

## НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Л. В. Петухов, В. А. Троицкий

(Ленинград)

Приводятся постановки ряда задач оптимизации теории продольных колебаний прямолинейных стержней постоянного сечения. Описаны результаты их решений, полученные с помощью построенного в работе [1] необходимого условия стационарности функционала и установленного ниже необходимого условия Вейерштрасса сильного минимума функционала.

Особое внимание уделяется задачам оптимизации, в которых имеются разрывы непрерывности лагранжевых множителей на характеристических линиях уравнений гиперболического типа, которыми описываются продольные колебания.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим определенное в области  $\Omega$  ( $0 \leq x \leq T$ ,  $0 \leq y \leq l$ ) следующее уравнение в частных производных второго порядка:

$$z_{xx} - w^2 z_{yy} = u_1(x, y) \quad (1.1)$$

Если оно описывает продольные колебания стержня, то  $z = z(x, y)$  — продольное смещение сечений стержня, а  $u_1(x, y)$  — интенсивность распределенной по длине стержня продольной нагрузки. Будем считать нагрузку ограниченной неравенством

$$|u_1(x, y)| \leq F \quad (1.2)$$

Пусть заданы начальные и граничные условия

$$z(0, y) = z_x(0, y) = 0 \quad (1.3)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(x, l) = 0 \quad (1.4)$$

Сформулируем следующую задачу оптимизации.

Среди непрерывных функций  $z(x, y)$  и среди кусочно-непрерывных возмущающих сил  $u_1(x, y)$ , удовлетворяющих в области  $\Omega$  уравнению (1.1) и неравенству (1.2), а на границах этой области — условиям (1.3) и (1.4), найти такие, которые сообщают минимум функционалу

$$I = \int_0^l \varphi(z(T, y), z_x(T, y)) dy \quad (1.5)$$

Различные выборы подынтегральной функции  $\varphi$  в интеграле (1.5) приводят к различным задачам. Так, при  $\varphi = z_x(T, y)$  получится задача о минимуме среднего по длине стержня значения скорости сечений в конечный момент времени  $x = T$ , а при  $\varphi = -z(T, y)$  — задача о накоплении

возмущений для продольных колебаний стержня. Другие примеры функционалов будут приведены ниже.

Особенность описанных задач, связанную с наличием неравенства (1.2), можно обойти, если ввести дополнительную вещественную переменную  $u_2 = u_2(x, y)$  и построить вспомогательную зависимость

$$\psi = \psi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - F^2 = 0 \quad (1.6)$$

Тогда сформулированную задачу можно будет считать частным случаем следующей задачи оптимизации для систем, описываемых уравнениями второго порядка гиперболического типа.

Среди непрерывных функций  $z(x, y)$  и кусочно-непрерывных управлений  $u_1(x, y), \dots, u_m(x, y)$ , удовлетворяющих в области  $\Omega$  ( $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ) дифференциальному уравнению и соотношениям

$$L(z) = a_{11}z_{xx} + a_{22}z_{yy} + a_1z_x + a_2z_y = f(x, y, z, u) \quad (1.7)$$

$$\psi_k(x, y, u) = 0 \quad (k = 1, \dots, r < m) \quad (1.8)$$

и на границе области  $\Omega$  — условиям

$$z(a, y) = \varphi_1(y), \quad z_x(a, y) = \varphi_2(y) \quad (1.9)$$

$$\varphi_c(x, z, z_y) = 0 \quad \text{при } y = c \quad (1.10)$$

$$\varphi_d(x, z, z_y) = 0 \quad \text{при } y = d$$

найти такие, которые сообщают минимум функционалу

$$I = \iint_{\Omega} f_0(x, y, z, u) dx dy + \int_c^d \varphi_b(y, z, z_x) dy + \chi(z^\circ(b, y)) \quad (1.11)$$

Здесь под  $u = (u_1, \dots, u_m)$  понимается  $m$ -мерный вектор управлений; коэффициенты  $a_1(x, y)$ ,  $a_2(x, y)$ ,  $a_{11}(x, y)$ ,  $a_{22}(x, y)$  и функции  $f_0, f, \psi_k, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_c, \varphi_d, \chi$  считаются непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по их аргументам до третьего порядка включительно, через  $z^\circ(b, y)$  обозначен  $p$ -мерный вектор  $z^\circ(b, y) = (z(b, y_1^\circ), \dots, z(b, y_p^\circ))$ , где  $y_k^\circ$  — заданные числа и  $y_1^\circ = c, y_p^\circ = d$ , функция  $\varphi_b$  кусочно-непрерывна, причем на каждом участке непрерывности она имеет непрерывные частные производные по аргументам до третьего порядка включительно.

Такая задача изучалась в работе [1], где было установлено необходимое условие стационарности функционала  $I$ . При решении оптимальных задач будет использовано еще и получаемое ниже условие Вейерштрасса сильного минимума функционала.

**2. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала.** Функции  $z = z(x, y)$  определяют поверхность в пространстве  $x, y, z$ . Рассмотрим нормальную поверхность  $E$ , сообщающую минимум функционалу  $I$ . Нормальной поверхностью  $E$ , как и в случае одной независимой переменной [2], будем считать такую поверхность, для которой существует единственная система лагранжевых множителей. Выберем в области  $\Omega$

произвольный отрезок  $M_1M_2$  прямой  $x = x^\circ = \text{const}$  и отрезок  $M_3M_4$  прямой  $x = x^\circ + e = \text{const}$ , где  $e$  — параметр, так, чтобы прямоугольник  $M_1M_2M_3M_4$ , образованный этими отрезками, целиком лежал в какой-либо элементарной области  $\omega_i$  (фиг. 1). Проведем через точки  $M_1M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$  характеристики  $C_1, C_{1e}, C_2, C_{2e}$  уравнения (1.7). Полученные области обозначим через  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  и  $\Omega_5$ . Будем считать для определенности, что характеристика  $C_2$  пересекает участок границы  $y = c$  области  $\Omega$ , а характеристика  $C_1$  — участок границы  $x = b$ .

Построим три допустимых однопараметрических семейства поверхностей

$$z(x, y), u_k(x, y) \quad (k = 1, \dots, m),$$

$$x, y \in \Omega_1 + \Omega_3 + \Omega_5$$

$$Z(x, y), U_k(x, y) \quad (k = 1, \dots, m), \quad x, y \in \Omega_4 \quad (2.1)$$

$$z(x, y, e), u_k(x, y) \quad (k = 1, \dots, m), \quad x, y \in \Omega_2 \quad |e| \leq \varepsilon$$

включающих в себя  $E$  при  $e = 0$ . Первое и третье семейства (2.1) удовлетворяют уравнениям (1.7) и (1.8), а второе строится с помощью уравнений

$$L(Z) = f(x, y, Z, U), \quad \psi_k(x, y, U) = 0 \quad (k = 1, \dots, r) \quad (2.2)$$

На границах области выполняются условия

$$z(x^\circ, y) = Z(x^\circ, y), \quad z_x(x^\circ, y) = Z_x(x^\circ, y), \quad y \in [M_1, M_2]$$

$$Z(x^\circ + e, y) = z(x^\circ + e, y, e), \quad y \in [M_3, M_4] \quad (2.3)$$

$$Z_x(x^\circ + e, y) = z_x(x^\circ + e, y, e)$$

На характеристиках  $C_1, C_2, C_{1e}, C_{2e}$  функция  $z(x, y)$  и ее производная по нормали непрерывны, так как  $z(x, y)$  непрерывна во всей области  $\Omega$ , а  $z_N(x, y)$  — потому, что  $M_1, M_2, M_3, M_4$  лежат внутри элементарной области  $\omega_i$  и характеристики  $C_1, C_2, C_{1e}$  в  $C_{2e}$  не являются границами элементарных областей.

