УДК 531.55

ИНТЕГРАЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПО МАССЕ ЧАСТИЦ

А. П. Мачильский

(Ленинград)

Показано, что функция Гамильтона замкнутой системы тождественных по массе частиц и ее момент импульса являются суммами соответствующих интегралов движения центра инерции и $A(A-1)/2$ интегралов относительного движения, где A — число частиц.

С использованием законов сохранения независимые переменные многочастичных уравнений движения удается разделить только в частных случаях, обнаруженных Эйлером и Лагранжем [1].

Чтобы найти другие случаи, полезно описывать внутреннее движение замкнутых многочастичных систем в относительных координатах, которые для трехчастичных систем определены соотношениями [2]

$$\eta_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad \eta_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \qquad \eta_3 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \tag{1}$$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \equiv 0$$

где $\mathbf{r}_k$ — независимые радиус-векторы частиц. Тогда, если относительные переменные выбраны равноправными

$$-\eta_i = \eta_j + \eta_k, \qquad -\eta_j = \eta_i + \eta_k, \qquad -\eta_k = \eta_i + \eta_j \tag{2}$$

то допускается, что в треугольнике (1) при дифференцировании одновременно меняются только два вектора, и справедлива теорема.

Теорема. Равенства масс A, взаимодействующих частиц необходимо и достаточно, чтобы функция Гамильтона системы и ее момент импульса были суммами соответствующих интегралов движения центра инерции и $A(A-1)/2$ интегралов относительного движения.

1. Трехчастичные системы. *Доказательство.* При помощи равенств (1) и соотношения

$$M\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{3} m_k \mathbf{r}_k, \qquad M = \sum_{k=1}^{3} m_k \tag{1.1}$$

определяющего радиус-вектор центра инерции R, независимые векторы связываются с относительными координатами выражениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M}\eta_1 + \frac{m_3}{M}\eta_3, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M}\eta_1 - \frac{m_3}{M}\eta_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\eta_2 - \frac{m_3}{M}\eta_3 \tag{1.2}$$

которые при равных массах упрощаются

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + (-\eta_1 + \eta_3)/3, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + (\eta_1 - \eta_2)/3, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R} + (\eta_2 - \eta_3)/3 \tag{1.3}$$

С учетом условий равноправности (2) получаются соотношения

$$\left.\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta_j}\right|_{\eta_k} = 1 \quad (i = j \neq k), \qquad \left.\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta_j}\right|_{\eta_k} = -1 \quad (i \neq j \neq k) \tag{1.4}$$

По правилам дифференцирования сложных функций при помощи (1.4) определяются относительные градиенты и получается операторное тождество

$$\nabla_{\eta_1} = (\nabla_{\mathbf{r}_2} - \nabla_{\mathbf{r}_1})/3, \quad \nabla_{\eta_2} = (\nabla_{\mathbf{r}_3} - \nabla_{\mathbf{r}_2})/3, \quad \nabla_{\eta_3} = (\nabla_{\mathbf{r}_1} - \nabla_{\mathbf{r}_3})/3 \tag{1.5}$$
$$\nabla_{\eta_1} + \nabla_{\eta_2} + \nabla_{\eta_3} \equiv 0$$

Затем последнее применяется к сумме функций $\varphi_1(\eta_1) + \varphi_2(\eta_2) + \varphi_3(\eta_3)$, у которых существуют первые производные, и в результате находится существенное для доказательства выражение

$$\sum_{i=1}^{3} \nabla_{\eta_i} \sum_{j=1}^{3} \varphi_j(\eta_j) = (\nabla_{\eta_1}\varphi_1) + (\nabla_{\eta_2}\varphi_2)\frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1} + \ldots + (\nabla_{\eta_3}\varphi_3) = -\sum_{i=1}^{3} (\nabla_{\eta_i}\varphi_i) \equiv 0 \quad (1.6)$$

Действительно, дифференцированием по времени и умножением равенств (1.2) на соответствующие массы m_k импульсы частиц связываются с относительными импульсами $\mathbf{q}_j = \mu_j \eta_j$ (μ_j — эффективные массы [2]) и импульсом центра инерции $\mathbf{P}$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_1}{M}\mathbf{P} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{M}\mathbf{P} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{p}_3 = \frac{m_3}{M}\mathbf{P} + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \quad (1.7)$$

