УДК 62—50

# К ВОПРОСУ ОБ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИГРОКОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

**П. Б. Гусятников**

(Москва)

**Рассмотрены три возможные постановки задачи об окончании дифференциальной игры из данной точки. Приводятся достаточные условия для завершения линейной дифференциальной игры при значительной дискриминации догоняющего.**

**1.** Пусть движение вектора $z$ в $n$-мерном евклидовом пространстве $R$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz/dt = f(z, u, v) \tag{1}$$

где $u \in P$ и $v \in Q$ — управляющие параметры, изменяющиеся на компактных в $R$ множествах $P$ и $Q$. Относительно правой части уравнения (1) будем предполагать, что:

а) $f(z, u, v)$ непрерывна по $(z, u, v) \in R \times P \times Q$;

б) для любых $u \in P$, $v \in Q$ и $z_1$, $z_2 \in R$, $|z_1| \leqslant C$, $|z_2| \leqslant C$ выполнено неравенство

$$|f(z_1, u, v) - f(z_2, u, v)| \leqslant k\,|z_1 - z_2|$$

где $k$ — постоянная, зависящая лишь от $C$;

в) существует такая постоянная $B$, что для всех $z \in R$, $u \in P$, $v \in Q$ имеет место

$$|z \cdot f(z, u, v)| \leqslant B\,(1 + |z|^2)$$

г) множество $f(z, P, v)$ выпукло при любых $z \in R$, $v \in Q$. Пусть, кроме того, в $R$ задано некоторое замкнутое множество $M$. Будем говорить, что всеми перечисленными выше данными описана дифференциальная игра (1).

Измеримые вектор-функции $u^* = \{u(t), t \geqslant 0\}$, $v^* = \{v(t), t \geqslant 0\}$, удовлетворяющие при каждом $t$ включению $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, назовем управлениями игроков $U$ и $V$ соответственно. Цель игрока $U$ состоит в приведении точки $z$ на множество $M$, игрок $V$ старается помешать этому. Игра заканчивается, когда вектор $z$ впервые попадает на $M$.

Отметим, что при выполнении условий а) — г) для любых $z_0 \in R$ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$ и для любой пары управлений $u^*$, $v^*$, определенных на $[\tau, T]$, существует и единственно [1] решение $z(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant T)$ уравнения (1) с начальным условием $z(0) = z_0$ (т. е. абсолютно непрерывная на $[\tau, T]$ вектор-функция $z(t)$, почти всюду удовлетворяющая уравнению (1)). Функцию $z(t)$ будем называть движением и обозначим $z(t) = z(t; \tau, z_0, u^*, v^*, T)$. При фиксированных $\tau$, $T$, $v^*$ множество движений компактно [2, 3]: если $z_i \to z_0$ при $i \to \infty$, то из любой последовательности движений $z_i(t) = z(t; \tau, z_i, u_i^*, v^*, T)$ можно выбрать подпоследовательность $z_{n_i}(t)$, равномерно на $[\tau, T]$ сходящуюся к некоторому движению $z(t; \tau, z_0, u_0^*, v^*, T)$. Равномерную сходимость на $[\tau, T]$ будем обозначать символом $\Rightarrow$.

Будем говорить, что игра (1) может быть закончена из точки $z_0$ за время $t(z_0)$, если (каково бы ни было управление $v^*$ игрока $V$) игрок $U$ может так построить свое управление $u^*$, что точка $z(t) = z(t; 0, z_0, u^*, v^*, t)$ попадет на множество $M$ не позднее чем через время $t(z_0)$. Относительно информированности игрока $U$ при этом предполагается, что в каждый момент времени $t$ он знает $z(t)$ и

(I) $\varepsilon$-росток управления игрока $V$, т. е. $v(s)$, $t \leqslant s \leqslant t + \varepsilon$;

(II) $v(s)$, $s \leqslant t$;

(III) вынужден сам задавать $\varepsilon$-росток $u(s)$ $(t \leqslant s \leqslant t + \varepsilon)$, после чего управление $v(t)$ выбирает игрок $V$.

