Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

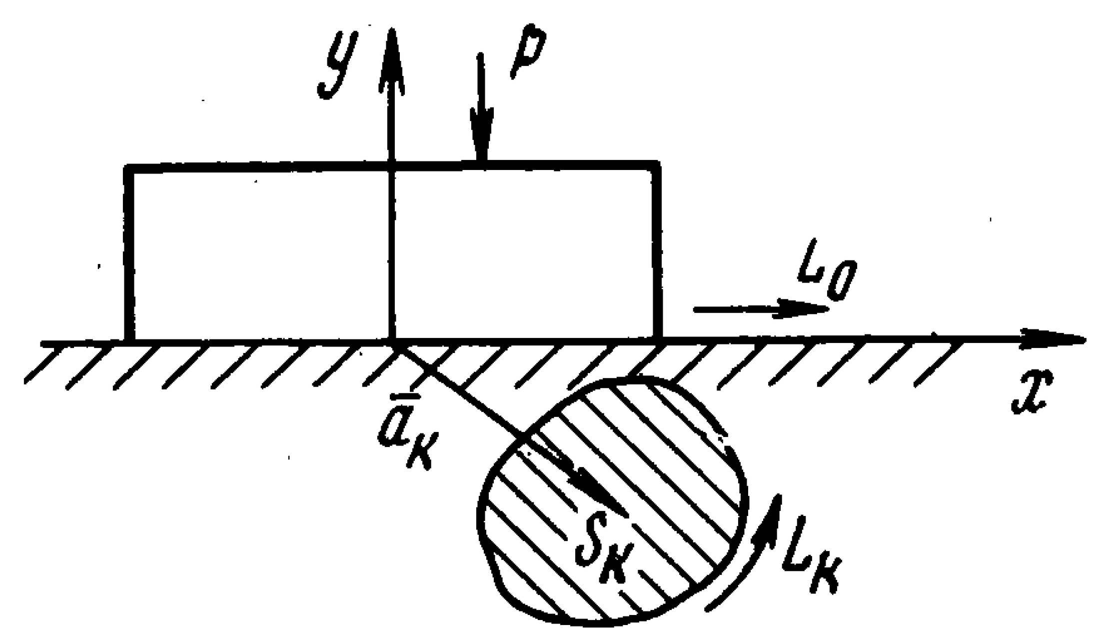
# ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА В ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**Ю. А. Амензаде**

(Баку)

Рассматривается задача о вдавливании штампа в полуплоскость с отверстиями, в которые вставлены с натягом включения из другого материала. Разбираются случаи контакта без трения и при полном сцеплении штампа с полуплоскостью. Показано, что, когда упругие постоянные полуплоскости и включений одинаковы, введенные на контурах вспомогательные функции полностью определяются величиной натяга и решение поставленной задачи получается в замкнутой форме. Если же упругие постоянные различные, то предлагаемый метод приводит к некоторым функциональным соотношениям, с помощью которых из кинематических контактных условий могут быть определены вспомогательные функции.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругую полуплоскость $S_0$ с конечным числом отверстий. Полуплоскость ограничена прямой $L_0$, отверстия — простыми гладкими кривыми $L_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, не имеющими общих точек между собой и с прямой $L_0$. Допустим также, что в эти отверстия вставлены с натягом включения $S_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ такой же формы, что и отверстия. Для простоты предполагается, что включения $S_k$ односвязные. Полуплоскость находится под действием жесткого вдавливаемого штампа. Будем считать, что прямая вне штампа свободна от сил, основание штампа плоское и штамп может перемещаться поступательно. При этом предполагается, что сила, действующая на штамп, достаточно велика, что обеспечивает касание всего штампа границы $L_0$ полуплоскости.




Фиг. 1

Пусть $2a$ — ширина штампа, $P$ — сила, с которой штамп вдавливается в полуплоскость, $\bar{a}_k$ — аффикс центра отверстия, $\bar{a}_k = d_k - ih_k$. Далее обозначим через $\varkappa_0$, $\mu_0$ и $\varkappa_k$, $\mu_k$ упругие постоянные материалов, заполняющих области $S_0$ и $S_k$ (фиг. 1).

Ниже дается метод решения, позволяющий свести эту задачу к контактной задаче для односвязной полуплоскости.

