Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.31

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В. П. Плевако

(Харьков)

Рассматривается неоднородная изотропная среда, модуль сдвига которой — степенная функция линейного двучлена от декартовой координаты, а коэффициент Пуассона постоянный. Находятся условия, при которых общее решение плоской и пространственной задачи теории упругости может быть выражено через гармонические функции. Рассматриваются также некоторые частные случаи изменения модуля сдвига при переменном коэффициенте Пуассона. Полученные результаты используются для решения задач о напряженно-деформированном состоянии неоднородного полупространства под действием сосредоточенных сил, приложенных нормально и касательно к граничной поверхности.

1. Общее решение пространственной задачи теории упругости неоднородных изотропных сред, модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν которых — дифференцируемые функции координаты z, имеет вид [1]

$$\begin{gathered}
u_x = -\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\
u_y = -\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1.1) \\
u_z = -\frac{1}{G}\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2G}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L\right]
\end{gathered}$$

Здесь u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений, ∇^2 — трехмерный оператор Лапласа, L, N — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2\nabla^2 L - \frac{G}{1-\nu}\left\{\frac{1}{G}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nu\nabla^2 L) - \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2 L\right] - \right.$$
$$\left. - 2\frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\nu)\nabla^2 L\right]\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{G}\right) + \left(\nu\nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G}\right)\right\} = 0 \qquad (1.2)$$

$$\nabla^2 N + q(z)\frac{\partial N}{\partial z} = 0 \qquad \left(q(z) = \frac{d}{dz}\ln G\right) \qquad (1.3)$$

Общее решение осесимметричной задачи выражается через функцию L. К двумерной задаче теории упругости неоднородных сред можно перейти, если положить $N = 0$, а функция L не зависит от координаты x или y. Кроме того, ν нужно заменить на ν^*, где $\nu^* = \nu$ для случая плоской деформации и $\nu^* = \nu/(1+\nu)$ для случая плоского напряженного состояния.

Таким образом, решение любой задачи теории упругости сводится к нахождению удовлетворяющих заданным граничным условиям функций L и N из уравнений (1.2) и (1.3). В общем случае при решении этих уравнений приходится сталкиваться с большими трудностями, что в значительной степени снижает практическую ценность приведенных выше результатов. Постановка и решение конкретных задач существенно упростится лишь тогда, когда в записи общего решения удастся использовать классы сравнительно изученных функций.

Исследуем возможность представления общего решения уравнений (1.2) и (1.3) через гармонические функции в случае, когда модуль сдвига изменяется по степенной зависимости вида

$$G(z) = G_0 (1 + cz)^b \tag{1.4}$$

Рассмотрим сначала уравнение (1.2), которое запишем в более компактной форме

$$\nabla^2 \left(\frac{1-\nu}{G} \nabla^2 L \right) - \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) L \, \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G} \right) = 0 \tag{1.5}$$

2. Положим, что коэффициент Пуассона — произвольная функция координаты z, а модуль сдвига

$$G(z) = G_0/(1 + cz) \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.5) упрощается и его общее решение может быть найдено из уравнения Пуассона

$$\Delta^2 L = \chi(z) \varphi_0, \; \chi(z) = G / (1 - \nu) \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем φ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ — произвольные гармонические функции.

Введем в рассмотрение гармоническую функцию φ_2, связанную с φ_0 зависимостью

$$\varphi_0 = 2d\varphi_2/dz$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что частное решение уравнения (2.2) можно принять в виде

$$L^* = \int_{t_0}^{z} \chi(t) \left[\varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x, y, 2t - z) \right] dt \tag{2.3}$$

Отсюда следует

$$L = \varphi_1 + L^* \tag{2.4}$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.5) в случае, когда модуль сдвига меняется по степенной зависимости вида (2.1), а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(z)$ выражается через две произвольные гармонические функции.

Отсюда, в частности, следует, что двух гармонических функций достаточно и для решения любой плоской или осесимметричной задачи, если рассматриваемые тела обладают указанной неоднородностью.

3. Положим, что в уравнении (1.5) $\nu = \text{const}$, а модуль сдвига — степенная функция координаты z вида (1.4).