При помощи равенств (1) относительные импульсы выражаются через импульсы частиц и связываются тождеством

$$\mathbf{q}_1 = \frac{m_1}{M}\mathbf{p}_2 - \frac{m_2}{M}\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{m_2}{M}\mathbf{p}_3 - \frac{m_3}{M}\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{m_3}{M}\mathbf{p}_1 - \frac{m_1}{M}\mathbf{p}_3, \quad (1.8)$$
$$m_3\mathbf{q}_1 + m_1\mathbf{q}_2 + m_2\mathbf{q}_3 \equiv 0$$

Затем в симметричной форме находятся функции Гамильтона и Лагранжа с выделенным движением центра инерции

$$H = \frac{P^2}{2M} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{q_i^2}{2\mu_i} + V_i(\eta_i)\right], \qquad L = \frac{M\mathbf{R}^{\cdot 2}}{2} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mu_i \eta_i^{\cdot 2}}{2} - V_i(\eta_i)\right] \quad (1.9)$$

В случае частиц, тождественных по массе, в выражении (1.9) эффективные массы заменяются на $\mu = m / 3$, к функции Лагранжа добавляется с неизвестными множителями Лагранжа λ (λ_x, λ_y, λ_z) тождественное условие (1), и в относительных координатах получаются трехчастичные уравнения движения

$$L^* = L + \lambda(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \qquad \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{R}} \cdot L^*) = 0 \quad (1.10)$$
$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\eta_i} \cdot L) = (\nabla_{\eta_i} L) + (\lambda \cdot \nabla_{\eta_j})(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$

Затем из явного вида уравнений движения

$$\mathbf{R}^{\cdot\cdot} = 0, \qquad \mu\eta_i^{\cdot\cdot} = -\nabla_{\eta_i} V_i + \lambda \quad (1.11)$$

при помощи тождества $\eta_1^{\cdot\cdot} + \eta_2^{\cdot\cdot} + \eta_3^{\cdot\cdot} \equiv 0$ находится векторный множитель Лагранжа

$$3\lambda = \nabla_{\eta_1} V_1 + \nabla_{\eta_2} V_2 + \nabla_{\eta_3} V \quad (1.12)$$

который при движении частиц по стационарным траекториям оказывается пропорциональным равнодействующей относительных сил, равных по величине силам парных взаимодействий частиц.

У парных потенциалов существуют первые производные, поэтому при движении частиц по стационарным траекториям в силу тождества (1.6) векторный множитель Лагранжа и равнодействующая относительных сил тождественно равны нулю, что, естественно, не является дополнительным ограничением на начальные значения относительных векторов.

При $\lambda \equiv 0$ трехчастичные уравнения Ньютона расщепляются

$$\mu\eta_i^{\cdot\cdot} = -\nabla_{\eta_i} V_i \quad (1.13)$$

а связи (1) и (1.8) между относительными координатами и импульсами сохраняются, что позволяет закончить доказательство, которое несколько нетривиально только для функции Гамильтона. Действительно, если от трехчастичной функции Гамильтона (1.9) при $m_k = m$ вычислить полную производную по времени

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i,j=1}^{3} [\mathbf{q}_j^{\cdot} (\nabla_{\mathbf{q}_j} H_i) + \eta_j^{\cdot} (\nabla_{\eta_j} H_i)] = 2 \sum_{i=1}^{3} [\mathbf{q}_i^{\cdot} + \nabla_{\eta_i} V_i]\, \eta_i^{\cdot} \tag{1.14}$$

где появление двойки обусловленно зависимостью относительных координат и импульсов, то при помощи (1.13) нетрудно убедиться, что функция Гамильтона замкнутой системы из трех тождественных по массе частиц является суммой интегралов

$$H = \frac{P^2}{2M} + \sum_{j=1}^{3} H_j(\eta_j, q_j) = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j \tag{1.15}$$

где ε_0 и ε_j — постоянные.

Аналогично для частиц, тождественных по массе, показывается, что момент импульса замкнутой системы равен сумме интегралов

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}\times\mathbf{P} + \sum_{j=1}^{3} \eta_j \times \mathbf{q}_j = \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{M}_j \tag{1.16}$$

где $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_j$ — постоянные векторы.