В данной статье доказывается, что постановки (I) и (II) задачи об окончании игры (1) из данной точки $z_0$ в определенном смысле эквивалентны. С этой целью вводится оператор $E_\varepsilon$ (аналог оператора $T_\varepsilon$ [4]) и к дифференциальной игре (1) применяется метод Л. С. Понтрягина — Б. Н. Пшеничного [4, 5] в комбинации с конструкциями работы [6]. Доказательства формулируемых утверждений получаются формальной заменой $T_\varepsilon$ на $F_\varepsilon$ (роль леммы п. 11 работы [6] выполняет при этом доказываемая ниже лемма 1), в связи с чем мы их опускаем. Ниже будут указаны случаи, когда некоторое время $T = T(z_0)$ завершения игры (1) из данной точки $z_0$, определяемое постановкой (I), является достаточным для окончания ее в смысле постановки (III).

2. Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Оператор $F_\varepsilon$: $2^R \to 2^R$ определим следующим образом: для любого $X \subset R$ точка $z_0$ принадлежит множеству $F_\varepsilon(X)$ тогда и только тогда, когда (каково бы ни было управление $v^*$ игрока $V$) найдется такое управление $u^*$ игрока $U$, что $z(\varepsilon) = z(\varepsilon;\ 0,\ z_0,\ u^*,\ v^*,\ \varepsilon) \in X$.

Отметим следующие свойства оператора $F_\varepsilon$ [4]:

1°. Если $X_1 \subset X_2$, то $F_\varepsilon(X_1) \subset F_\varepsilon(X_2)$;

2°. $F_{\varepsilon_1}(F_{\varepsilon_2}(X)) \subset F_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(X)$;

3°. Если $X$ замкнуто, то замкнуто и $F_\varepsilon(X)$;

4°. Если $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность замкнутых множеств таких, что $X_{i+1} \subset X_i$ $(i = 1, 2,\ldots)$, то

$$F_\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^\infty X_i\right) = \bigcap_{i=1}^\infty F_\varepsilon(X_i)$$

Пусть $t$ — произвольное положительное число. Всякий набор $\omega_t = \{\tau_0,\ \tau_1,\ \ldots,\ \tau_m\}$ вещественных чисел $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = t$ назовем разбиением отрезка $[0,\ t]$. Положим $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ $(i = 1, \ldots,\ m)$ и $|\omega_t| = \max \delta_i$. На множестве всех разбиений отрезка $[0, t]$ введем отношение порядка $<$, полагая $\omega_t' < \omega_t''$ тогда и только тогда, когда всякая точка разбиения $\omega_t'$ является точкой разбиения $\omega_t''$. Поставим всякому разбиению $\omega_t$ отрезка $[0,\ t]$ в соответствие оператор $F_{\omega_t}$: $2^R \to 2^R$, действующий следующим образом:

$$F_{\omega_t}(X) = F_{\delta_m}\left(F_{\delta_{m-1}}(\ldots(F_{\delta_1}(X))\ldots)\right), \qquad X \subset R$$

Из свойств 1° — 4° вытекает, что

5°. Если $X$ замкнуто, то замкнуто и $F_{\omega_t}(X)$.

6°. Если $\omega_t' < \omega_t''$, то $F_{\omega_t''}(X) \subset F_{\omega_t'}(X)$.

*Лемма* 1. Пусть $X$ замкнуто, $\omega_t = \{\tau_0,\ \tau_1, \ldots, \tau_m\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0,\ t]$ и пусть последовательность $\{\tau_1^k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $\tau_1 \leqslant \tau_1^k < \tau_2$; $\tau_1^k \to \tau_1$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\bigcap_k F_{\omega_t^k}(X) \subset F_{\omega_t}(X), \qquad \omega_t^k = \{\tau_0,\ \tau_1^k,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m\}$$

При доказательстве леммы понадобится ряд определений. Для каждого $t > 0$ через $U^t$ $(V^t)$ будем обозначать множество всех управлений игрока $U$ (игрока $V$), определенных на $[0,\ t]$. Пусть $z_0 \in R$, $X \subset R$, $\omega_t = \{\tau_0,\ \tau_1, \ldots, \tau_m\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0,\ t]$ и $D$ — подмножество из $V^t$. Отображение $g = g(z_0,\ X,\ \omega_t,\ D)$: $D \to U^t$ назовем $\omega_t$-квазистратегией в точке $z_0$ относительно множества $X$, если:

а) каковы бы ни были $v_1^*, v_2^* \in D$ и $k \leqslant m$, из равенства $v_1(s) \equiv v_2(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_k$ следует равенство $u_1(s) = g(v_1^*)(s) \equiv u_2(s) = g(v_2^*)(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_k)$ $(u_i(s) = g(v_i^*)(s)$ — значение функции $u_i^* = g(v_i^*) \in U^t$ в точке $s$;

б) для любого $v^* \in D$ имеет место включение $z(t) = z(t;\ 0,\ z_0,\ g(v^*),\ v^*,\ t) \in X$.