Вариации семейства (2.1) по параметру  $e$  на поверхности  $E$  определяются выражениями

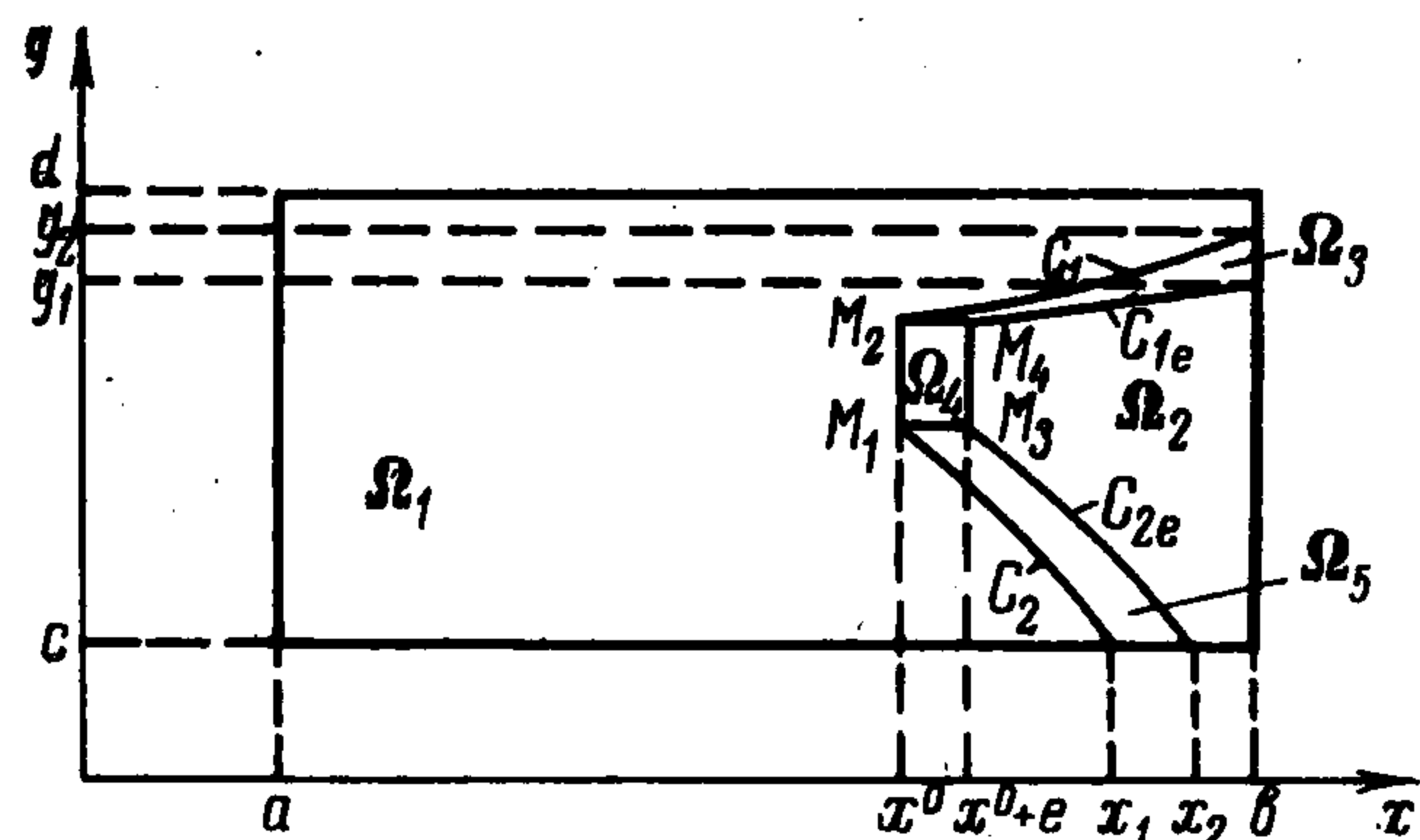
$$\xi = (\partial z / \partial e)_{e=0} = 0, \quad x, y \in \Omega_1 + \Omega_3 + \Omega_5$$

$$Z_x(x^\circ, y) = z_x(x^\circ, y, 0) + \xi$$

$$Z_{xx}(x^\circ, y) = z_{xx}(x^\circ, y, 0) + \xi_x, \quad y \in [M_3, M_4] \quad (2.4)$$

$$\zeta_k(x, y) = (\partial u_k / \partial e)_{e=0} = 0, \quad x, y \in \Omega$$

На основании равенств (2.3) будем иметь  $\xi = 0$  при  $y \in [M_3, M_4]$ . На характеристиках  $C_{1e}$  и  $C_{2e}$  эта вариация также равна нулю, так что  $\xi = 0$ .



Фиг. 1

После подстановки функций (2.1) в функционал  $I$  и дифференцировании его по  $e$  при  $e = 0$  получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI}{de}\right)_{e=0} = & \int_{M_3}^{M_4} [L_2(Z, U) - L_2(z, u)] dy + \int_{S_2} \{ [a_{11}\lambda\xi + a_{111}\lambda\xi_x + (a_{111}\lambda)_x \xi] n_1 + \\ & + [a_2\lambda\xi + a_{22}\lambda\xi_y - (a_{22}\lambda)_y \xi] n_2 \} ds + \int_{x_2}^b \eta_c \left( \frac{\partial\varphi_c}{\partial z} \xi + \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y} \xi_y \right) dx + \\ & + \int_c^{y_1} \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial z} \xi + \frac{\partial\varphi_b}{\partial z_x} \xi_x \right) dy + \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial\chi}{\partial z_\gamma} \xi(b, y_\gamma^0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где обозначено

$$L_2 = f_0 + \lambda [L(z) - f] + \sum_{k=1}^r \mu_k \psi_k \quad (2.6)$$

и при вычислении (2.5) использована непрерывность этой функции при переходе через характеристики  $C_1$  и  $C_2$ . Учтены также соотношения  $\varphi_c^- = \varphi_c^+$ ,  $\varphi_b^- = \varphi_b^+$  и уравнение Эйлера. Через  $S_2$  обозначена граница области  $\Omega_2$ .

В выражении (2.5) перейдем от переменных  $x, y$  к новым переменным  $N$  и  $s$ , подробно описанным в работе [1], где приведены также используемые ниже формулы и обозначения.