Будем искать L в виде

$$L = (1 + cz)^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 + cz)^{-k} \psi_k \tag{3.1}$$

где ψ_k ($k = 0, 1, 2 \ldots$) — произвольные гармонические функции, связанные между собой зависимостями

$$\psi_k = \partial \psi_{k+1} / \partial z \tag{3.2}$$

Подставив L в уравнение (1.5) и собрав подобные члены, приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях величины $1 + cz$. Из полученной таким образом системы алгебраических уравнений следует, что формальными решениями уравнения (1.5) будут два ряда

$$L_1 = (1 + cz)^{\beta_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} (1 + cz)^{-k} \psi_k^{(1)} \tag{3.3}$$

$$L_2 = (1 + cz)^{\beta_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} (1 + cz)^{-k} \psi_k^{(2)} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}
\beta_1 = {}^1/_2 (b + 1 + \xi), \qquad \beta_2 = {}^1/_2 (b + 1 - \xi) \\
\xi = \sqrt{(b + 1)[1 - \nu b / (1 - \nu)]} \\
a_k^{(1)} = \frac{(\xi - 2k + 1)^2 - (b + 2)^2}{8k} c a_{k-1}^{(1)} \qquad a_0^{(1)} = 1 \\
a_k^{(2)} = \frac{(\xi + 2k - 1)^2 - (b + 2)^2}{8k} c a_{k-1}^{(2)}, \qquad a_0^{(2)} = 1
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Индексы 1 и 2 при гармонических функциях ψ_k введены для того, чтобы подчеркнуть, что эти функции в общем случае различны.

В некоторых частных случаях неоднородности упругой среды ряды (3.3) и (3.4) обрываются, и тогда общее решение уравнения (1.5) удается выразить в виде конечной суммы. Найдем эти случаи, для чего положим

$$a_{n+1}^{(1)} = a_{m+1}^{(2)} = 0 \tag{3.6}$$

т. е. первый ряд обрывается на члене с порядковым номером n, а второй — с номером m.

Из выражений (3.5) следует, что равенство (3.6) возможно лишь при выполнении условий

$$(\xi - 2n - 1)^2 - (b + 2)^2 = 0, \quad (\xi + 2m + 1)^2 - (b + 2)^2 = 0 \tag{3.7}$$

Откуда, с учетом того, что $\xi \geqslant 0$ и $0 \leqslant \nu \leqslant {}^1/_2$, находим

$$b = n + m - 1, \quad \xi = n - m, \quad \nu = \frac{n + m - (n - m)^2}{4nm} \tag{3.8}$$

а для n и m получаем систему неравенств

$$n \geqslant m \geqslant 1, \qquad n \leqslant m + {}^1/_2 [1 + \sqrt{8m + 1}] \tag{3.9}$$

Функцию L удается представить в виде

$$L = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(1)} (1 + cz)^{n-k} \frac{\partial^{n-k}\varphi_1}{\partial z^{n-k}} + \sum_{k=0}^{k=m} a_k^{(2)} (1 + cz)^{m-k} \frac{\partial^{m-k}\varphi_2}{\partial z^{m-k}}$$

$$a_k^{(1)} = \frac{(n-m-2k+1)^2 - (n+m+1)^2}{8k} c a_{k-1}^{(1)}, \qquad a_0^{(1)} = 1 \tag{3.10}$$

$$a_k^{(2)} = \frac{(n-m+2k-1)^2 - (n+m+1)^2}{8k} c a_{k-1}^{(2)}, \qquad a_0^{(2)} = 1$$

здесь $\varphi_1 = \psi_n^{(1)}$, $\varphi_2 = \psi_m^{(2)}$.

Таким образом, для частных случаев неоднородности упругой среды, определяемых соотношениями (3.8), общее решение уравнения (1.5) может быть представлено при помощи двух гармонических функций φ_1 и φ_2 в виде (3.10).

В таблице для всех возможных $b \leqslant 10$ указаны соответствующие значения величин m, n и коэффициента Пуассона ν, которые вычислены по формулам (3.8) и (3.9). Ввиду малой практической ценности в нее не включен лишь случай $m = n$, так как при этом $L_1 = L_2$.

b	ν	m	n
2	$^1/_4$	1	2
3	0	1	3
4	$^1/_6$	2	3
5	$^1/_{16}$	2	4
6	$^1/_8$	3	4
7	$^1/_{15}$	3	5
8	0	3	6
8	$^1/_{10}$	4	5
9	$^1/_{16}$	4	6
10	$^1/_{56}$	4	7
10	$^1/_{12}$	5	6

4. Рассмотрим теперь уравнение (1.3) при $G(z)$, меняющемся по зависимости вида (1.4). Коэффициент Пуассона не входит в уравнение, поэтому будем считать его произвольной функцией координаты z.