**2. Контактные задачи без учета сил трения.** Для этих задач, согласно исследованиям [1], имеем:

на $L_0$

$$\operatorname{Im}\,[t\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] = 0, \qquad (y = 0,\ |t| > a) \tag{2.1}$$

$$\operatorname{Re}\,[2\Phi_0'(t) + t\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] = 0 \qquad (y=0,\ |t|>a) \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Im}\,[\varkappa_0\Phi_0(t) - \overline{\Phi_0(t)} - t\overline{\Phi'_0(t)} - \overline{\Psi_0}(t)] = 0 \qquad (y=0,\ |t|<a) \tag{2.3}$$

$$\operatorname{Im}\,[\bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)] = 0 \qquad (y=0,\ |t|<a) \tag{2.4}$$

на $L_k$

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \varphi_k(t) + t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)} \tag{2.5}$$

$$\varkappa_0\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = C_k\,[\varkappa_k\varphi_k(t) - t\overline{\varphi_k'(t)} - \overline{\psi_k(t)}] + 2\mu_0 g_k(t) \tag{2.6}$$

Здесь $\Phi_0(z) = \varphi_0'(z)$, $\Psi_0(z) = \psi_0'(z)$, $C_k = \mu_0 / \mu_k$, $g_k(t)$ — заданная функция.

Введем в области $S_0$ новую регулярную функцию

$$G_0(z) = z\Phi_0'(z) + \Psi_0(z) \tag{2.7}$$

Учитывая (2.7), из (2.1) и (2.4) найдем

$$\operatorname{Im}\,G_0(t) = 0 \qquad (y=0,\ -\infty \leqslant t \leqslant +\infty) \tag{2.8}$$

из (2.3) с учетом (2.4) определим

$$\operatorname{Im}\,\Phi_0(t) = 0 \qquad (y=0,\ -a<t<a) \tag{2.9}$$

и из (2.2) будем иметь

$$\operatorname{Re}\,[2\Phi_0(t) + G_0(t)] = 0 \qquad (y=0,\ |t|>a) \tag{2.10}$$

Следовательно, условия (2.5) — (2.7), (2.9), (2.10) определяют поставленную задачу.

Введем на $L_k$ новые неизвестные функции [2]

$$\omega_k(t) = {}^1/_2\,[\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} - \varphi_k(t) + t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)}] \tag{2.11}$$

Тогда из (2.5), (2.11) найдем

$$\varphi_0(t) = \varphi_k(t) + \omega_k(t), \quad \psi_0(t) = \psi_k(t) - \overline{\omega_k(t)} - \bar{t}\,\omega_k'(t) \tag{2.12}$$

Если упругие постоянные полуплоскости и включений одинаковы ($\varkappa_k = \varkappa_0 = \varkappa$, $\mu_k = \mu_0 = \mu$), то функции $\omega_k(t)$ полностью определяются величиной упругого натяга и считаются известными. В этом случае, как показано в приложении, решение поставленной задачи получается в замкнутой форме. Если же упругие постоянные различные, то приведенный метод приводит к функциональному соотношению (2.26), при помощи которого из условия (2.6) должны быть определены вспомогательные функции $\omega_k(t)$.

Согласно свойствам интегралов типа Коши и теореме аналитического продолжения, вводим в односвязной области $S_0 + S_1 + \ldots + S_m$ регулярные функции

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_0(z) + J_1(z), & z \in S_0 \\ \varphi_\nu(z) + J_1(z), & z \in S_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.13}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_0(z) + J_2(z), & z \in S_0 \\ \psi_\nu(z) + J_2(z), & z \in S_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.14}$$

Здесь

$$J_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\omega_k(t)}{t-z}\, dt$$

$$J_2(z) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\overline{\omega_k(t)} + \bar{t}\omega_k'(t)}{t-z}\, dt \qquad (2.15)$$

Продифференцируем равенства (2.13), (2.14), введя обозначения $\varphi'(z) = \Phi(z)$ и $\psi'(z) = \Psi(z)$, и преобразуем (2.8) — (2.10) к виду

$$\operatorname{Im} G(t) = \operatorname{Im}[tJ''(t) + J_2'(t)] \quad (y = 0,\ |t| \leqslant \infty) \qquad (2.16)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(t) = \operatorname{Im} J_1'(t) \quad (y = 0,\ |t| < a) \qquad (2.17)$$

$$\operatorname{Re}[2\Phi(t) + G(t)] = \operatorname{Re}[2J_1'(t) + tJ_1''(t) + J_2'(t)] \quad (y = 0,\ |t| > a) \qquad (2.18)$$

Здесь $G(z) = z\Phi'(z) + \Psi(z)$ — функция, регулярная в односвязной области $S_0 + S_1 + \ldots + S_m$.