Легко проверяется следующее

*Утверждение* 1. Пусть $z_0 \in R$, $X \subset R$. Включение $z_0 \in F_{\omega_t}(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует квазистратегия $g(z_0,\ X,\ \omega_t,\ V^t)$.

Перейдем к доказательству леммы 1. Пусть

$$z_0 \in \bigcap_k F_{\omega_t^k}(X)$$

Тогда в силу утверждения 1 существует последовательность квазистратегий $g_k = g(z_0, X, \omega_t{}^k, V^t)$. Квазистратегию $g = g(z_0, X, \omega_t, D)$ назовем с-квазистратегией, если для любого $v^* \in D$ существует подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$ такая, что

$$z(s; 0, z_0, g_{n_k}(v^*), v^*, t) \Rightarrow z(s; 0, z_0, g(v^*), v^*, t), \quad s \in [0, t]$$

Множество с-квазистратегий непусто. В самом деле, пусть $v_0^*$ — произвольный элемент из $V^t$. Тогда в силу компактности множества движений из последовательности $z_k(s) = z(s; 0, z_0, g_k(v_0^*), v_0^*, t)$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторому движению $z(s) = z(s; 0, z_0, u_0^*, v_0^*, t)$. Отображение $g = g(z_0, X, \omega_t, v_0^*)$, областью определения которого является единственный элемент $v_0^*$, а $g(v_0^*) = u_0^*$, очевидно, есть с-квазистратегия (включение $z(t) \in X$ следует из замкнутости $X$).

На множестве с-квазистратегий введем отношение порядка $<$, полагая $g_1(z_0, X, \omega_t, D_1) < g_2(z_0, X, \omega_t, D_2)$ тогда и только тогда, когда $D_1 \subset D_2$ и для любого $v^* \in D_1$ имеет место $g_1(v^*)(s) \equiv g_2(v^*)(s)$ $0 \leqslant s \leqslant t$. Легко проверяется, что всякое линейно упорядоченное (см. [7]) множество $F$ с-квазистратегий имеет мажоранту. Мажорантой является, например, с-квазистратегия $g^*$ с областью определения $D^* = \bigcup D$ (объединение в правой части берется по всем областям определений с-квазистратегий, входящих в $F$) такая, что для любого $v^* \in D^*$ (а следовательно, $v \in D$ для некоторого $g = g(z_0, X, \omega_t, D) \in F$) выполнено $g^*(v^*) = g(v^*)$. В соответствии с леммой Цорна [7] существует во множестве с-квазистратегий максимальный элемент $g_0 = g_0(z, X, \omega_t, D_0)$. Покажем $D_0 = V^t$, что в соответствии с утверждением 1 и завершит доказательство леммы.

Предположим противное. Пусть $v_0^* \in V^t \setminus D_0$. Определим тогда отображение $g_* = g_*(z_0, X, \omega_t, D_0 \cup v_0^*)$ следующим образом: если $v^* \in D_0$, положим $g_*(v^*)(s) \equiv g_0(v^*)(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$. Функцию $g_*(v_0^*)$ определим так: через $k_0$ $(1 \leqslant k_0 \leqslant m)$ обозначим наименьшее натуральное число, для которого выполнено равенство

$$v_0(s) \equiv v_{k_0}(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_{k_0} \tag{2}$$

при некотором $v_+^* = v_{k_0}^* \in D_0$. По определению с-квазистратегии существует подпоследовательность $\{g^k = g_{n_k}\}$ такая, что

$$z(s; 0, z_0, g^k(v_+^*), v_+^*, t) \Rightarrow z(s) = z(s; 0, z_0, g_0(v_+^*), v_+^*, t) \quad s \in [0, t] \tag{3}$$

*Случай* 1. $k_0 \geqslant 2$. Тогда из последовательности

$$z_k^*(s) = z(s; 0, z_0, g^k(v_0^*), v_0^*, t)$$

в силу компактности множества движений можно выбрать подпоследовательность $z_{k_j}^*(s)$, равномерно на $[0, t]$ сходящуюся к некоторому движению $z^*(s) = z(s; 0, z_0, u_0^*, v_0^*, t)$. Поскольку на отрезке $[0, \tau_m - \tau_{k_0}]$ выполнено равенство (2), то

$$g^k(v_0^*)(s) \equiv g^k(v_+^*)(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_{k_0}$$

и, следовательно, в силу (3)

$$z_{k_j}^*(s) \Rightarrow z(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_{k_0}$$

откуда $z^*(s) \equiv z(s)$ и $u_0(s) \equiv g_0(v_+^*)(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_{k_0}$. Полагая $g_*(v_0^*)(s) \equiv u_0(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, заканчиваем построение.