После такого перехода имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI}{de}\right)_{e=0} = & \int_{M_1}^{M_2} [L_2(Z, U) - L_2(z, u)] dy + \oint_{S_2} \{ A_1\lambda\xi_N - A_2\lambda\xi_s + \\ & + [a_1\lambda n_1 + a_2\lambda n_2 - (A_1\lambda)_N - (A_2\lambda)_s - (A_1 - A_2) \frac{1}{\rho} \lambda] \xi \} ds + \\ & + \int_{x_1}^b \eta_c \left( \frac{\partial\varphi_c}{\partial z} \xi + \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y} \xi_y \right) dx + \int_c^{y_2} \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial z} \xi + \frac{\partial\varphi_b}{\partial z_x} \xi_x \right) dy + \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial\chi}{\partial z_\gamma} \xi(b, y_\gamma^0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Контур  $S_2$  состоит из отрезка  $M_1M_2$  двух характеристик  $C_1$  и  $C_2$  и отрезков внешней границы  $[c, y_2]$  и  $[x_1, b]$ .

На характеристиках имеем  $A_1 = 0$ ,  $\xi = 0$ . Поэтому и  $\xi_s = 0$ .

На внешней границе  $A_2 = 0$ . На отрезке  $M_1M_2$  равны нулю  $A_2$  и  $\xi$ , поэтому и  $\xi_s$ . Учитывая сказанное, вместо (2.7) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ}{de}\right)_{e=0} = & \int_{M_1}^{M_2} [L_2(Z, U) - L_2(z, u)] dy - \int_{M_1}^{M_2} A_1\lambda\xi dy + \\ & + \int_{x_1}^b \left\{ \left[ \eta_c \frac{\partial\varphi_c}{\partial z} - (a_2 - A_{1y}) \lambda + A_1\lambda_y \right] \xi + \left( A_1\lambda - \eta_c \frac{\partial\varphi_c}{\partial z_y} \right) \xi_y \right\} dx + \\ & + \int_c^{y_2} \left\{ \left[ \frac{\partial\varphi_b}{\partial z} + (a_1 - A_{1x}) \lambda - A_1\lambda_x \right] \xi + \left( A_1\lambda + \frac{\partial\varphi_b}{\partial z_x} \right) \xi_x \right\} dy + \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial\chi}{\partial z_\gamma} \xi(b, y_\gamma^0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подынтегральные выражения в третьем и четвертом интеграле в правой части равенства (2.8) равны нулю на основании граничных условий. Если учесть еще условия в точках  $y = y_1^0$ , то соотношению (2.8) можно придать следующий простой вид:

$$\left(\frac{dJ}{de}\right)_{e=0} = \int_{M_1}^{M_2} [L_2(Z, U) - L_2(z, u) - A_1 \lambda \xi_x] dy \quad (2.9)$$

Если подставить в это выражение вариацию  $\xi_x$  из третьего равенства (2.4) и учесть, что функция  $z(x, y)$  непрерывна вместе со своими производными  $z_x$ ,  $z_y$  и  $z_{yy}$  вдоль линии  $M_1 M_2$ , то производную (2.9) можно переписать в форме

$$\left(\frac{dI}{de}\right)_{e=0} = \int_{M_1}^{M_2} [H(x, y, z, U, \mu, \lambda) - H(x, y, z, u, \mu, \lambda)] dy \quad (2.10)$$

$$H = f_0 - \lambda f + \sum_{k=1}^r \mu_k \psi_k$$

Поверхность  $E$  сообщает минимум функционалу  $I$ . Поэтому

$$(dI / de)_{e=0} \geq 0 \quad (2.11)$$

Произвольный отрезок  $M_1 M_2$  имеет произвольную длину. Следовательно, для выполнения неравенства (2.11) необходимо выполнить следующее неравенство в каждой элементарной области  $\omega_i$ :

$$H(x, y, z, U, \mu, \lambda) - H(x, y, z, u, \mu, \lambda) \geq 0 \quad (2.12)$$

Таким образом, для того, чтобы поверхность  $E$  сообщала сильный минимум функционалу  $I$ , в любой ее точке необходимо выполнить условие стационарности и неравенство Вейерштрасса (2.12), в котором  $U$  — совокупность любых допустимых управлений, а  $u$  — совокупность управлений, сообщающих минимум функционалу  $I$ , причем  $U \neq u$ .

**3. Построение оптимальных нагрузений при непрерывных множителях Лагранжа.** Рассмотрим некоторые примеры приложения описанного выше необходимого условия Вейерштрасса. Начнем с задач, в которых нет разрывов непрерывности лагранжевых множителей  $\lambda(x, y)$ .

В качестве первого примера займемся построением ограниченного неравенством (1.2) нагружения  $u_1(x, y)$  стержня, описываемого уравнением (1.1) и уравнениями (1.3) и (1.4), сообщающего максимум функционалу

$$I = \frac{2\pi w}{l} \int_0^l z(T, y) \sin \frac{2\pi y}{l} dy \quad (3.1)$$

При решении задачи вместо неравенства (1.2) введем соотношение (1.6) и воспользуемся уравнениями и условиями, описанными в [1]. Тогда для множителей  $\lambda$  и  $\mu$  имеем уравнения

$$\lambda_{xx} - w^2 \lambda_{yy} = 0, \quad -\lambda - 2\mu u_1 = 0, \quad -2\mu u_2 = 0 \quad (3.2)$$