Примем, что в окрестности точки $z = \infty$ $\Phi(z) = O(1/z)$, $\Psi(z) = O(1/z)$; тогда и $G(z) = O(1/z)$.

Условию (2.18) придадим вид

$$G^-(t) - \overline{G^+(t)} = f_1^-(t) - \overline{f_1^+(t)} \quad (y = 0,\ |t| \leqslant \infty) \qquad (2.19)$$

$$f_1(z) = zJ_1''(z) + J_2'(z)$$

На основании (2.15) в окрестности точки $z = \infty$ получим $f_1(z) = O(1/z^2)$, поэтому $G(z) = -\bar{f}_1(z)$. Отсюда следует, что условия (2.17) и (2.18) можно записать в виде

$$\Phi^-(t) - \overline{\Phi^-(t)} = f_1^-(t) - \bar{f}_1^-(t) \quad (y = 0,\ |t| < a) \qquad (2.20)$$

$$\Phi^-(t) + \overline{\Phi^-(t)} = f_1^-(t) + \overline{f_1^-}(t) + f_2^-(t) + \overline{f_2^-}(t) \quad (y = 0,\ |t| > a) \qquad (2.21)$$

где $f_2(z) = J_1'(z)$.

Возьмем регулярную функцию

$$F(z) = \begin{cases} \Phi(z) + \bar{f}_2(z), & \operatorname{Im} z < 0 \\ \overline{\Phi(z)} + f_2(z), & \operatorname{Im} z > 0 \end{cases} \qquad (2.22)$$

Тогда из (2.20) и (2.21) имеем

$$F^+(t) - F^-(t) = 0 \quad (y = 0,\ |t| < a) \qquad (2.23)$$

$$F^+(t) - bF^-(t) = f(t) \quad (y = 0,\ |t| > a) \qquad (2.24)$$

Здесь

$$b = -1,\ f(t) = 2[f_2^-(t) + \overline{f_2^-}(t)] + f_1^-(t) + \overline{f_1^-}(t) \qquad (2.25)$$

Из (2.23) заключаем, что функция $F(z)$ регулярна на разрезанной вдоль $L$ $((a, \infty), (-\infty, -a))$ плоскости $z$. Такая функция должна быть определена из задачи Римана (2.24) с индексом $b = -1$. Решение этой задачи, равное нулю на бесконечности, имеет вид [1]

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\sqrt{t^2 - a^2}^{(+)}}{t - z}\, dt + \frac{C_0}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \qquad C_0 = -\frac{iP}{2\pi} \qquad (2.26)$$

Как уже отмечено выше, формула (2.26) позволяет получить окончательное решение задачи только в случае одинаковых упругих постоянных полуплоскости и включений.

**3. Контактные задачи в случае полного сцепления под штампом.** В этом случае на $L_0$ имеют место условия [1]

$$\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t) = 0 \qquad (y=0,\ |t|>a) \tag{3.1}$$
$$\Phi_0^+(t) + \varkappa\Phi_0^-(t) = 0 \qquad (y=0,\ |t|<a)$$

Здесь в верхней полуплоскости $\bar{S}_0$ функция $\Phi_0(z)$ определяется так:

$$\Phi_0(z) = -\overline{\Phi}_0(z) - z\overline{\Phi}_0'(z) - \overline{\Psi}_0(z),\quad z\in\bar{S}_0$$

Используя ранее введенные обозначения, условиям (3.1) придадим вид

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t) \qquad (y=0,\ |t|>a) \tag{3.2}$$
$$\Phi^+(t) + \varkappa\Phi^-(t) = f(t) \qquad (y=0,\ |t|<a)$$

где функция $\Phi(z)$ в верхней полуплоскости $\bar{S}_0$ и функция $f(t)$ определяются так:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z), \qquad z\in\bar{S}_0$$
$$f(t) = -f_2^-(t) - \overline{f_2^+}(t) - \overline{f_1^-}(t) \qquad (y=0,\ |t|>a)$$
$$f(t) = \varkappa f_2^-(t) - \overline{f_2^+}(t) - \overline{f_1^-}(t) \qquad (y=0,\ |t|<a)$$

Задача (3.2) представляет собой задачу Римана с разрывным коэффициентом. Частное решение соответствующей однородной задачи имеет вид

$$X_0(z) = (z+a)^{-\gamma}(z-a)^{\gamma-1},\quad \gamma = {}^1/_2 + \ln\varkappa / 2\pi i$$

Для функции $X_0(z)$ выбрана ветвь, для которой $\lim zX_0(z) = 1$ при $z\to\infty$. Решение неоднородной задачи (2.2) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{X_0^+(t)}\frac{dt}{t-z} + C_0X_0(z) \tag{3.3}$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная функция в разрезанной вдоль отрезка $(-a,\ a)$ расширенной плоскости $z$ и равна нулю на бесконечности, $C_0 = iP / 2\pi$.