*Случай* 2. $k_0 = 1$. На отрезке $[0, \tau_m - \tau_1^{n_k}]$ функции $v_+^*$ и $v_0^*$ совпадают, то

$$g^k(v_+^*)(s) \equiv g^k(v_0^*)(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_1^{n_k}$$

и, следовательно, в соответствии с (3)

$$z_k^*(s) = z(s; 0, z_0, g^k(v_0^*), v_0^*, t) \Rightarrow z(s; 0, z_0, g_0(v_+^*), v_+^*, t), \quad s \in [0, \tau_m - \tau_1]$$

Выбирая нужным образом подпоследовательность $z_{k_j}{}^*(s)$, можно считать, что

$$z_{k_j}^*(s) \Rightarrow z(s;0, z_0, u_0{}^*, v_0{}^*, t), \qquad s \in [0, t]$$

причем в силу сказанного выше $u_0(s) \equiv g_0(v_+{}^*)(s)\ 0 \leqslant s \leqslant \tau_m - \tau_1$. Полагая $g_*(v_0{}^*)(s) \equiv u_0(s)\ 0 \leqslant s \leqslant t$, заканчиваем построение.

Легко проверяется, что построенное в обоих случаях отображение $g_*$ — с-квазистратегия и $g_0 < g_*$, что противоречит максимальности $g_0$. Таким образом, $D_0 = V^t$, что и требовалось.

3. Поставим в соответствие каждому $t > 0$ оператор $F_t{}^*$: $2^R \to 2^R$ следующим образом:

$$F_t{}^*(X) = \bigcap_{\omega_t} F_{\omega_t}(X), \qquad X \subset R$$

(пересечение в правой части берется по всем разбиениям отрезка $[0, t]$). Отметим следующие свойства оператора $F_t{}^*$:

7°. Если $X$ замкнуто, то замкнуто и $F_t{}^*(X)$.

8°. Пусть $X$ замкнуто и $\{\omega_t{}^k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность разбиений отрезка $[0, t]$ таких, что $\omega_t{}^k < \omega_t^{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $|\omega_t{}^k| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда

$$F_t{}^*(X) = \bigcap_{k=1}^\infty F_{\omega_t{}^k}(X)$$

9°. Если $X$ замкнуто и $0 < \varepsilon < t$, то $F_t{}^*(X) \subset F_\varepsilon(F_{t-\varepsilon}^*(X))$. Из свойства 9 непосредственно вытекает (см. [4]).

*Теорема* 1. Пусть $z_0 \in R$, $T \in (0, +\infty)$. Тогда если

$$z_0 \in F_T{}^*(M)$$

из точки $z_0$ дифференциальная игра (1) может быть закончена за время $T$ в смысле постановки (I).

4. Отображение $g_t = g(z_0, M, t) : V^t \to U^t$, определенное на всем $V^t$, будем называть $t$-стратегией в точке $Z_0$ относительно $M$, если

а) каковы бы ни были $v_1{}^*$, $v_2{}^* \in V^t$, из равенства $v_1(s) \equiv v_2(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon \leqslant t)$ следует равенство $g(v_1{}^*)(s) \equiv g(v_2{}^*)(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon)$;

б) для любого $v^* \in V^t$ имеет место включение $z(t) = z(t;\ 0,\ z_0,\ g(v^*),\ v^*,\ t) \in M$. Отметим, что, очевидно, всякая стратегия $g = g(z_0, M, t)$ является $\omega_t$-квазистратегией в точке $z_0$ относительно $M$ для любого разбиения $\omega_t$ отрезка $[0, t]$.