с начальными и граничными условиями

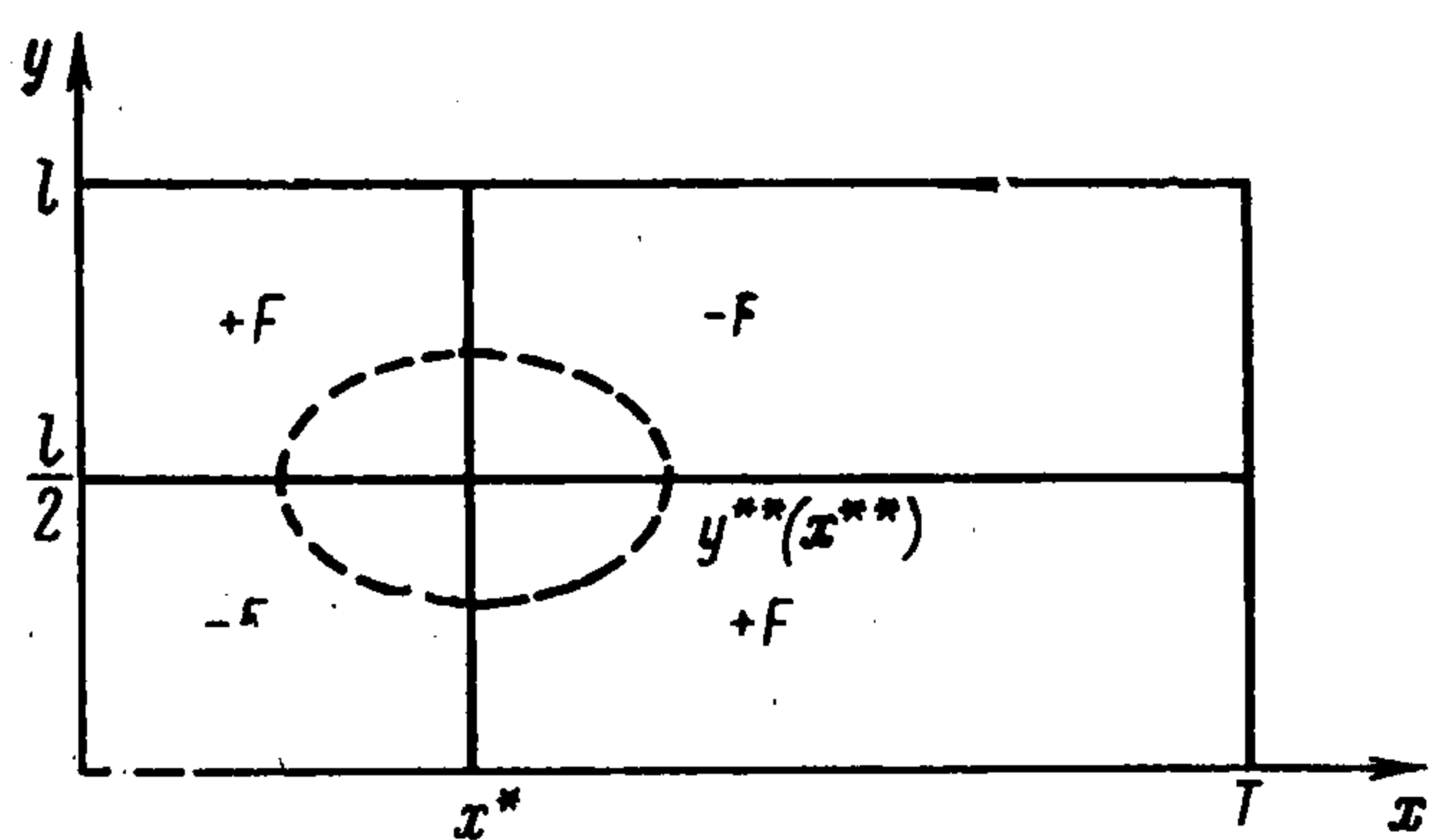
$$\begin{aligned}\lambda(T, y) &= 0, \quad \lambda_x(T, y) = 2\pi w / l \sin 2\pi y / l \\ \lambda(x, 0) &= \lambda(x, l) = 0\end{aligned}$$

Поэтому множитель  $\lambda$  имеет вид [3]

$$\lambda(x, y) = -\sin \frac{2\pi w (T-x)}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}$$

и, следовательно,  $u_1 = \pm F$  всюду кроме линий, на которых  $\lambda = 0$ ; эти линии определяются равенствами

$$y^* = \pm \frac{kl}{2} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad x^* = T \pm \frac{ln}{2w} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$



Фиг. 2

знак управления  $u_1(x, y)$  находится при помощи неравенства

$$\lambda u_1 - \lambda U_1 \leq 0 \quad (3.4)$$

получающегося из неравенства Вейерштрасса.

На фиг. 2 показано распределение оптимальной нагрузки  $u_1(x, y) = \pm F$  по области  $\Omega$  в случае, когда  $l/2w < T < l/w$ . Используются обо-

значения  $x^* = T - l/2w$  и  $y^* = l/w$ . Функционал  $I$  имеет следующее значение:

$$I = \frac{Fl^2}{2\pi w} \left( 3 + \cos \frac{2\pi w T}{l} \right)$$

Рассмотрим теперь описанную выше задачу, заменив функционал на следующий:

$$I = \frac{2\pi w}{l} \int_0^l z(T, y) \left( \sin \frac{2\pi y}{l} + 2 \sin \frac{4\pi y}{l} \right) dy \quad (3.5)$$

Повторив соответствующие выкладки, получим выражение для множителя

$$\lambda(x, y) = -\sin \frac{2\pi w (T-x)}{l} \sin \frac{2\pi y}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi w (T-x)}{l} \sin \frac{4\pi y}{l}$$

Линии переключения управления  $u_1$  даются равенствами (3.3) и соотношениями

$$\begin{aligned}y^{**} &= \begin{cases} l/2\pi \arccos X, & y \leq l/2 \\ l/2\pi (2\pi - \arccos X), & y \geq l/2 \end{cases} \\ X &= \left[ -2 \cos \frac{2\pi w (T-x^{**})}{l} \right]^{-1}\end{aligned}$$

Поэтому область  $\Omega$  разобьется теперь на восемь подобластей, показанных на фиг. 2. Знак  $u_1(x, y)$  найдется с помощью неравенства (3.4). Таким образом, для функционала (3.1) получаются четыре подобласти постоянства  $u_1$ , а для функционала (3.5) таких подобластей будет восемь.

4. **Оптимальные законы нагружения при наличии разрывов множителей Лагранжа.** Рассмотрим задачу оптимизации для уравнения (1.1) и (1.6), условий (1.3) и (1.4) и функционала

$$I = \int_0^l z_x(T, y) \left(1 + \varepsilon \sin \frac{\pi y}{l}\right) dy \quad (4.1)$$

Уравнения для  $\lambda$  и  $\mu$  сохраняют свой вид (3.2), а граничные и конечные условия запишутся в форме

$$\begin{aligned} \lambda(x, 0) = \lambda(x, l) = 0 \\ \lambda(T, y) = -1 - \varepsilon \sin \pi y / l, \quad \lambda_x(T, y) = 0 \end{aligned}$$

Эти условия показывают, что в точках  $x = T, y = 0$  и  $x = T, y = l$  множитель  $\lambda(x, y)$  имеет разрывы.

Ищем решение первого уравнения (3.2) в виде

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' \quad (4.2)$$

и потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \lambda'(T, y) = -1, \quad \lambda''(T, y) = -\varepsilon \sin \pi y / l \\ \lambda_x'(T, y) = \lambda_x''(T, y) = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия оставим прежними. Считаем, что  $l/2w < T < l/w$ .

Решение для  $\lambda''$  имеет вид

$$\lambda''(x, y) = -\varepsilon \cos \frac{\pi w(T-x)}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \quad (4.3)$$

Чтобы найти разрывное решение  $\lambda'(x, y)$ , проведем через точку  $x = T, y = l$  характеристику  $y = l - w(T - x)$ , а через точку  $x = T, y = 0$  — характеристику  $y = w(T - x)$ .