По аналогии с предыдущим случаем функцию N ищем в виде

$$N = (1 + cz)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} d_k (1 + cz)^{-k} \psi_k \tag{4.1}$$

Из уравнения (1.3) получаем

$$\gamma = -\frac{b}{2}, \qquad d_k = \frac{(2k-1)^2 - (b-1)^2}{8k} c d_{k-1}, \qquad d_0 = 1 \tag{4.2}$$

Следовательно, ряд (4.1) оборвется на члене с порядковым номером s, если

$$(2s + 1)^2 - (b - 1)^2 = 0 \tag{4.3}$$

Это равенство возможно лишь тогда, когда

$$b = 2(s + 1) \text{ или } b = -2s \qquad (s = 0,\ 1,\ 2 \ldots) \tag{4.4}$$

При этом функция N принимает вид

$$N = (1 + cz)^{-b/2} \sum_{k=0}^{k=s} d_k (1 + cz)^{-k} \frac{\partial^{s-k}\varphi_3}{\partial z^{s-k}} \tag{4.5}$$

Здесь $\varphi_3 = \psi_s$.

Таким образом, общее решение уравнения (1.3) выражается через произвольную гармоническую функцию φ_3, если показатель степени b в формуле (1.4) можно представить в виде (4.4).

Рассмотрим частный случай неоднородности упругой среды, когда модуль сдвига постоянен, а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(z)$. Для этого в формулах (2.4) и (4.5) положим $G = \text{const}$. В итоге найдем, что общее решение пространственной задачи выражается через три произвольные гармонические функции, так как

$$L = \varphi_1 + \int_{t_0}^{z} [\varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x, y, 2t - z)] \frac{dt}{1 - \nu(t)}, \quad N = \varphi_3 \qquad (4.6)$$

Полученные результаты позволяют решить ряд новых задач теории упругости неоднородных изотропных сред. Рассмотрим две из них.

5. Сосредоточенная сила P, приложенная в начале координат к неоднородному полупространству $z \geqslant 0$, действует в положительном направлении оси z. Следует определить деформации полупространства, если коэффициент Пуассона постоянен, а модуль сдвига меняется с глубиной по степенной зависимости (1.4) при тех значениях показателя b, которые допускаются соотношениями (3.8) и (4.4).

В работах [2, 3], посвященных аналогичным проблемам, исследовалось напряженное состояние полупространства $z \geqslant 0$ с модулем $E(z) = E_0 z^k$ от воздействия нормальной к поверхности сосредоточенной силы. Физическая нереальность такой среды очевидна, так как модуль упругости полупространства у граничной поверхности равен нулю. Это обстоятельство, в частности, влечет за собой ограничение возможных значений показателя k. Так, например, постановка задачи о действии распределенной нагрузки имеет смысл лишь при $0 \leqslant k < 1$. Поэтому представляет интерес исследовать напряженно-деформированное состояние полупространства, модуль сдвига которого есть функция координаты z вида (1.4).

Для определенности будем считать $b = 2$. При других значениях показателя b метод решения задачи аналогичен.

Из таблицы и равенств (4.4) находим

$$\nu = {}^1/_4, \ m = 1, \ n = 2, \ s = 0$$

Отсюда, согласно (3.10) и (4.5), имеем

$$L = (1 + cz)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - 2c(1 + cz) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{3}{2} c^2 \varphi_1 + (1 + cz) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{3}{2} c \varphi_2 \qquad (5.1)$$

$$N = \varphi_3 / (1 + cz) \qquad (5.2)$$

Примем $\varphi_3 = 0$. Тогда решение задачи сведется к нахождению в области $z \geqslant 0$ гармонических функций φ_1 и φ_2, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Функции φ_1 и φ_2 ищем в виде

$$\varphi_1 = \int_0^\infty \frac{A + B}{c^2 \alpha^3} e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\, d\alpha \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty \frac{A - B}{c \alpha^3} e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\, d\alpha \qquad (5.3)$$