*Теорема* 2. Пусть $z_0 \in R$, $T \in (0, +\infty)$. Тогда, если $z_0 \in F_T{}^*(M)$, то существует $T$-стратегия $g = g(z_0, M, T)$ такая, что для любого управления $v^* \in V^T$ имеет место включение

$$z(t;\ 0,\ z_0,\ g(v^*),\ v^*,\ T) \in F_{T-t}^*(M), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

*Следствие*. В условиях теоремы 1 из точки $z_0$ дифференциальная игра (1) может быть закончена за время $T$ в смысле постановки II.

Действительно, игроку $U$ достаточно в каждый момент времени $t$ полагать свое управление $u(t)$, равным

$$u(t) = g(v_t{}^*)(t)$$

где $g$ — $T$-стратегия, даваемая теоремой 2, $v_t(s) \equiv v(s)\ \ 0 \leqslant s \leqslant t$, $v_t(s) \equiv v(t)$, $t < s \leqslant T$.

Оказывается, имеет место утверждение, обратное теореме 2.

*Теорема* 3. Пусть $z_0 \in R$, $T \in (0, +\infty)$ и пусть существует $T$-стратегия $g = g(z_0, M, T)$. Тогда $z_0 \in F_T{}^*(M)$.

*Доказательство*. Очевино, достаточно показать, что $z_0 \in F_{\omega_T}(M)$ для любого разбиения $\omega_T$ отрезка $[0, T]$. В силу утверждения 1 последнее очевидно, поскольку, как отмечалось выше, всякая $T$-стратегия является $\omega_T$-квазистратегией.

5. Для линейных дифференциальных игр, т. е. для игр, задаваемых уравнением [5]

$$dz \,/\, dt = Cz - u + v \tag{5}$$

оператор $F_\varepsilon$ выписывается в явном виде. Непосредственным подсчетом проверяется, что

$$F_\varepsilon(X) = \bigcap_{v^* \in V^\varepsilon} \left\{ e^{-\varepsilon C} \left[ \left( X + \int_0^\varepsilon e^{rC} P dr \right) - \int_0^\varepsilon e^{rC} v(r)\, dr \right] \right\},$$

и, следовательно

$$F_t^*(X) = e^{-tC} W(t), \qquad W(t) = \int_{X,0}^{t} [e^{rC} P dr \overset{*}{-} e^{rC} Q dr] \tag{6}$$

где $W(t)$ — альтернированный интеграл работы [5].

6. Перейдем к изучению вопроса о возможности окончания линейной дифференциальной игры в смысле постановки (III). Напомним предварительно некоторые понятия [5, 8].

Пусть $A \subset R$, $B \subset R$, $\alpha$ и $\beta$ — вещественные числа. По определению, множество $\alpha A + \beta B$ состоит из тех и только тех векторов $z \in R$, которые представимы в виде $z = \alpha x + \beta y$ $(x \in A,\ y \in B)$. Геометрической разностью множеств $A$ и $B$ называется множество $D = A \overset{*}{-} B$ тех и только тех векторов $z \in R$, для которых $z + B \subset A$.

Легко проверяется следующее

*Утверждение* 2. Если $A$ и $B$ выпуклы и $B$ — компакт, то $(A + B) \overset{*}{-} B = A$.

*Следствие*. Если $A$, $B$, $C$ выпуклы, $C$ — компакт и $A + C = B + C$, то $A = B$.

Пусть $A(t)$ — непрерывно (по включению) зависящее от $t \geqslant 0$ компактное выпуклое множество. Под интегралом

$$\int_b^c A(\tau)\, d\tau, \qquad c \geqslant b \geqslant 0$$

понимается компактное [3] выпуклое множество, состоящее из тех и только тех $z \in R$, которые представимы в виде

$$z = \int_b^c a(\tau)\, d\tau$$

где $a^* = \{a(s),\ b \leqslant s \leqslant c\}$— измеримая вектор-функция, удовлетворяющая при каждом $s$ включению $a(s) \in A(s)$.

Из данного определения непосредственно вытекает, что

$$\int_b^c A(\tau)\, d\tau + \int_c^d A(\tau)\, d\tau = \int_b^d A(\tau)\, d\tau \tag{7}$$

Приведем, наконец, без доказательства следующее легко проверяемое

*Утверждение* 3. Пусть $A$ — эллипсоид полной размерности в $R$

$$A = \left\{ z : \sum_{i=1}^{n} \frac{(z^i)^2}{(a_i)^2} \leqslant 1 \right\}$$

Тогда существует такое выпуклое множество $B \subset R$, что

$$A + B = \frac{\alpha^2}{\beta} S_R$$

$$\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i, \qquad \beta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$$

где $S_R$ — единичный шар в $R$; причем, если $A = A(t)$ непрерывно (по включению) зависит от $t$, сохраняя полную размерность в $R$, то $B = B(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ также непрерывны.