В образовавшихся (см. фиг. 3) элементарных областях множитель  $\lambda'$  непрерывен. Уравнение, определяющее разрыв  $\lambda'$  на характеристиках, имеет простой вид  $[\lambda']_s = 0$ . Решив его для каждого из четырех отрезков характеристик, получим

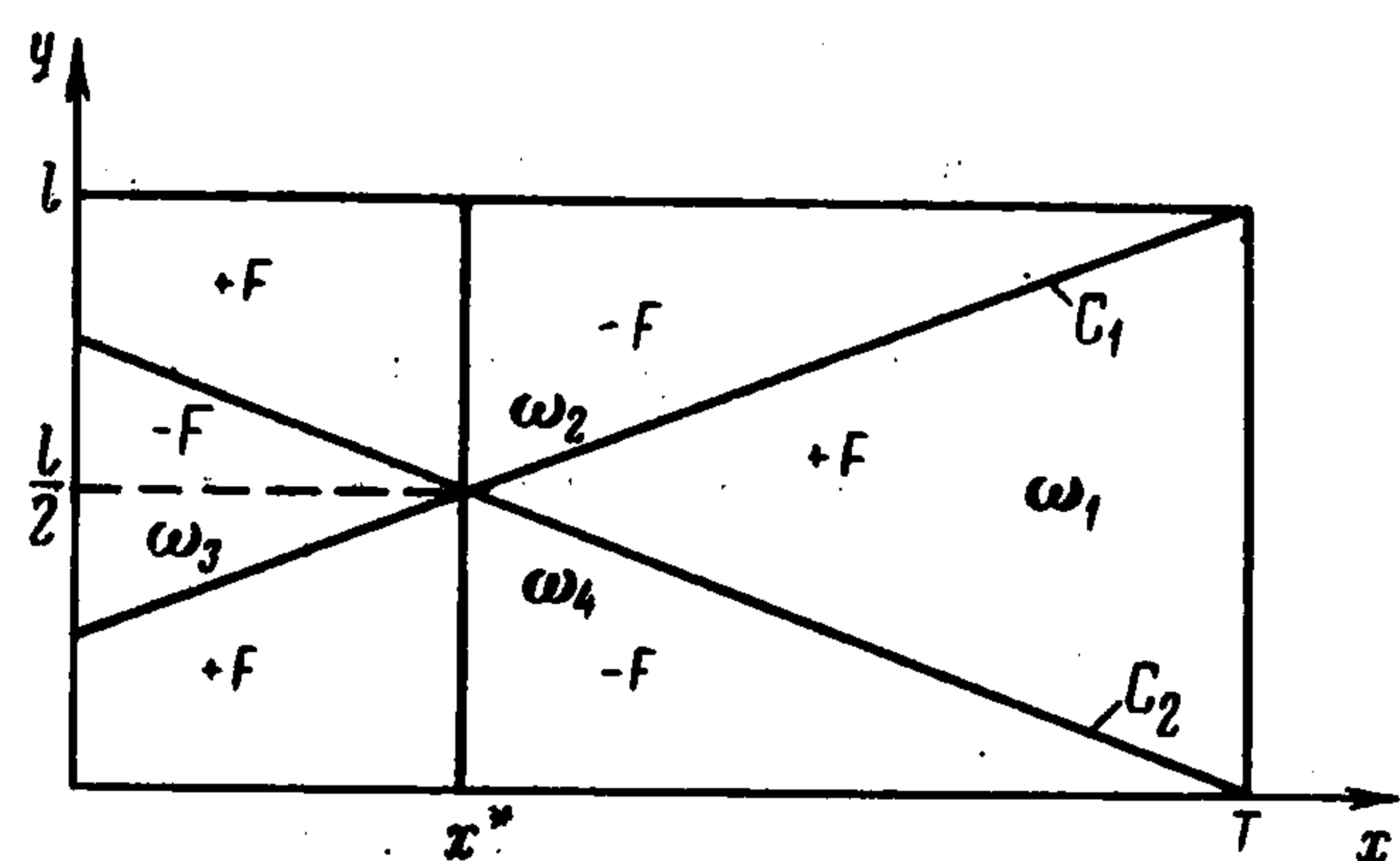
$$\begin{aligned} (\lambda_1' - \lambda_2')_{C_1} = -1, \quad (\lambda_1' - \lambda_4')_{C_2} = -1 \\ (\lambda_3' - \lambda_2')_{C_3} = D_1, \quad (\lambda_3' - \lambda_4')_{C_4} = D_2 \end{aligned}$$

В точке  $x = x^*, y = l/2$  должно выполняться условие [1]

$$\lambda_1' - \lambda_2' + \lambda_3' - \lambda_4' = 0$$

которое приводит к значениям  $D_1 = D_2 = 1$ . Тогда для  $\lambda'$  имеем

$$\lambda'(x, y) = \begin{cases} -1, & x, y \in \omega_1 \\ 0, & x, y \in \omega_2 \\ 0, & x, y \in \omega_4 \\ 1, & x, y \in \omega_3 \end{cases} \quad (4.4)$$



Фиг. 3

После подстановки выражений (4.3) и (4.4) в равенство (4.2) найдем, что при  $\varepsilon > 0$  имеется только одна линия  $x = x^* = T - 1/2 l / w$  разрыва параметра управления  $u_1(x, y)$ . В этом случае на основании неравенства Вейерштрасса имеем

$$u_1(x, y) = \begin{cases} -F, & x < x^* \\ F, & x > x^* \end{cases}$$

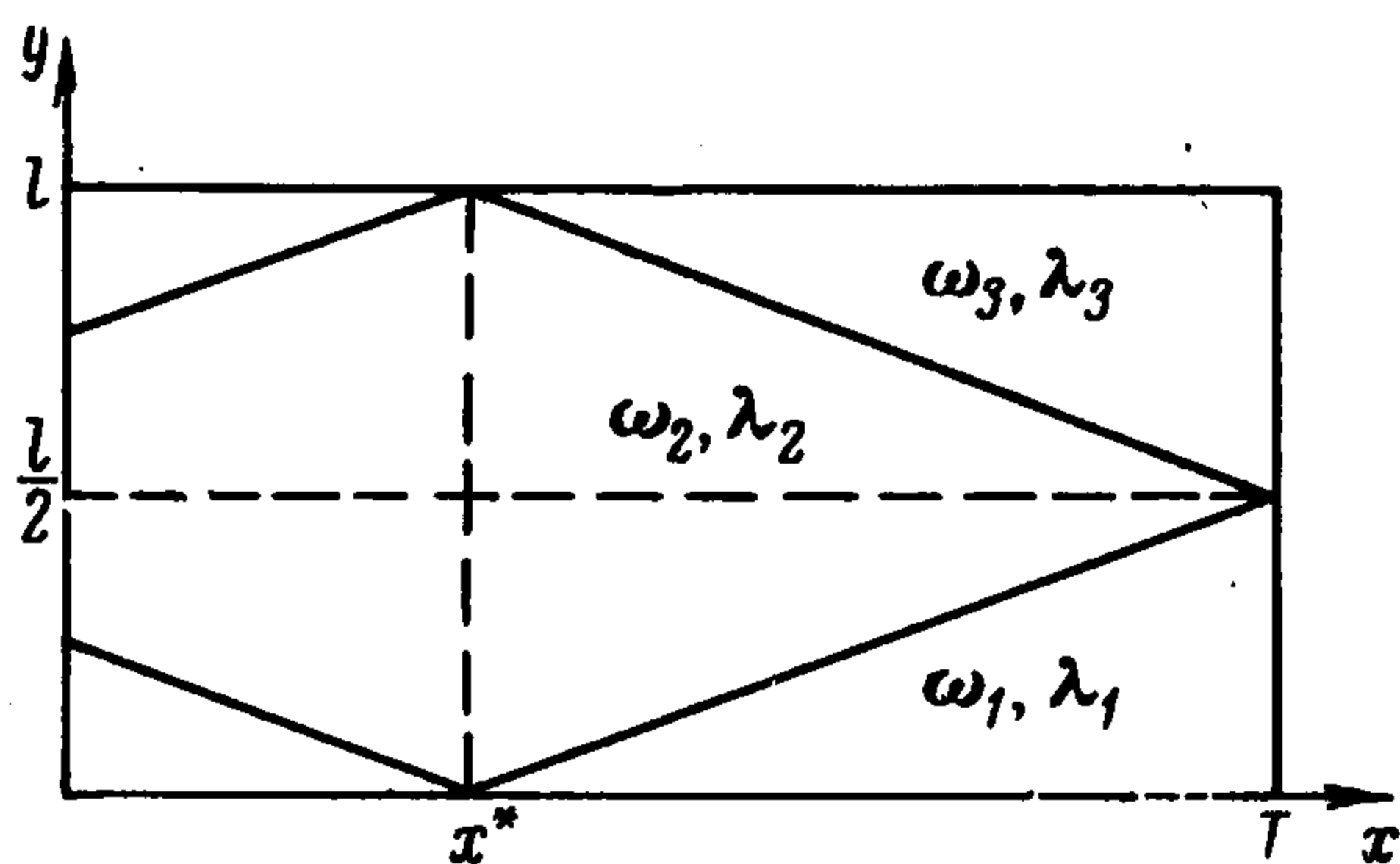
Функционал  $I$  в этом случае равен следующей величине:

