.8, C_{22} = 52.9, C_{66} = 22.2, C_{12} = 39, \rho = 1.7 \text{ г / см}^3$$

(картина симметрична относительно осей ξ и η).

Кусочно-гладкие кривые, образующие внутренний фронт волны, соединяются в точках возврата первого рода, расположенных симметрично относительно координатных осей. Участки фронта, соединяющие точки возврата в противоположных квадрантах, представляют собой выпуклые кривые, пересекающиеся в точках на координатных

осях. Участки фронта, соединяющие точки возврата в прилегающих квадрантах — вогнутые кривые, пересекающие координатные оси под прямым углом.

Внутренний фронт волны образует пять областей, из которых одна центральная, ограниченная участками фронта, соединяющими узловые точки; остальные четыре прилегают к центральной в узловых точках.

К внутреннему фронту волны из каждой точки, лежащей с внешней стороны по отношению к фронту, можно провести только две касательных; из каждой точки внутри четырех областей, ограниченных участками фронта, соединяющими точки возврата и узловую точку с ними, можно провести четыре касательных. Из точек внутри центральной области к внутреннему фронту нельзя провести ни одной касательной.

В точках плоскости $\xi\eta$, внешних по отношению к внешнему фронту волны, все четыре корня уравнения (10) вещественные. Два из них принадлежат берегам разреза $(-1/\sqrt{a}, +1/\sqrt{a})$ плоскости θ_1 , отвечающим внешнему фронту; два другие — берегам разрезов $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 и $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 , отвечающим внутреннему фронту волны. В этих точках решение (1) обращается в нуль.

В точках области, заключенной между фронтами, уравнение (10) имеет два вещественных и два комплексных корня. Вещественные корни принадлежат берегам разрезов, отвечающим внутреннему фронту. Слагаемые в решении (1), соответствующие этим корням, обращаются в нуль.

В точках областей, ограниченных участками внутреннего фронта, соединяющими точки возврата и узловую точку с ними, все четыре корня уравнения (10) вещественные и принадлежат берегам разрезов $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 и $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 . В этих областях решение (1) обращается в нуль, упругие колебания рассматриваемых типов отсутствуют.

В точках центральной области, ограниченной участками внутреннего фронта, заключенными между узловыми точками, все четыре корня уравнения (10) комплексные. В этой области решение (1) соответствует квазипродольным и квазипоперечным упругим колебаниям.

Таким образом, поле квазипродольных возмущений представляет собой пятисвязную область, ограниченную внешним фронтом и участками внутреннего фронта, соединяющими точки возврата и узловые точки с ними. Эти участки внутреннего фронта образуют внутренние фронты квазипродольной волны, ограничивающие внутри поля квазипродольной волны четыре полости, в которых квазипродольные и квазипоперечные типа SV возмущения отсутствуют.

После квазипоперечных возмущений типа SV представляет собой область, ограниченную участками внутреннего фронта, заключенными между узловыми точками. Эти участки образуют фронты квазипоперечной волны.

Изучим соответствие между точками римановой поверхности и точками полей квазипродольных и квазипоперечных волн на плоскостях $\xi_1\eta_1$ и $\xi_2\eta_2$.

Функция λ_1 на участках $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$ вещественной оси плоскости θ_1 принимает мнимые значения, на берегах разрезов $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$ — вещественные значения. На берегах разрезов $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$ плоскостей θ_2 функции λ_2 имеют комплексные значения.

Согласно (13), участкам $(\pm 1/\sqrt{a}, \pm 1/\sqrt{d})$ и берегам разрезов $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$ на плоскости θ_1 отвечают участки $(\pm \sqrt{a}, \pm \sqrt{d})$ и $(\pm \xi_1^\circ, 0)$ оси ξ_1 , приводимые в соответствие выражением $\xi_1 = 1/\theta_1$. Берегам разрезов $(\pm 1/\sqrt{d}, \pm \theta_1^\circ)$ плоскости θ_1 отвечают внутренние фронты квазипродольной волны, образующие внутри поля квазипродольной волны полости, содержащие участки $(\pm \sqrt{d}, \pm \xi_1^\circ)$ оси ξ_1 , и касательные к ним. Берегам разрезов $(\pm \theta_1^\circ, \pm \infty)$ плоскости θ_2 отвечают участки $(\pm \xi_1^\circ, 0)$ оси ξ_2 , приводимые в соответствие выражением $\xi_2 = 1/\theta_2$.

Согласно (12), в рассматриваемом случае функция λ_1 на участке $(0, \theta_2^\circ)$ положительной мнимой полуоси плоскости θ_1 представляет собой положительную монотонно возрастающую вещественную функцию; функция λ_2 на таком же участке плоскости θ_2 — положительную монотонно убывающую вещественную функцию, при этом $\lambda_1(\theta_2^\circ) = \lambda_2(\theta_2^\circ)$.