Тогда под штампом $(|x|<a)$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi^-(t) - \Phi^+(t) - f_2^-(t) - \bar{f}_2^+(t) - \bar{f}_1^+(t) \tag{3.4}$$

Как и в п. 2, формула (3.3) может быть непосредственно применена только в случае одинаковых упругих постоянных.

4. *Приложение.* 4.1. Пусть в полуплоскость вставлены с одинаковым натягом $\delta$ области $S_\nu$ в виде кругов одинакового радиуса $r$, аффиксы центров которых $\bar{a}_\nu = [\nu - {}^1/_2(m+1)]\,d - ih$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ Допустим также, что $\mu_0 = \mu_\nu = \mu$, $\varkappa_0 = \varkappa_\nu = \varkappa$, штамп может перемещаться лишь вертикально, под ним отсутствует трение. Тогда

$$2\mu g_\nu(t) = 2K(t - \bar{a}_\nu), \qquad K = \mu\delta / r$$

Для этой задачи

$$\omega_k(t) = \varphi_0(t) - \varphi_k(t) = 2K(1+\varkappa)^{-1}(t - \bar{a}_k)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, ~~опре~~деляемые формулами (2.13), (2.14), таковы:

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi_0(z), & z\in S_0\\ \varphi_\nu(z)+\dfrac{2K}{1+\varkappa}(z-\bar a_\nu), & z\in S_\nu\end{cases}$$

$$\psi(z)=\begin{cases}\psi_0(z)+\dfrac{2K}{1+\varkappa}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{2r^2}{z-\bar a_k}, & z\in S_0\\ \psi_\nu(z)+\dfrac{2K}{1+\varkappa}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{2r^2}{z-\bar a_k}-a_\nu\right), \quad k\neq\nu, & z\in S_\nu\end{cases}$$

Таким образом, в области $S_0$ имеем

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+J_1'(z),\qquad \Psi(z)=\Psi_0(z)+J_2'(z) \tag{4.1}$$

$$J_1'(z)=f_2(z)=0,\qquad J_2'(z)=f_1(z)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\frac{1}{(z-\bar a_k)^2} \tag{4.2}$$

Из (2.25) и (4.2) найдем

$$f(t)=-\frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{(t-\bar a_k)^2}+\frac{1}{(t-a_k)^2}\right) \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в (2.26), тогда

$$F(z)=\left(-\frac{4Kr^2}{1+\varkappa}J(z)+C_0\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

$$J(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_L\sqrt{t^2-a^2}\left(\frac{1}{(t-\bar a_k)^2}+\frac{1}{(t-a_k)^2}\right)\frac{dt}{t-z}$$

В силу теоремы о вычетах окончательно найдем

$$\Phi_0(z)=-\frac{2Kr^2}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{(z-\bar a_k)^2}+\frac{1}{(z-a_k)^2}+\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{a^2-\bar a_k z}{\sqrt{\bar a_k^2-a^2}\,(\bar a_k-z)^2}+\frac{a^2-a_k z}{\sqrt{a_k^2-a^2}\,(a_k-z)^2}\right]\right\}+\frac{C_0}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

$$\Psi_0(z)=-z\Phi_0'(z)+\frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{(z-\bar a_k)^2}+\frac{1}{(z-a_k)^2}\right]$$

Напряжение под штампом ($|x|<a$) будет

$$\sigma_y=-\frac{2Kr^2}{1+\varkappa}\frac{2}{ai\sqrt{1-(x/a)^2}}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{a^2-a_k x}{\sqrt{\bar a_k^2-a^2}\,(\bar a_k-x)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2-a_k x}{\sqrt{a_k^2-a^2}\,(a_k-x)^2}\right]-\frac{P}{\pi a}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

Учитывая, что $\sqrt{\bar a_k^2-a^2}=-\overline{\sqrt{a_k^2-a^2}}$, получим

$$\sigma_y=-\frac{8Kr^2}{1+\varkappa}\frac{1}{a\sqrt{1-(x/a)^2}}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Im}\frac{a^2-a_k x}{\sqrt{a_k^2-a^2}\,(a_k-x)^2}-\frac{P}{\pi a}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \tag{4.4}$$