$$I = I_1 = \frac{Fl^2}{4w} \left( 1 + \frac{4w^2 x^{*2}}{l^2} \right) + \frac{2Fl^2 \varepsilon}{\pi^2 w} \left( 2 - \sin \frac{\pi w T}{l} \right) \quad (4.5)$$

При выполнении неравенства  $-1 < \varepsilon < 0$ , кроме уже отмеченной линии, имеются еще две линии разрыва параметра  $u_1(x, y)$  — характеристики  $C_1$  и  $C_2$ . Все эти линии и распределение значений  $u_1(x, y)$  показаны на фиг. 3. Функционал  $I$  при этом распределении  $u_1(x, y)$  имеет значение

$$I = I_2 = \frac{Fl^2}{4w} \left( 1 + \frac{4w^2 x^{*2}}{l^2} \right) + \frac{2Fl^2 \varepsilon}{\pi^2 w} \left( \frac{\pi w T}{l} - 2 + \sin \frac{\pi w T}{l} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi w T}{l} \right) \quad (4.6)$$

Сопоставив выражения (4.5) и (4.6), при  $\varepsilon = 0$  найдем, что  $I_1 = I_2$ . При  $\varepsilon = 0$  непрерывная часть  $\lambda''(x, y)$  обращается в нуль и, следовательно,  $\lambda(x, y) = 0$  в областях  $\omega_2$  и  $\omega_4$ .



Фиг. 4

В рассматриваемом случае при  $\varepsilon = 0$  имеется бесчисленное множество решений, дающих экстремум функционалу  $I$ . Два из них получены выше искусственным путем.

Рассмотрим теперь функционал вида

$$I = -al z \left( T, \frac{l}{2} \right) + \int_0^l z(T, y) dy \quad (4.7)$$

оставив без изменения все остальные уравнения и условия задачи. Проведем через точку  $x = T, y = l/2$  две характеристики  $C_1$  и  $C_2$  (фиг. 4). Тогда кроме граничных условий  $\lambda(x, 0) = \lambda(x, l) = 0$  должны быть выполнены условия вида [1]

$$\lambda_1(T, y) = 0 \quad \text{при } y \in \left[ 0, \frac{l}{2} \right), \quad \lambda_3(T, y) = 0 \quad \text{при } y \in \left( \frac{l}{2}, l \right]$$

$$\lambda_2 \left( T, \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2 \sqrt{-a_{11}(T, l/2) a_{22}(T, l/2)}} al$$

$$\lambda_{1x}(T, y) = 1 \quad \text{при } y \in [0, l/2), \quad \lambda_{3x}(T, y) = 1 \quad \text{при } y \in (l/2, l)$$

Разыскивая множитель Лагранжа  $\lambda(x, y)$  в виде суммы (4.2) непрерывной и разрывной части, получим, что непрерывная часть может быть представлена графически (фиг. 5), здесь  $\lambda''(x^*, l/2) = -T + x^*$ . Разрывная часть имеет простой вид

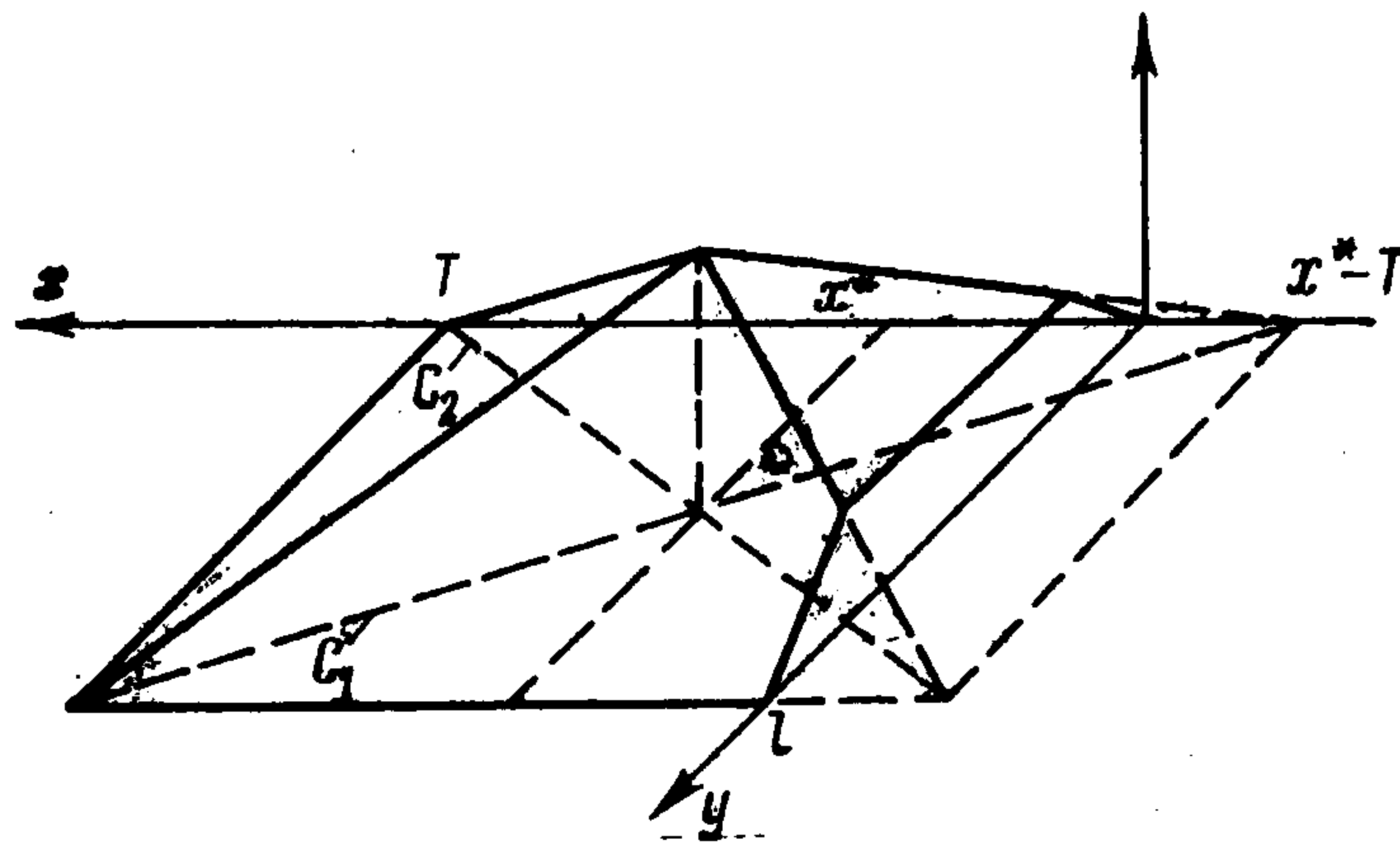
$$\lambda'(x, y) = \begin{cases} 1/2 al / w, & x, y \in \omega_2 \\ 0, & x, y \in \Omega - \omega_2 \end{cases}$$