Здесь $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Произвольные функции параметра α — A и B — должны быть подобраны так, чтобы выполнялись граничные условия. Это значит, что нормальные и касательные напряжения на поверхности полупространства должны быть равны

$$\sigma_z\big|_{z=0} = -f(r), \quad \tau_{zx}\big|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}\big|_{z=0} = 0 \tag{5.4}$$

Здесь $f(r)$ — внешняя нагрузка, которая в случае, когда на полупространство действует сосредоточенная сила P, может быть представлена в виде [4]

$$f(r) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha \tag{5.5}$$

Подставляя выражения (5.3) в (5.1), имеем

$$L = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^3} J_0(\alpha r)\{A\lambda(1+cz)[\lambda(1+cz)+1] + \tag{5.6}$$

$$+ B[\lambda^2(1+cz)^2 + 3\lambda(1+cz)+3]\}\, d\alpha \qquad \left(\lambda = \frac{\alpha}{c}\right)$$

Внося функцию L в формулы (1.1), находим компоненты вектора перемещений, а по ним — составляющие тензора напряжений.

Подставляя выражения для определения напряжений в (5.4), получаем для функций A и B систему алгебраических уравнений, из которых находим

$$A = -\frac{P}{2\pi}\frac{\lambda(\lambda+1)}{2\lambda^2+6\lambda+3}, \qquad B = \frac{P}{2\pi}\frac{\lambda^2-\lambda-1}{2\lambda^2+6\lambda+3} \tag{5.7}$$

В окончательном виде формулы перемещений будут

$$u_r = \frac{cP}{4\pi G_0(1+\zeta)}\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\, e^{-\lambda\zeta}\, \frac{\lambda^2[(2\lambda+1)\zeta-1]}{2\lambda^2+6\lambda+3}\, d\lambda$$

$$u_z = \frac{cP}{4\pi G_0(1+\zeta)}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\, e^{-\lambda\zeta}\lambda\, \frac{2\lambda^2\zeta+\lambda(\zeta+3)+2}{2\lambda^2+6\lambda+3}\, d\lambda \tag{5.8}$$

$$u_\beta = 0 \qquad (\rho = cr,\ \zeta = cz,\ \beta = \operatorname{arc\,tg} y/x)$$

Здесь u_r, u_β, u_z — компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат.

Разложим дробно-рациональные выражения в подынтегральных функциях на элементарные дроби. Если теперь воспользоваться формулами [5]

$$\int_0^\infty J_\mu(\lambda\rho)\, d\lambda = \frac{1}{\rho} \qquad (\operatorname{Re}\mu > -1,\ \rho > 0) \tag{5.9}$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^\mu}{\lambda+\gamma} J_\mu(\lambda\rho)\, d\lambda = \frac{\pi\gamma^\mu}{2\cos\mu\pi} T_{-\mu}(\gamma\rho), \quad T_{-\mu}(\gamma\rho) = \mathbf{H}_{-\mu}(\gamma\rho) - N_{-\mu}(\gamma\rho)$$

$$(-{}^1/_2 < \operatorname{Re}\mu < {}^3/_2,\ \rho > 0,\ |\arg\gamma| < \pi)$$

где $\mathbf{H}_{-\mu}(\gamma\rho)$ — функция Струве, $N_{-\mu}(\gamma\rho)$ — функция Неймана, то при $\zeta = 0$ получим выражения для определения перемещений точек поверхности неоднородного полупространства

$$u_r\big|_{z=0} = -\frac{cP}{32G_0}\left[(3+2\sqrt{3})T_1(\gamma_1\rho) + (3-2\sqrt{3})T_1(\gamma_2\rho) - \frac{12}{\pi}\right]$$
$$u_z\big|_{z=0} = \frac{3cP}{8\pi G_0\rho}\left\{1 - \frac{\pi}{3}\rho\left[(7/4+\sqrt{3})T_0(\gamma_1\rho) + (7/4-\sqrt{3})T_0(\gamma_2\rho)\right]\right\} \tag{5.10}$$
$$u_\beta = 0, \quad \gamma_1 = 1/2(3+\sqrt{3}), \quad \gamma_2 = 1/2(3-\sqrt{3})$$