Рассмотрим случай одного включения ($\bar a_1=d-ih$), тогда

$$\sigma_y=\left(\frac{8K}{1+\varkappa}\frac{h}{a}\left(\frac{r}{h}\right)^2B-\frac{P}{\pi a}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \tag{4.5}$$

Здесь

$$B = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,[(\alpha - q\beta)^2 + 1]^{-2}\left(B_1 \sin\frac{\varphi}{2} + B_2 \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$B_1 = (\beta^2 - \alpha\beta q)\,[(\alpha - \beta q)^2 - 1] - 2\,(\alpha - \beta q)\,\beta q$$

$$B_2 = \beta q\,[(\alpha - \beta q)^2 - 1] + 2\,(\alpha - \beta q)\,(\beta^2 - \alpha\beta q)$$

$$\rho = [(\alpha^2 - \beta^2 - 1)^2 + 4\alpha^2]^{1/2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2 - 1}$$

$$d / h = \alpha, \qquad a / h = \beta, \qquad x / a = q$$

Для обеспечения поступательного движения штампа расстояние $x_c$ линии действия силы $P$ от оси штампа $y$ должно быть определено из условия статики

$$x_c = -\frac{1}{P}\int_{-a}^{a} \sigma_y x\,dx \tag{4.6}$$

или

$$x_c = D\int_{-1}^{1} \frac{1}{[(q - q_1)(q - \bar{q}_1)]^2\sqrt{1 - q^2}}\Big(\{(\beta^2 - \alpha\beta q)\,[(\alpha - \beta q)^2 - 1] - 2\beta q \times$$

$$\times (\alpha - \beta q)\}\sin\frac{\varphi}{2} + \{\beta q\,[(\alpha - \beta q)^2 - 1] + 2\,(\alpha - \beta q)\,(\beta^2 - \alpha\beta q)\}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\,q\,dq$$

где

$$D = -\frac{8}{1 + \varkappa}\,\frac{ka^2}{p}\,\frac{1}{\beta^5}\left(\frac{r}{h}\right)^2[(\alpha - \beta - 1)^2 + 4\alpha^2]^{-1/2}$$

Точки $q_1 = \alpha / \beta + i\,1 / \beta$ и $\bar{q}_1 = \alpha/\beta - i\,1 / \beta$ являются двукратными полюсами подынтегральной функции.

Для достаточно больших $|\,z\,| = R$ имеем

$$\sqrt{1 - z^2} = -i\,\mathrm{Re}^{i\theta}, \qquad \sqrt{1 - \bar{z}^2} = i\,\mathrm{Re}^{-i\theta} \tag{4.7}$$

На основании теоремы о вычетах из (4.6) с учетом (4.5) и (4.7) получим

$$x_c = \frac{8a^2K\pi}{(1 + \varkappa)\,\rho}\left(\frac{r}{h}\right)^2\frac{1}{P}\left\{\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \alpha\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{\rho}}\left[D_1 \sin\varphi + \right.\right.$$

$$\left. + D_2\cos^2\frac{\varphi}{2} - D_3\sin^2\frac{\varphi}{2}\right] - \frac{1}{4\rho^{3/2}}\left[\left(D_4 \sin\frac{\varphi}{2} + D_5\cos\frac{\varphi}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(6\alpha\cos\frac{3\varphi}{2} + 2A_7\sin\frac{3\varphi}{2}\right) - \left(D_6\sin\frac{\varphi}{2} + D_7\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(2A_7\cos\frac{3\varphi}{2} - 6\alpha\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\right]\right\}$$

В этой формуле постоянные

$$D_1 = \beta^2 A_1 - 2A_2A_9 + 3A_1A_3 - 4A_8$$

$$D_2 = 4\alpha\,(\beta^2 - A_2 + 2A_4), \qquad D_3 = 4\alpha\,(A_2 - 3A_3 + 2A_5)$$

$$D_4 = \alpha\,(\beta^2 A_1 - A_1A_2 + A_3A_4 - A_6)$$

$$D_5 = 2\alpha^2\beta^2 - A_1A_2 + A_6, \qquad D_6 = \beta^2 A_1 - 2\alpha^2 A_2 + A_3A_5 - 4\alpha^2 A_1$$

$$D_7 = 2\alpha\,(\beta^2 + 2A_1 - A_2)$$

$$A_1 = \alpha^2 - 1, \qquad A_2 = 2\beta^2 + \alpha^2 + 1, \qquad A_3 = \beta^2 + 2\alpha^2 + 2$$