Если  $\alpha$  — малая величина, для которой выполняется неравенство  $1/2\alpha l/w < l/w - T$ , то линии разрыва расположатся так, как показано на фиг. 6. При этом  $\lambda(x, y) > 0$  при  $x, y \in \omega_4, \omega_5, \omega_6$  и  $\lambda(x, y) < 0$  в остальной области. Неравенство Вейерштрасса дает

$$u_1(x, y) = \begin{cases} F & \text{при } x, y \in \Omega - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 \\ -F & \text{при } x, y \in \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 \end{cases}$$

Функционал равен

$$I = \frac{Fl^3}{4w^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{wx^*}{l} \left( 1 - \frac{4w^2x^{*2}}{3l^2} \right) \right] - \alpha \frac{Fl^3}{2w^2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{wx^*}{l} \left( 1 - \frac{wx^*}{l} \right) \right] + \frac{Fl^3}{4w^2} \alpha^2$$



Фиг. 5

Если  $\alpha = 0$ , то приходим к задаче о накоплении возмущений и при

$$T = x_k + \frac{kl}{w}, \quad x_k \in \left[ 0, \frac{l}{w} \right] \quad (k = 0, 1, \dots)$$

получаем

$$I = \frac{Fl^3}{6w^2} \left( k + \frac{3w^2x_k^2}{l^2} - \frac{2w^3x_k^3}{l^3} \right)$$

Рассмотрим функционал

$$I = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{l/2-\varepsilon}^{l/2+\varepsilon} z_x(T, y) dy + \alpha \int_0^l z_x(T, y) \sin \frac{\pi y}{l} dy \quad (4.8)$$

оставив без изменения уравнение и условие задачи. Тогда уравнения, определяющие множители  $\lambda$  и  $\mu$ , запишутся в форме (3.2), а условия на границе области  $\Omega$  будут иметь вид

$$\lambda(x, 0) = \lambda(x, l) = 0, \quad \lambda_x(T, y) = 0$$

$$\lambda(T, y) = \begin{cases} -\alpha \sin \pi y / l, & y \in [0, l/2 - \varepsilon) \\ -1/\varepsilon - \alpha \sin \pi y / l, & y \in (l/2 - \varepsilon, l/2 + \varepsilon) \\ -\alpha \sin \pi y / l, & y \in (l/2 + \varepsilon, l] \end{cases}$$

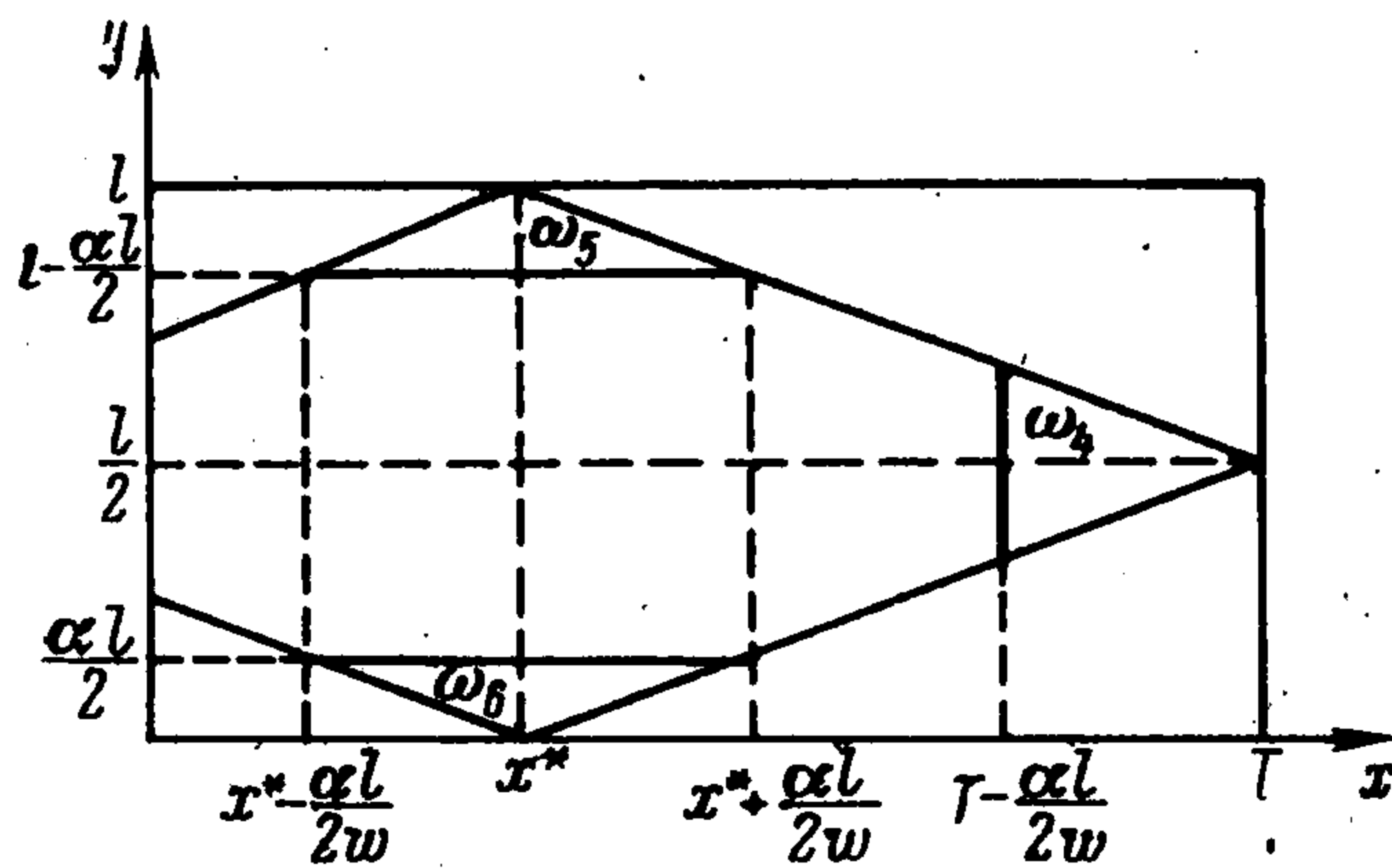
Опять имеются разрывы непрерывности функции  $\lambda$  на границе. Проведем через точки разрывов по две характеристики так, как показано на фиг. 7. Множитель  $\lambda(x, y)$  будем искать в виде суммы (4.2) непрерывной и разрывной частей.

