будем иметь

$$\pi e^{(T_0-\varepsilon_1)C} z_1 = \pi e^{T_0 C} z_0 - \int\limits_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} u_0 (T_0 - r)\, dr + \int\limits_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} v\, (T_0 - r)\, dr \in W^* (T_0 - \varepsilon_1)$$

и, следовательно, $T(z_1) \leqslant T_0 - \varepsilon_1$, каково бы ни было управление игрока $V$. Теорема 4 оказывается доказанной, если только заметить, что все приведенные выше рассуждения применимы к точке $z_1 = z(\varepsilon_1)$ и т. д.

Условиям теоремы 4 удовлетворяет контрольный пример Л. С. Понтрягина [9].

Автор благодарит Е. Ф. Мищенко за руководство работой.

Поступила 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной прямой частью Матем. сб., 1960, т. 51, вып. 1.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрономии, физ. и хим., 1959, № 2.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
5. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
6. Гусятников П. Б. К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем, вып. 3. Киев, 1970.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966.
9. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 4.

---

УДК 531.36

## ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

В. М. Зварыкин, Б. И. Шахтарин

(Ленинград, Москва)

Рассматривается уравнение Льенара

$$x^{\cdot\cdot} + f(x)x^{\cdot} + g(x) = 0 \tag{1}$$

Предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

а) выполнены условия существования и единственности решения;

б) $xg(x) > 0$ для любых $x \in (a, b)$ и $x \neq 0$;

в) $x \int\limits_0^x f(x)\, dx > 0$ для любого $x \in [a, b]$ и $x \neq 0$,

причем найдутся такие $x \in (-x_m, x_m) \subset [a, b]$, для которых $f(x) > 0$.

Система, эквивалентная уравнению (1), имеет вид

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = -f(x)\,y - g(x) \tag{2}$$

Исследованию устойчивости начала координат с использованием функций Ляпунова для более общих систем посвящены работы [1-5] и др.

В данной статье в отличие от указанных работ вводится условие в), которое позволяет просто оценить область притяжения начала координат. Результат используется для исследования систем, встречающихся в радиотехнике и автоматике.

*Теорема.* Если для системы (2) выполнены условия а), б), в), то положение равновесия $x = y = 0$ системы асимптотически устойчиво. Область притяжения нулевого решения определяется в виде

$$\frac{1}{2} y^2 = \int\limits_x^{x_i} g(x)\,dx = G(x_i) - G(x) \tag{3}$$

Здесь верхний предел интегрирования $x_i$ будет зависеть от поведения функций $f(x)$ и $g(x)$ на интервале $\langle a, b\rangle$. Так, в системе (2) в качестве $x_i = x_m$ выбирается ближайший к началу координат корень уравнения $f(x) = 0$, когда $x \in [a, b]$. В том случае, когда уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на интервале $[a, b]$, принимается, что $x_m = \min(|a|, |b|)$. Если перейти к переменным фазовой плоскости Льенара

$$x^\cdot = y - F(x),\ y^\cdot = -g(x),\ F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx \tag{4}$$

то в качестве $x_i = x_k$ выбирается ближайший к началу координат корень уравнения $g(x) = 0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию Ляпунова в виде

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int\limits_0^x g(x)\,dx$$

которая в силу условия б) теоремы будет определенно положительной в области $D: \{x \in (a, b),\ x \neq 0,\ |y| < +\infty\}$.

Взяв полную производную функции $V$ по времени в силу системы (2), а затем и системы (4), получим

$$V^\cdot|_{(2)} = -y^2 f(x), \qquad V^\cdot|_{(4)} = -g(x) F(x)$$

При сформулированных ограничениях а), б), в) для всех $x, y \in D$ имеем $V^\cdot|_{(2)} < 0$, $V^\cdot|_{(4)} < 0$. Непосредственно из системы (2) и (4) вытекает, что множества $V^\cdot|_{(2)} = 0 (y = 0)$ и $V^\cdot|_{(5)} = 0$ (либо $g(x) = 0$, либо $F(x) = 0$) не содержат целых траекторий кроме состояния равновесия $x = y = 0$. Тогда на основании теорем [1, 2] положение равновесия $x = y = 0$ асимптотически устойчиво.