Отсюда следует, что при $\rho \ll 1$

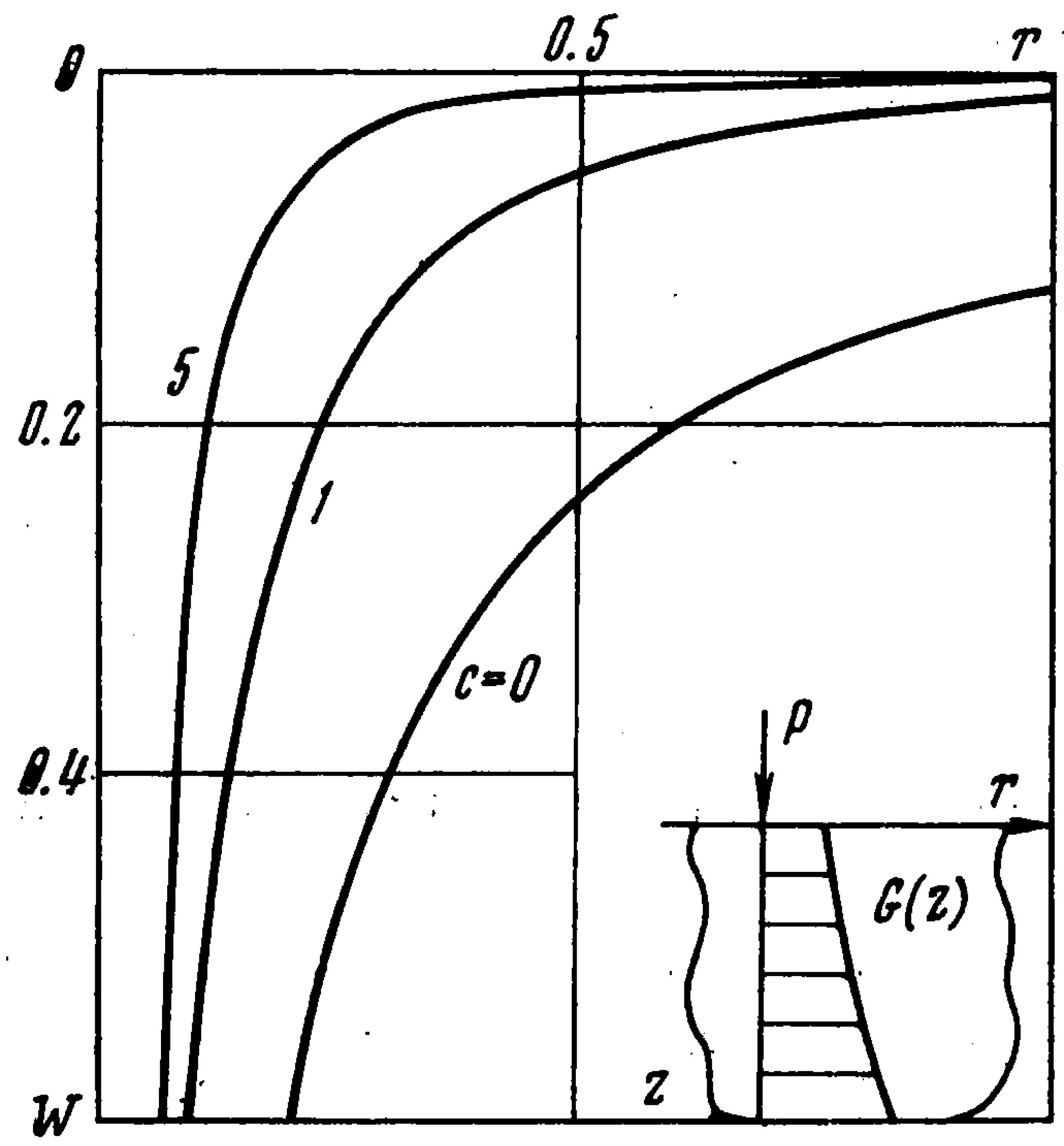
$$u_r\big|_{z=0} \approx \frac{-P}{8\pi G_0 r}, \quad u_\beta = 0, \quad u_z\big|_{z=0} \approx \frac{3P}{8\pi G_0 r} \tag{5.11}$$

Таким образом, вблизи точки приложения силы перемещения неоднородного полупространства совпадают с перемещениями одинаково нагруженного с ним однородного полупространства, имеющего тот же коэффициент Пуассона и модуль сдвига, равный G_0.