Тогда эти две части получим в следующей форме:

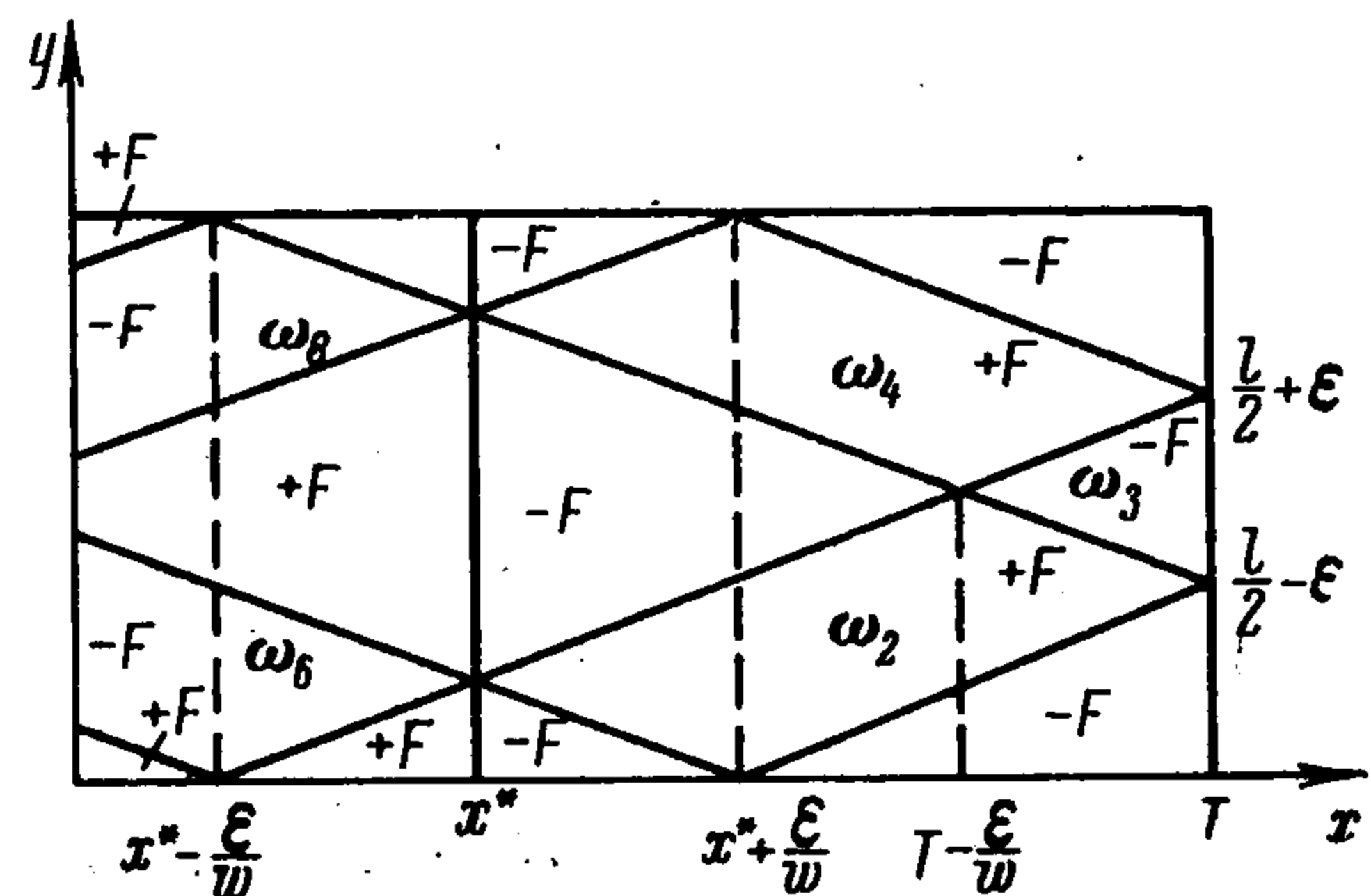
$$\lambda'(x, y) = \begin{cases} -1/4 \varepsilon^{-1}, & x, y \in \omega_2, \omega_4 \\ 1/4 \varepsilon^{-1}, & x, y \in \omega_6, \omega_8 \\ 1/2 \varepsilon^{-1}, & x, y \in \omega_3, \\ 0, & \text{в остальной области} \end{cases}$$

$$\lambda''(x, y) = -\alpha \cos \frac{\pi w (T-x)}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$$

Исследование знака множителя  $\lambda(x, y) = \lambda'(x, y) + \lambda''(x, y)$  при  $\alpha > 0$  и использование неравенства Вейерштрасса показывает, что в этом



Фиг. 6



Фиг. 7

случае разрыв функции  $u_1(x, y)$  имеет место лишь при  $x = x^*$ , и эта функция имеет вид

$$u_1(x, y) = \begin{cases} F, & x > x^* \\ -F, & x < x^* \end{cases}$$

В случае  $\varepsilon < wx^*$  функционал  $I$  равен следующей величине:

$$I = \frac{2Fl^2\alpha}{\pi^2 w} \left( 2 - \sin \frac{\pi w T}{l} \right) + FT - \frac{F\varepsilon}{w} \quad (4.9)$$

При выполнении неравенства  $-1/4 \varepsilon^{-1} < \alpha < 0$  распределение значений функции  $u_1(x, y)$  имеет вид, показанный на фиг. 7. Функционал  $I$  при этом имеет значение

$$I = \frac{4Fl^2\alpha}{\pi w} \left( \frac{wT}{l} - \frac{\varepsilon}{2l} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi w T}{l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\varepsilon}{l} \right) + FT - \frac{F\varepsilon}{w} \quad (4.10)$$

Сопоставляя выражения (4.9) и (4.10) при  $\alpha = 0$ , получаем следующую величину:  $I = FT - F\varepsilon/w$ .

Отметим, что опять при  $\alpha = 0$  задача имеет бесчисленное множество решений, два из которых описаны выше.

Поступила 19VII. 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Л. В., Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
2. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1945.