7. Пусть линейная дифференциальная игра (5) описывается векторным дифференциальным уравнением (5), где $C$ — постоянная квадратная матрица порядка $n$; $P$ и $Q$ — выпуклые компакты и терминальным множеством $M$, представимым в виде $M = M_0 + W_0$, где $M_0$ — линейное подпространство пространства $R$, $W_0$ — выпуклый компакт в ортогональном дополнении $L$ к $M_0$ в $R$. Оператор проектирования из $R$ в $L$ обозначим через $\pi$, единичный шар в $L$ — через $S$. Через $L_P$ обозначим несущую $P$ плоскость (т. е. множество вида $L_P = M_P + a$, где $a \in R$, $M_P$ — линейное подпространство пространства $R$ такое, что множество $P - a$ принадлежит $M_P$ и имеет там внутренние точки). Пусть $S_0$ — единичный шар в $M_P$.

Будем предполагать, что для игры (5) выполнено следующее

*Условие* 1. Найдется такое $\lambda_0 > 0$ и такое выпуклое множество $P' \subset R$, что $P + P' = \lambda_0 S_0$.

Всюду в дальнейшем под $r$ условимся понимать произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $\Phi(r) = \pi e^{rC}\colon R \to L$ пространства $R$ в $L$.

*Условие* 2. Отображение $\Phi(r)\colon M_P \to L$, рассматриваемое как отображение из $M_P$ в $L$, есть отображение «на».

*Лемма* 2. Пусть для игры (5) выполнены условия 1, 2. Тогда существует такое непрерывно (по включению) зависящее от $r$ компактное выпуклое множество $P(r) \subset L$ и непрерывная положительная функция $\gamma(r)$, что

$$\Phi(r)\, P + P(r) = \gamma(r)\, S, \quad r > 0 \tag{8}$$

*Доказательство*. В соответствии с условием 1

$$\Phi(r)\, P + \Phi(r)\, P' = \lambda_0 \Phi(r)\, S_0$$

Из условия 2 следует, что $\lambda_0 \Phi(r)\, S_0$ есть эллипсоид полной размерности в $L$, непрерывно зависящий от $r$ и, следовательно (утверждение 3)

$$\lambda_0 \Phi(r)\, S_0 + B(r) = \gamma(r)\, S, \quad r > 0$$

где $B(r)$ и $\gamma(r)$ непрерывны. Полагая $P(r) = \Phi(r)\, P' + B(r)$, завершаем доказательство леммы.

Пусть $t \geqslant 0$. Рассмотрим множество

$$W^*(t) = \Big(W_0 + \int_0^t \Phi(r)\, P dr\Big) \overset{*}{\_} \int_0^t \Phi(r)\, Q dr$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия

*Условие* 3. Для любой $t \geqslant 0$ множество $W^*(t)$ непусто и

$$W^*(t) + \int_0^t \Phi(r)\, Q dr = W_0 + \int_0^t \Phi(r)\, P dr \tag{9}$$

*Условие* 4. Для любого $t > 0$ найдется такое $\lambda(t) > 0$, что

$$W^*(t) = [W^*(t) \overset{*}{\_}\, \lambda(t)\, S] + \lambda(t)\, S \tag{10}$$

Легко проверяется следующее

*Утверждение* 4. Пусть для дифференциальной игры (5) выполнено условие 3. Тогда

$$W(t) = \int_{M,0}^{t} (e^{rC} P dr \overset{*}{\_}\, e^{rC} Q dr) = M_0 + W^*(t)$$

Таким образом, если выполнено включение (4) или, что то же самое, включение

$$\pi e^{TC} z_0 \in W^* (T) \tag{11}$$

то в соответствии с теоремой 1 из точки $z_0$ линейная дифференциальная игра (5) может быть закончена за время $T = T(z_0)$, где $T(z_0)$ — минимум всех $T \geqslant 0$, для которых выполнено включение (11). Этот результат содержится в следующей теореме.