Из (11) следует, что участку $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2^\circ$ положительно мнимой полуоси плоскости θ_1 отвечает участок $-\sqrt{b} \leq \eta_1 \leq \eta_2^\circ$ отрицательной полуоси η_1 , приводимый в соответствие выражением $\eta_1 = -\varepsilon_1 / \lambda_1$. Участку $\theta_2^\circ \geq \theta_2 \geq 0$ положительно мнимой полуоси плоскости θ_2 отвечает участок $\eta_2^\circ \leq \eta_1 \leq -\sqrt{d}$ отрицательной полуоси η_1 , приводимый в соответствие выражением $\eta_1 = -\varepsilon_2 / \lambda_2$, в противном случае не будет однозначного соответствия между точками римановой поверхности и волновых полей.

На берегах разрезов $(\theta_2^\circ, i\infty)$ плоскостей θ_k функции λ_k принимают комплексные значения, представленные выражениями (13). Склеивке левого (правого) берега разреза плоскости θ_1 и правого (левого) берега разреза плоскости θ_2 отвечает линия в третьей (соответственно в четвертой) четверти поля квазипродольной волны. Концы этих линий совпадают в точках $\eta_1 = \eta_2^\circ$ и $\eta_1 = 0$ оси ординат, образуя замкнутый контур P_1 , выраженный функциями (14).

В нижней полуплоскости $\xi_1 \eta_1$ область поля квазипродольной волны с внешней стороны замкнутого контура P_1 обозначим A_1 . Область A_1 отвечает верхней полуплоскости θ_1 , приводимая в соответствие соотношением (2) при $k = 1$. Смещения в этой области выражаются членами решения (1), определенными на верхней полуплоскости θ_1 .

Полость поля квазипродольной волны, содержащая участок $(-\sqrt{d}, \eta_2^*)$ отрицательной полуоси η_1 , находится внутри области, ограниченной контуром P_1 . Границе этой полости и касательным к ней, согласно [3], отвечает на верхнем берегу разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ плоскости θ_2 некоторый участок $(-\theta_2^*, +\theta_2^*)$. Область поля квазипродольной волны, заключенную между контуром P_1 и границей полости, обозначим B_1 .

Согласно (4), точки $\pm \theta_2^*$, соответствующие точкам η_2^* на осях η_1 и η_2 , удовлетворяют уравнению $\lambda_2' = 0$ и определяются выражением

$$\theta_2^* = \left(\frac{\sqrt{ad}M + \sqrt{ad}M^2 - K_1 K_2 N_3 [(b-d)d + c^2]}{\sqrt{ad}K_1 K_2} \right)^{1/2} \quad (17)$$

В рассматриваемом случае выражение (15) при вещественных значениях ε_2 в интервале $(0, \infty)$ определяет вещественные значения δ_2 в интервалах $(\pm \delta_2^*, \pm \infty)$, где $\delta_2^* = \theta_2^*$.

Следовательно, участкам $(\eta_2, 0)$ отрицательных полуосей η_1 и η_2 отвечают в первом и втором квадрантах плоскости θ_2 линии L_2 , идущие от точек $\pm \theta_2^*$ верхнего берега разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$ к бесконечно удаленной точке. Область в верхней полуплоскости θ_2 , ограниченную линиями L_2 и участком $(-\theta_2^*, +\theta_2^*)$ верхнего берега разреза $(-\theta_1^\circ, +\theta_1^\circ)$, обозначим D_2 , остальную часть верхней полуплоскости θ_2 обозначим C_2 .

Области B_1 поля квазипродольной волны в нижней полуплоскости $\xi_1 \eta_1$ отвечает область D_2 в верхней полуплоскости θ_2 , приводимая в соответствие выражением (16). Смещения в этой области поля квазипродольной волны выражаются членами решения (1) при $k = 2$, определенными в области D_2 верхней полуплоскости θ_2 .