В области (3) для всех $x, y \in D$ выполняется неравенство

$$0 < V(x, y) < V(x_i, y)$$

Отсюда следует [2-4], что (3) является областью притяжения начала координат.

Используем полученный результат для исследования систем радиотехники и автоматики [6-8].

Например, пусть $f(x) = (a / \alpha)\, g'(x)$, где $a, \alpha > 0$ [8]; $g(x)$ — нечетная функция такая, что

$$g(x + 2\pi) = g(x), \qquad g(0) = g(\pi) = g(-\pi) = 0$$

$$\max_{x \in (-\pi, \pi)} g(x) = -\min_{x \in (-\pi, \pi)} g(x) = 1$$

В этом примере $x_m = x_i$ находится из уравнения $g'(x) = 0$, а $x_i = x_k$ — ближайший к началу координат корень уравнения $g(x) = 0$. Этот случай соответствует астатической системе регулирования.

В качестве второго примера [7] рассмотрим уравнение (1) при

$$f(x) = \alpha[1 + \lambda g_1'(x)], \ g(x) = g_1(x) - \beta, \ \alpha, \lambda, \beta > 0 \tag{5}$$

Функция $g_1(x)$ такая же, как и в предыдущем примере.

Абсциссы состояний равновесия определяются из уравнения

$$g_1(x) = \beta \ \ (g(x) = 0)$$

Пусть $(x_0, 0)$ — устойчивое состояние равновесия. Перенесем начало координат в точку $(x_0, 0)$, положив $x = \varphi + x_0$. Уравнение (1) в случае (5) запишется в виде

$$\varphi^{\cdot\cdot} + f(\varphi)\varphi^{\cdot} + g(\varphi) = 0 \tag{6}$$

$$f(\varphi) = \alpha[1 + \lambda g_1'(\varphi + x_0)], \ g(\varphi) = g_1(\varphi + x_0) - \beta$$

Уравнение (6) рассматривается в полосе $L: \{x_1 - x_0 - 2\pi < \varphi < x_1 - x_0, |y| < +\infty\}$, где $x_1$ — абсцисса неустойчивого состояния равновесия, удовлетворяющая сформулированным выше утверждениям.

Значение верхнего предела $\varphi_i$ для уравнения (6) будет

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_m \leqslant \varphi_1 & \text{в случае (2)} \\ \varphi_1 = \bar{x}_1 - x_0 & \text{в случае (4)} \end{cases}$$

Значение $\varphi_m$ определяется из уравнения

$$g_1'(\varphi + x_0) = -\lambda^{-1} \tag{7}$$

Отсюда следует, что уравнение (7) имеет решение только при $\lambda \geqslant \lambda_*$, где $\lambda_* = |g_{\max}'|^{-1}$; при $\lambda < \lambda_*$ в силу системы (2) имеем $V^{\cdot} < 0$ при любом $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$, так как $f(\varphi) > 0$ при $\varphi \in (-\varphi_1, \varphi_1)$.

Таким образом, с ростом параметра $\lambda$ область асимптотической устойчивости сужается и в пределе при $\lambda \to \infty$ определяется из уравнения $g'(\varphi + x_0) = 0$.

Поступила 6 VIII 1971

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. 2. М., Физматгиз, 1958.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
3. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. ПММ, 1952, т. 16, вып. 5.
4. Красовский Н. Н. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, 1953, т. 17, вып. 6.
5. Плисс В. А. Качественная картина интегральных кривых в целом и построение с любой точностью области устойчивости одной системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, 1953. т. 17, вып. 5.
6. Кобышев В. А., Шахтарин Б. И. Исследование одной нелинейной системы. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 8.
7. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 11, № 12.
8. Шахтарин Б. И. Об одной лемме в теории фазовой автоподстройки частоты. Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 9.