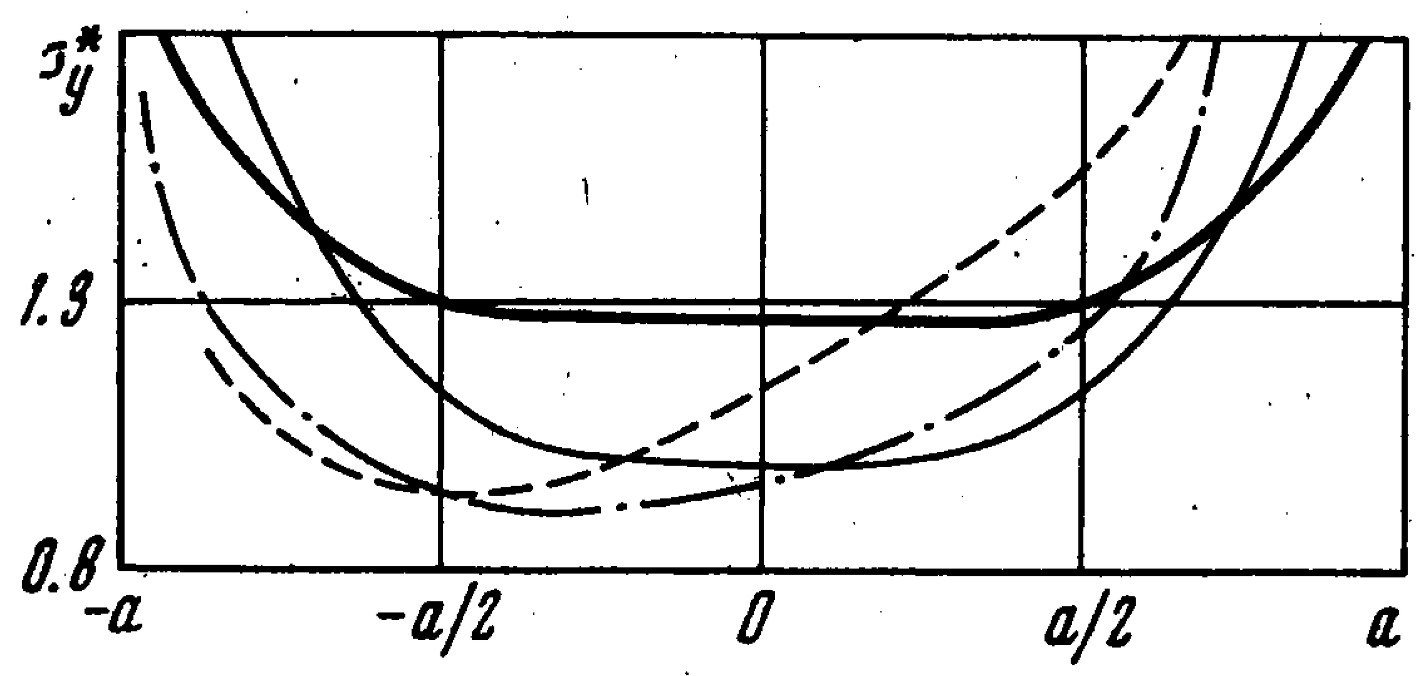
$$A_4 = \alpha^2 - 3, \qquad A_5 = 3\alpha^2 - 1, \qquad A_6 = \alpha^4 - 6\alpha^2 + 1$$

$$A_7 = \beta^2 - \alpha^2 + 2, \qquad A_8 = \alpha^4 + 1, \qquad A_9 = \alpha^2 + 1$$

Расстояние линий действия силы $P$ от оси $y$ при $d / h = 1$, $a / h = 1/3$ равно $x_c = 0.1701a$.

Произведен расчет давлений под штампом при $P / \pi a = 8K\,(1 + \varkappa)^{-1}\,(r / h)^2$ для случаев $d = 0$, $a / h = 1/3$; $d / h = 1/3$, $a / h = 1/3$; $d = h$, $a / h = 1/3$ и на фиг. 2

сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линиями соответственно показаны эпюры $\sigma_y^* = {}^1/_3\,(1+\varkappa)\,K^{-1}\,(h\,/\,r)^2\,\sigma_y$. Жирной сплошной линией показана эпюра, когда включение с натягом отсутствует.