Однако по мере удаления от точки приложения силы, перемещения быстро затухают. Характер затухания легкого выявить, если воспользоваться асимптотическим разложением для функии $T_\mu(\rho)$ [6]

$$T_\mu(\rho) \approx \frac{(\rho/2)^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1/2)}\left[1 + \frac{1\cdot(2\mu-1)}{\rho^2} + \frac{1\cdot3\cdot(2\mu-1)(2\mu-3)}{\rho^4} + \ldots\right] \tag{5.12}$$

Так, например, из выражений (5.10) и (5.12) следует, что вертикальные осадки убывают со скоростью; прямо пропорциональной кубу расстояния от точки приложения силы.



На фигуре представлены вертикальные перемещения точек поверхности полупространства при разных значениях коэффициента c. По оси абсцисс на графике отложена величина r, по оси ординат — $W = u_z G_0 / P$. Случай $c = 0$ соответствует однородному полупространству.

Положим теперь в выражениях (5.8) $r = 0$, и, разложив подынтегральные дробно-рациональные функции на элементарные дроби, воспользуемся формулой [5]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\zeta}}{\lambda+\gamma}\,d\lambda = -e^{\gamma\zeta}\,\mathrm{Ei}(-\gamma\zeta) \tag{5.13}$$

где $\mathrm{E}i(-\gamma\zeta)$ — интегральная показательная функция. В результате получим формулы перемещений точек неоднородного полупространства, лежащих на линии действия силы

$$u_z\Big|_{\rho=0}=\frac{cP}{4\pi G_0(1+\zeta)}\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)-\left(\frac{7}{4}+\sqrt{3}\right)(\sqrt{3}\zeta-1)e^{\gamma_1\zeta}\,\mathrm{Ei}\,(-\gamma_1\zeta)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{7}{4}-\sqrt{3}\right)(\sqrt{3}\zeta+1)e^{\gamma_2\zeta}\,\mathrm{Ei}\,(-\gamma_2\zeta)\right\},\quad u_r\Big|_{\rho=0}=u_\beta\Big|_{\rho=0}=0\quad(5.14)$$

6. Положим теперь, что сосредоточенная сила P, приложенная в начале координат к полупространству $z\geqslant 0$, действует в положительном направлении оси x касательно к граничной поверхности. Как и в предыдущей задаче, будем считать, что модуль сдвига меняется с глубиной по степенной зависимости вида (1.4) при $b=2$, а коэффициент Пуассона $\nu={}^1/_4$. В этом случае функции L и N найдутся из выражений (5.1) и (5.2).

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния неоднородного полупространства сводится к нахождению трех гармонических функций φ_1, φ_2 и φ_3, которые позволили бы удовлетворить граничным условиям

$$\sigma_z\Big|_{z=0}=0,\quad \tau_{zx}\Big|_{z=0}=-f(r),\quad \tau_{zy}\Big|_{z=0}=0\qquad(6.1)$$

где $f(r)$ — внешняя нагрузка, которую представим в виде (5.5).

Гармонические функции ищем в виде

$$\varphi_1=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{C_1+C_2}{(c\alpha)^3}J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha=\cos\beta\int_0^\infty\frac{C_1+C_2}{c^3\alpha^2}J_1(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha$$
$$\varphi_2=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{C_1-C_2}{c^2\alpha^3}J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha=\cos\beta\int_0^\infty\frac{C_1-C_2}{(c\alpha)^2}J_1(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha\qquad(6.2)$$
$$\varphi_3=-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\frac{C_3}{c\alpha}J_0(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha=\frac{\sin\beta}{c}\int_0^\infty C_3J_1(\alpha r)e^{-\alpha z}d\alpha$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — функции параметра α, которые подлежат определению из граничных условий.

