

**ОБТЕКАНИЕ СИЛЬНО НАГРЕТОЙ СФЕРЫ ПОТОКОМ ГАЗА
ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

В. С. Галкин, М. Н. Коган, О. Г. Фридендер

(Москва)

Если относительные перепады температуры в медленных течениях около тел порядка единицы, то при числах Рейнольдса $R_\infty \lesssim 1$ входящие в уравнение импульса барнеттовские температурные напряжения будут порядка обычных вязких напряжений [1, 2]. В условиях, когда влияние гравитационной конвекции несущественно, решена задача обтекания равномерно нагретой (охлажденной) сферы потоком газа с $R_\infty \ll 1$ с учетом указанных температурных напряжений. Последние приводят к значительному уменьшению сопротивления сферы по сравнению с величиной, полученной при помощи уравнений Навье — Стокса [3].

Медленные ($M_\infty \ll 1$) течения около равномерно нагретых (охлажденных) тел при $R_\infty \leq O(1)$ описываются следующими безразмерными уравнениями сохранения и краевыми условиями [1]:

$$\nabla \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) = \nabla (T \nabla T) \quad (2)$$

$$T^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Pi = \Pi^{(1)} - \frac{3}{2} \delta (\nabla T)^2 \nabla T + \\ + 2\delta (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) \nabla T - \frac{3}{2} \delta \nabla [T (\nabla T)^2] \quad (3)$$

$$\Pi = \pi + \frac{4\delta - 1}{3} (\mathbf{v} \cdot \nabla T), \quad \Pi_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} T \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \nabla \mathbf{v} \right) \quad (4)$$

Предполагается, что внешними силами можно пренебречь. Аналогично [1] можно показать, что в случае сферы влияние гравитационной конвекции несущественно, если $L^3 < \nu_\infty^2 R_\infty / g$, где g — ускорение свободного падения. При нормальных условиях и $R_\infty \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$ практически имеем $L < 10^{-2}$ см.

Эти уравнения справедливы с погрешностью $O(K^2)$, где K — число Кнудсена. В невозмущенном потоке

$$\mathbf{v} = R_\infty \mathbf{e}, \quad T = 1 \quad (5)$$

$$R_\infty = u_\infty L / \nu_\infty, \quad \nu_\infty = \mu_\infty / \rho_\infty, \quad \mathbf{e} = \mathbf{v} / \nu$$

На теле с погрешностью $O(K)$ (такой порядок имеют пристеночные скачки скорости и температуры) имеем

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_w \quad (6)$$

Скорость потока $\mathbf{u} = V \cdot \mathbf{v}$, «вязкая» скорость [1] $V = \nu_\infty / L$. Координаты $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ отнесены к характерному размеру L ; температура T , давление p и т. д. отнесены к их значениям в невозмущенном по-

токе, поэтому

$$p = 1 + (\rho_\infty V^2 / p_\infty) \pi$$

т. е. π — безразмерная переменная часть давления. Плотность ρ исключена при помощи уравнения состояния.

Здесь и ниже рассматривается одноатомный газ из максвелловских молекул, когда безразмерный коэффициент вязкости $\mu = T$; отношение удельных теплоемкостей и число Прандтля равны соответственно $5/3$ и $2/3$. Коэффициент $\delta = 1$ введен для того, чтобы выделить барнеттовские члены уравнения импульса. Выражения для Π , $\Pi_i^{(1)}$ записаны в несколько другом виде, чем в работе [1], более удобном при сравнении решения с решением в рамках уравнений Навье — Стокса (отметим, что на теле $\Pi = \pi$). Если при фиксированном R_∞ величина $T_w \rightarrow 1$, то справедливы уравнения Навье — Стокса ($\delta = 0$).