Фиг. 2

4.2. Решим задачу 1, когда под штампом имеет место полное сцепление. В этом случае

$$f(t) = -\bar f_1(t) = \frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(z-a_k)^2}$$

$$\Phi(z) = \left(\frac{4Kr^2}{1+\varkappa}J(z) + \frac{i}{2\pi}P\right)X_0(z)$$

$$J(z) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{X_0^+(t)\,(t-a_k)^2\,(t-z)}$$

На основании теоремы о вычетах имеем

$$J(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\,\frac{1}{X_0^+(t)\,(t-z)}\right]_{t=a_k} = J_*(z), & y<0 \\ \displaystyle\frac{1}{X_0(z)}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(z-a_k)^2} + J_*(z), & y>0 \end{cases}$$

$$J_*(z) = \sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\gamma\left(\frac{a_k+a}{a_k-a}\right)^{\gamma-1} + (1-\gamma)\left(\frac{a_k+a}{a_k-a}\right)^{\gamma}\right]\frac{1}{a_k-z} - \left(\frac{a_k+a}{a_k-a}\right)^{\gamma}\frac{a_k-a}{(a_k-z)^2}\right\}$$

Учитывая, что $f_2(t) = 0$, на основании формулы (2.4) имеем под штампом

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi^-(t) - \Phi^+(t) + \frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(x-a_k)^2}$$

Отсюда

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{4Kr^2}{1+\varkappa}\left\{J^-(x)\,X_0^-(x) - J^+(x)\,X_0^+(x) + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(x-a_k)^2}\right\} +$$
$$+\frac{i}{2\pi}P\,\{X_0^-(x) - X_0^+(x)\}$$

Учитывая, что вдоль отрезка $(-a, a)$ $X^+(x) = -\varkappa X^-(x)$, имеем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -\frac{4Kr^2}{\varkappa}J_*(x)\,X_0^+(x) - \frac{iP}{2\pi}\,\frac{\varkappa+1}{x}\,X_0^+(x)$$

Отсюда для случая одного включения ($\bar a_1 = d - ih$) вытекают формулы для компонентов напряжений

$$\sigma_y = -\frac{4K}{\sqrt{\varkappa}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{e^{\theta(\varphi_2-\varphi_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\,\frac{\rho_3\cos\alpha_1 - \rho_1\rho_2\left((\gamma-q)^2+\beta_1^2\right)^{-1/2}\cos\alpha_4}{\sqrt{(1-q^2)\left((\gamma-q)^2+\beta_1^2\right)}} -$$
$$-\frac{1+\varkappa}{2\pi\sqrt{\varkappa}}\,\frac{P}{a}\,\frac{\cos\left[Q\ln\left((1+q)/(1-q)\right)\right]}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{4K}{\varkappa}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{e^{\theta(\varphi_2-\varphi_1)}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \frac{\rho_3 \sin\alpha_1 - \rho_1\rho_2\left((\gamma_1-q)^2+\beta_1^2\right)^{-1/2}\sin\alpha_2}{\sqrt{(1-q^2)\left((\gamma_1-q)^2+\beta_1^2\right)}} +$$

$$+\frac{1+\varkappa}{2\pi\sqrt{\varkappa}}\frac{P}{a}\frac{\sin\left[Q\ln(1+q)/(1-q)\right]}{\sqrt{1-q^2}}$$