Если массы частиц не равны, то относительные градиенты не симметрично выражаются через градиенты по независимым векторам

$$\nabla_{\eta_1} = \frac{m_1}{M}\nabla_{\mathbf{r}_2} - \frac{m_2}{M}\nabla_{\mathbf{r}_1}, \qquad \nabla_{\eta_2} = \frac{m_2}{M}\nabla_{\mathbf{r}_3} - \frac{m_2}{M}\nabla_{\mathbf{r}_2} \tag{1.17}$$

$$\nabla_{\eta_3} = \frac{m_2}{M}\nabla_{\mathbf{r}_1} - \frac{m_1}{M}\nabla_{\mathbf{r}_3}$$

а множитель Лагранжа не пропорционален равнодействующей относительных сил

$$\lambda = \frac{m_3}{M}\nabla_{\eta_1}V_1 + \frac{m_1}{M}\nabla_{\eta_2}V_2 + \frac{m_2}{M}\nabla_{\eta_3}V_3 \tag{1.18}$$

В этом случае

$$(m_1 + m_2 - m_3)\nabla_{\eta_1}V_1 + (-m_1 + m_2 + m_3)\nabla_{\eta_2}V_2 + (m_1 - m_2 + m_3)\nabla_{\eta_3}V_3 \equiv 0 \tag{1.19}$$

поэтому при движении системы частиц, различных по массе, дополнительных интегралов не обнаруживается.

С сохраняющимися моментами относительных импульсов классифицируются изменения, которым при движении может подвергаться треугольник относительных векторов (1). Если все три момента (1.16) равны нулю, то импульсы квазичастиц колинеарны соответствующим относительным векторам. Квазичастицы движутся вдоль относительных векторов, длина которых меняется со временем, а эти векторы не поворачиваются при движении друг относительно друга. Следовательно, в этом случае треугольник (1) остается подобным. Но если треугольник (1) сохраняет подобную форму, то для гравитационных потенциалов треугольник относительных сил $\eta_1^{-3}\eta_1 + \eta_2^{-3}\eta_2 + \eta_3^{-3}\eta_3 \equiv 0$ при движении должен быть равносторонним, поэтому при $\mathbf{M}_j = 0$ реализуется случай Лагранжа [1].

При не равных нулю моментах относительных импульсов равнодействующая относительных сил остается тождественно равной нулю, а треугольник относительных сил изменяется не подобно треугольнику (1). В этом случае относительные векторы поворачиваются друг относительно друга, и их длины меняются со временем, поэтому при движении треугольник (1) не остается подобным и вращается в пространстве относительно центра инерции, что, естественно, не сказывается на движении последнего.

2. Системы конечного числа тождественных по массе частиц. Для описания внутреннего движения многочастичной системы достаточно $N = C_A^2$ относительных координат $\eta_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, если эти координаты связаны по трое условиями

$$\sum_{j=s}^{s+2} \delta_j \eta_j \equiv 0 \qquad (s \leqslant N-3) \tag{2.1}$$

где $\delta_j = \pm 1$ (в зависимости от выбранных направлений относительных векторов). Действительно, тогда относительные координаты можно выбрать равноправными (2) и показать, что функция Гамильтона многочастичной системы и ее момент импульса будут суммами соответствующих интегралов

$$H = \frac{P^2}{2M} + \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{q_j^2}{2\mu} + V_j(\eta_j) \right] = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{j=1}^{N} \eta_j \times \mathbf{q}_j = M_0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{M}_j \tag{2.2}$$

в которых $M = Am$, $\mu = m/A$, A — число частиц.

Найденные дополнительные интегралы относительного движения не пересекаются с результатами теоремы Брунса [3], где утверждается, что классические интегралы — единственные независимые интегралы многочастичного движения. Действительно, в своем доказательстве Брунс основывался на уравнениях движения в независимых координатах [3]

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}_k} H, \qquad \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H \tag{2.3}$$

В рассмотренном же случае уравнений больше

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0; \quad \frac{d\eta_j}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}_j} H_j, \quad \frac{d\mathbf{q}_j}{dt} = -\nabla_{\eta_j} H_j \tag{2.4}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость центра инерции, и в этих уравнениях относительные координаты связаны условиями. Это, естественно, не позволяет, следуя Брунсу, доказать существование дополнительных законов сохранения.

Автор выражает признательность В. С. Новоселову за полезные обсуждения.

Поступила 1 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
2. Мачильский А. П. Метод решения уравнения Шредингера для многочастичных систем. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 3.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937.