*Теорема* 4. Пусть для линейной дифференциальной игры (5) выполнены условия 1—4. Тогда, если выполнено включение (11), то из точки $z_0$ игра (5) может быть закончена за время $T = T(z_0)$ в смысле постановки (III).

*Доказательство*. Для каждого $t > 0$ через $\varepsilon(t)$ обозначим (существующее в силу леммы 2) наибольшее положительное число $\varepsilon \leqslant t/2$, для которого выполнено неравенство

$$\lambda(t) - \int_{t-\varepsilon}^{t} \gamma(r)\, dr \geqslant 0$$

Покажем, что для любого $t > 0$ имеет место соотношение

$$W^*(t) = \left[ W^*(t - \varepsilon(t)) \underset{-}{*} \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) Q dr \right] + \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) P dr \tag{12}$$

Действительно, из равенства (9) в соответствии со следствием из утверждения 2 имеем

$$W^*(t) + \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) Q dr = W^*(t - \varepsilon(t)) + \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) P dr$$

откуда в силу (8)

$$W^*(t) + D + \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) Q dr = W^*(t - \varepsilon(t)) + \lambda(t) S$$

$$D = \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} P(r)\, dr + \left( \lambda(t) - \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \gamma(r)\, dr \right) \cdot S$$

Поэтому на основании следствия из утверждения 2 получим, пользуясь равенством (10)

$$[W^*(t) \underset{-}{*} \lambda(t) S] + D = W^*(t - \varepsilon(t)) \underset{-}{*} \int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) Q dr$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства

$$\int_{t-\varepsilon(t)}^{t} \Phi(r) P dr$$

получим (см. выражение для $D$ и формулу (10)) искомое соотношение (12).

Положим $T_0 = T(z_0)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(T(z_0))$. Поскольку $\pi e^{T_0 C} z_0 \in W^*(T_0)$, то в соответствии с (12) найдется такое управление $u_0^* = \{u_0(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_1\}$ игрока $U$, что

$$\pi e^{T_0 C} z_0 - \int_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} u_0(T_0 - r)\, dr \in \left[ W^*(T_0 - \varepsilon_1) \underset{-}{*} \int_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} Q dr \right]$$

Поэтому, каково бы ни было управление $v^* = \{v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_1\}$ игрока $V$, для точки

$$z_1 = z(\varepsilon_1) = z(\varepsilon_1;\ 0, z_0, u_0^*, v^*, \varepsilon_1) = e^{\varepsilon_1 C} \left( z_0 - \int_0^{\varepsilon_1} e^{-sC} [u_0(s) - v(s)]\, ds \right)$$

будем иметь

$$\pi e^{(T_0-\varepsilon_1)C} z_1 = \pi e^{T_0 C} z_0 - \int\limits_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} u_0 (T_0 - r)\, dr + \int\limits_{T_0-\varepsilon_1}^{T_0} \pi e^{rC} v\, (T_0 - r)\, dr \in W^* (T_0 - \varepsilon_1)$$

и, следовательно, $T(z_1) \leqslant T_0 - \varepsilon_1$, каково бы ни было управление игрока $V$. Теорема 4 оказывается доказанной, если только заметить, что все приведенные выше рассуждения применимы к точке $z_1 = z(\varepsilon_1)$ и т. д.

Условиям теоремы 4 удовлетворяет контрольный пример Л. С. Понтрягина [9].

Автор благодарит Е. Ф. Мищенко за руководство работой.

Поступила 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной прямой частью Матем. сб., 1960, т. 51, вып. 1.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрономии, физ. и хим., 1959, № 2.
4. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
5. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
6. Гусятников П. Б. К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем, вып. 3. Киев, 1970.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966.
9. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 4.

---

УДК 531.36

## ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

**В. М. Заварыкин, Б. И. Шахтарин**

(Ленинград, Москва)

Рассматривается уравнение Льенара

$$x^{\cdot\cdot} + f(x)x^{\cdot} + g(x) = 0 \tag{1}$$

Предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

а) выполнены условия существования и единственности решения;

б) $xg(x) > 0$ для любых $x \in (a, b)$ и $x \neq 0$;

в) $x\int\limits_0^x f(x)\,dx > 0$ для любого $x \in [a, b]$ и $x \neq 0$,

причем найдутся такие $x \in (-x_m, x_m) \subset [a, b]$, для которых $f(x) > 0$.

Система, эквивалентная уравнению (1), имеет вид

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = -f(x)\,y - g(x) \tag{2}$$