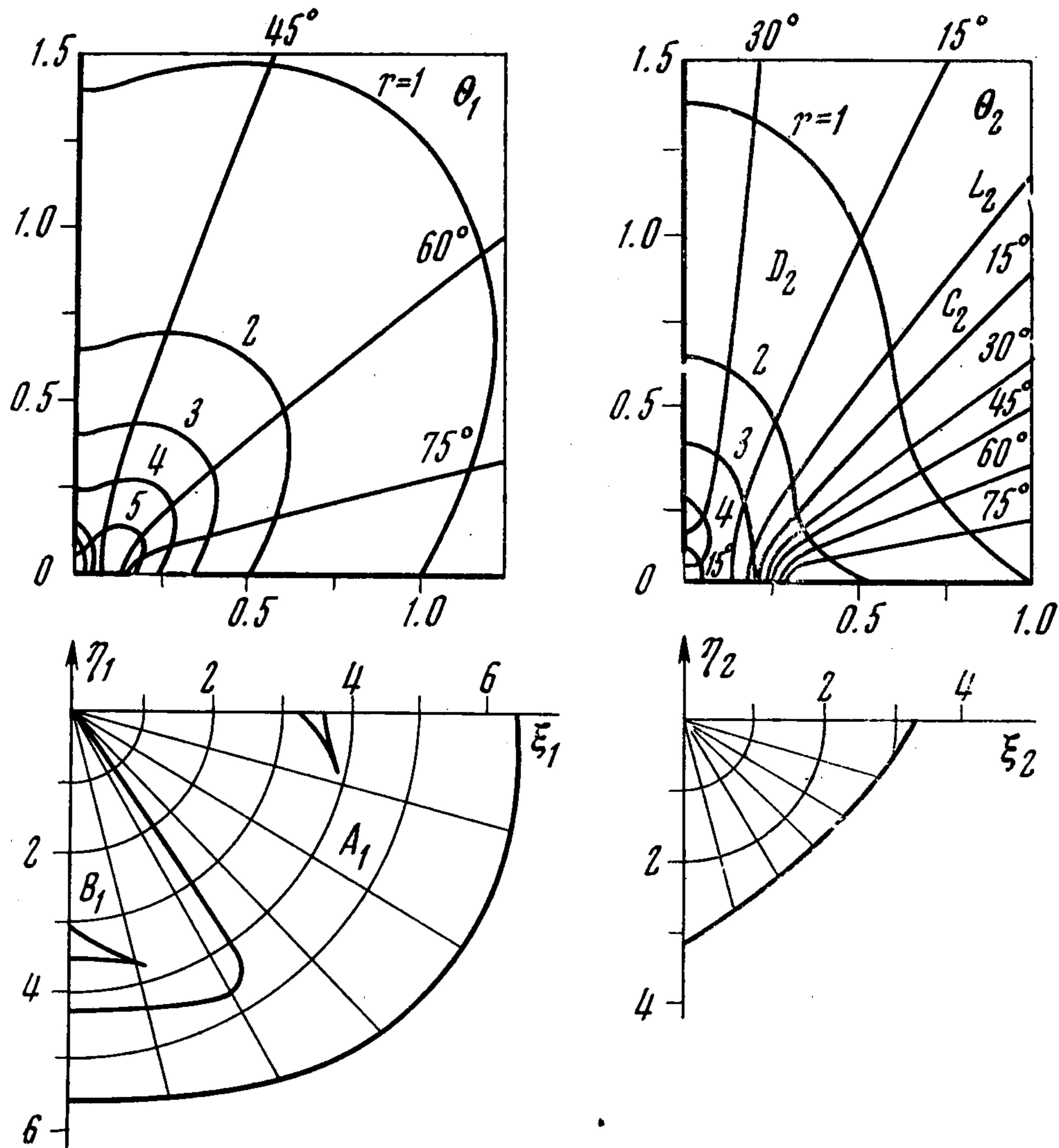
Области поля квазипоперечной волны в нижней полуплоскости $\xi_2 \eta_2$ отвечает область C_2 верхней полуплоскости θ_2 , приводимая в соответствие соотношением (2) при $k = 2$. Смещения в этой области выражаются членами решения (1) при $k = 2$, определенными в области C_2 верхней полуплоскости θ_2 .

На фиг. 6 изображены сетки на верхних полуплоскостях θ_k , соответствующие сеткам полярных координат на волновых полях в нижних полуплоскостях $\xi_k \eta_k$ для магния сульфата гептагидрата (картины симметричны относительно мнимых осей или осей ординат).

Случай, когда значения N_2 и N_3 имеют противоположные знаки, являются переходными от одного рассмотренного случая к другому, существенно от них не отличаются и могут быть легко рассмотрены.

В работе [1] предполагается, что в решении (1) слагаемые при $k = 1$ выражают квазипродольные возмущения, при $k = 2$ — квазипоперечные типа SV . Выполненные в данной статье исследования волновых полей для сред, удовлетворяющих условию (7), показывают, что квазипродольные возмущения не могут быть выражены только одними слагаемыми решения (1), определенными на плоскости θ_1 римановой поверх-

ности. В некоторой области волнового поля квазипродольные возмущения выражаются слагаемыми решения (1), определенными на плоскости θ_2 . Результаты исследований показывают, что волновая картина в анизотропных средах имеет отличительные особенности в зависимости от соотношений упругих постоянных. Если хотя бы одно из значений (9) меньше нуля, внутренний фронт волны имеет остроугольные кромки. В этих случаях поле квазипоперечной волны ограничено участками внутреннего фронта,



Фиг. 6

соединяющими узловыми точками. Участки внутреннего фронта, образующие остроугольные кромки, представляют собой внутренние фронты квазипродольной волны, ограничивающие внутри поля этой волны полости, в которых всякие возмущения, выражаемые решением (1), отсутствуют. Поле квазипродольных возмущений представляет собой пятисвязную область при $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$ или трехсвязную область при выполнении одного из условий.

Поступила 27 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. С в е к л о В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, 1949, вып. 17.
2. О с и п о в И. О. К плоской задаче о точечном источнике колебаний типа мгновенного импульса внутри анизотропной среды. В сб.: Распространение упругих и упруго-пластических волн. Ташкент, «ФАН», 1969.
3. О с и п о в И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. А л е к с а н д р о в К. С., Р ы ж о в а Т. В. Упругие свойства кристаллов. Кристаллография, 1961, т. 6, вып. 2.