Здесь

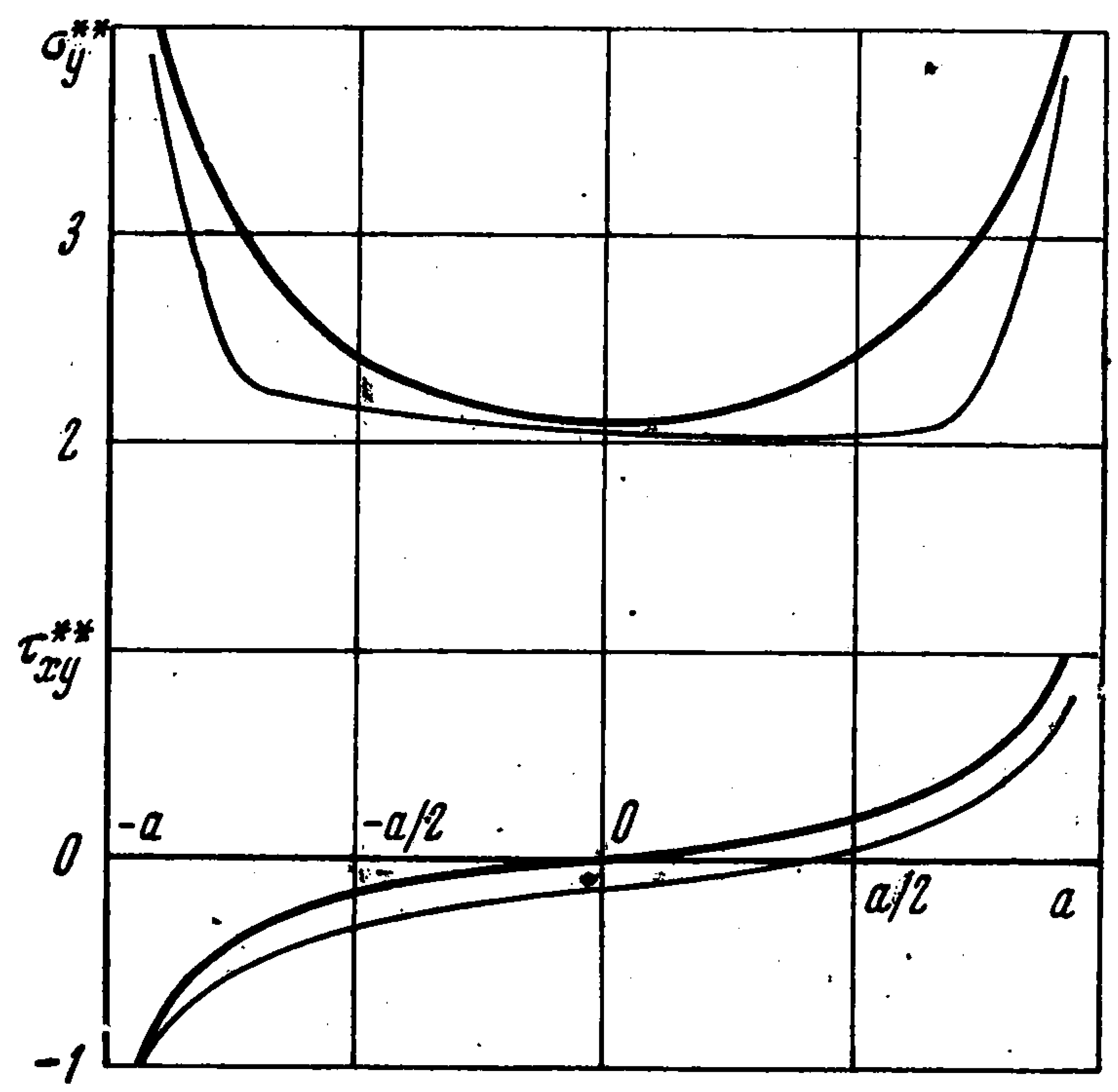
$$h/a = \beta_1, \quad d/a=\gamma_1, \quad x/a = q, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \beta/(\gamma_1-1), \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \beta/(\gamma_1+1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = (2Q+\beta)/\gamma_1, \quad \operatorname{tg}\theta = \beta/(\gamma_1 - q) \quad \rho_1 = \sqrt{(\gamma_1-1)^2+\beta^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(\gamma_1+1)^2+\beta_1^2}, \quad \rho_3 = \sqrt{(2Q+\beta_1)^2+\gamma_1^2}, \quad Q = \ln\varkappa/2\pi$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) + Q\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \theta - \varphi_3 - Q\ln\frac{1+q}{1-q} + \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2 = Q\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} - Q\ln\frac{1+q}{1-q} + 2\theta - \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2) + \frac{\pi}{2}$$




Фиг. 3

*Примечание.* При выводе формул для $\sigma_y$ и $\tau_{xy}$ из условия $zX_0(z) \to 1$ при $z\to\infty$ найдено, что в функции

$$X_0(z) = (z+a)^{-\gamma}(z-a)^{\gamma-1} = \frac{1}{z-a}e^{\gamma\ln u} \quad \left(u = \frac{z-a}{z+a}\right)$$

аргумент $\ln u$ равен $\arg u$.

Произведен расчет давлений и касательных напряжений под штампом при $P/2\pi a = 4(K/\sqrt{\varkappa})(r/a)^2$ для случаев $(\beta_1 = 3, \gamma_1 = 0)$, $(\beta_1 = 3, \gamma_1 = 3)$ и на фиг. 3 тонкими и жирными линиями соответственно показаны эпюры $\sigma_y^{**} = {}^1/_8\sqrt{\varkappa}K^{-1}\times\times(h/r)^2\sigma_y$, $\tau_{xy}^{**} = {}^1/_8\sqrt{\varkappa}K^{-1}(h/r)^2\tau_y$.

Поступила 8 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1966.
2. Sherman D. Y. On the problem of plane strain in non-homogeneus media. (Proceedings of an J.U.T.A.M. simposium held in Warsaw, 1958) Pergamon Press, London, New York—Paris — Los Angeles.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.