Подставляя выражения (6.2) в (5.1) и (5.2), имеем

$$L=\cos\beta\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2c}J_1(\alpha r)\{C_1\lambda(1+\zeta)[\lambda(1+\zeta)+1]+C_2[\lambda^2(1+\zeta)^2+$$
$$+3\lambda(1+\zeta)+3]\}d\alpha\qquad(6.3)$$
$$N=\frac{\sin\beta}{c(1+\zeta)}\int_0^\infty C_3e^{-\alpha z}J_1(\alpha r)\,d\alpha$$

Отсюда по формулам (1.1) и зависимостям теории упругости нетрудно найти составляющие вектора перемещений и тензора напряжений.

Граничные условия (6.1) позволяют составить систему трех алгебраических уравнений для функций C_1, C_2 и C_3, решая которые находим

$$C_1=-\frac{P}{2\pi}\frac{\lambda^2+3\lambda+3}{\lambda(2\lambda^2+6\lambda+3)},\qquad C_2=\frac{P}{2\pi}\frac{\lambda+1}{2\lambda^2+6\lambda+3}$$
$$C_3=\frac{P}{2\pi G_0}\frac{1}{\lambda+1}\qquad(6.4)$$

Приведем окончательные выражения для определения перемещений точек неоднородного полупространства

$$u_r = -\frac{cP\cos\beta}{4\pi G_0(1+\zeta)}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda\zeta}\left[\lambda J_0(\lambda\rho) - \frac{1}{\rho}J_1(\lambda\rho)\right]\frac{2\zeta\lambda^2+3(\zeta-1)\lambda-6}{2\lambda^2+6\lambda+3}d\lambda - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\rho}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\zeta}}{\lambda+1}J_1(\lambda\rho)\,d\lambda\right\} \qquad (6.5)$$

$$u_\beta = \frac{cP\sin\beta}{4\pi G_0(1+\zeta)}\left\{\frac{1}{\rho}\int_0^\infty e^{-\lambda\zeta}J_1(\lambda\rho)\left[\frac{2\zeta\lambda^2+3(\zeta-1)\lambda-6}{2\lambda^2+6\lambda+3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{\lambda+1}\right]d\lambda - 2\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda\zeta}}{\lambda+1}J_0(\lambda\rho)\,d\lambda\right\}$$

$$u_z = \frac{cP\cos\beta}{4\pi G_0(1+\zeta)}\int_0^\infty e^{-\lambda\zeta}J_1(\lambda\rho)\lambda^2\frac{2\zeta\lambda+3\zeta+1}{2\lambda^2+6\lambda+3}d\lambda$$

В частном случае, когда $c\to 0$, приходим к известному решению Черутти [7] для сосредоточенной силы, приложенной касательно к граничной поверхности однородного полупространства.

Формулы для определения перемещений точек поверхности неоднородного полупространства можно получить из (6.5), если разложить дробно-рациональные выражения в подынтегральных функциях на элементарные дроби и воспользоваться формулами (5.9). В результате найдем

$$u_r\big|_{z=0} = \frac{cP\cos\beta}{2\pi G_0\rho}\left\{1 - \frac{\pi}{8}\left[\frac{3}{2}\rho\left(T_0(\gamma_1\rho) + T_0(\gamma_2\rho)\right) - \gamma_2 T_1(\gamma_1\rho) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \gamma_1 T_1(\gamma_2\rho) + 4T_1(\rho)\right]\right\} \qquad (6.6)$$

$$u_\beta\big|_{z=0} = -\frac{3cP\sin\beta}{8\pi G_0\rho}\left\{1 - \frac{\pi}{6}\left[\gamma_2 T_1(\gamma_1\rho) + \gamma_1 T_1(\gamma_2\rho) - 4T_1(\rho)\right] - \frac{2\pi}{3}\rho T_0(\rho)\right\}$$

$$u_z\big|_{z=0} = \frac{cP\cos\beta}{16G_0}\left[\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)T_1(\gamma_1\rho) + \left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)T_1(\gamma_2\rho) - \frac{6}{\pi}\right]$$

Нетрудно получить и формулы для определения перемещений точек полупространства, лежащих на оси z, если воспользоваться интегралом (5.15).

Поступила 6 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании. Тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1956, № 14.
3. Ростовцев Н. А., Храневская И. Е. Решение задачи Буссинеска для полупространства при степенной зависимости модуля упругости от глубины. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
4. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1963.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. Янке К., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.