Переменная часть тензора напряжений на стенке с учетом условий прилипания и уравнений (1), (2) имеет вид

$$\Pi_{ij} = \pi \delta_{ij} - T \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{3}{2} \delta T \frac{\partial^2 T^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7)$$

Если $R_\infty = 0$ (т. е. $u_\infty = 0$), то в общем случае около тела имеет место термострессовая конвекция со скоростями¹ порядка V (при $T_w - 1 = O(1)$), обусловленная барнеттовскими температурными напряжениями и описываемая полной системой уравнений (1) — (4). Эта конвекция может приводить к возникновению действующей на тело «термострессовой» силы.

При $R_\infty \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, и решение следует искать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad \pi = \pi_0 + \varepsilon \pi_1 + \dots, \quad \varepsilon = R_\infty \quad (8)$$

Исключением является обтекание сферы радиусом $r_0 = L$. В этом случае при $u_\infty = 0$ газ покоится [2], т. е. $\mathbf{v}_0 = 0$, а из уравнения энергии (2) имеем уравнение Лапласа для T_0^2 , откуда

$$T_0 = (1 + \omega / r)^{1/2}, \quad \omega = T_w^2 - 1 \quad (9)$$

Температурные напряжения вызывают при этом лишь перераспределение давления π_0 по r (длина радиус-вектора r отсчитывается от центра сферы, ниже используется сферическая система координат r, θ, φ). Поэтому при обтекании сферы потоком с числом $R_\infty \ll 1$ характерной скоростью будет не V , а u_∞ .

Введем вместо \mathbf{v}_1 отнесенную к u_∞ скорость газа \mathbf{u} . Тогда уравнения (1), (3), (4) примут вид

$$\nabla \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla \ln T_0) + O(R_\infty) \quad (10)$$

¹ При $T_w \gg 1$ характерными будут условия на стенке [1], при этом, в частности, $V = v_w / L$.

$$R_\infty T_0^{-1} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \Pi_1 = \Pi_1^{(1)} + 2\delta (\mathbf{u} \cdot \nabla \ln T_0) \nabla T_0 - \frac{3}{2} \delta \{(\nabla T_0)^2 \nabla T_1 + \\ + 2(\nabla T_0 \cdot \nabla T_1) \nabla T_0 + \nabla [2T_0 (\nabla T_0 \cdot \nabla T_1) + T_1 (\nabla T_0)^2]\} + O(R_\infty) \quad (11)$$

$$\Pi_{1i}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} T_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

Выражение для Π_1 получается аналогично.

Если отбросить температурные напряжения ($\delta = 0$) и пренебречь членами $O(R_\infty)$, то система уравнений (10) — (12) описывает известную [3] задачу «стоксовского» обтекания нагретой сферы в рамках уравнений Навье — Стокса. Использование процедуры сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений [4] необходимо для получения следующих членов разложения решения в ряд по R_∞ .

В рассматриваемом случае дело обстоит иначе: в уравнение импульса входит T_1 и нужно совместно решить уравнение энергии первого приближения и уравнения (10), (11). Для определения T_1 используем метод внутренних и внешних разложений.

Уравнение энергии, записанное во введенных выше (внутренних) переменных, имеет вид

$$\frac{2}{3} \frac{R_\infty}{T} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} T \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (13)$$

Во внешних переменных $\rho = R_\infty r$, $X_i = R_\infty x_i$ оно запишется так:

$$\frac{2}{3T} u_j^* \frac{\partial T^*}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} T^* \frac{\partial T^*}{\partial X_j} \quad (14)$$

Для удобства обозначаем функции от внешних переменных соответствующими буквами со звездочкой сверху.

Внутренние и внешние разложения имеют вид

$$T = T_0 + R_\infty T_1 + \dots, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + R_\infty \mathbf{u}_1 + \dots \quad (15)$$

$$T^* = 1 + R_\infty T_1^* + \dots, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{e}_x + R_\infty \mathbf{u}_1^* + \dots \quad (16)$$

Здесь T_0 дается формулой (9), T_1 , T_1^* удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla^2 T_0 T_1 = \frac{2}{3T_0} u_{0r} \frac{dT_0}{dr} \quad (17)$$

$$\nabla^2 T_1^* = \frac{2}{3} \frac{\partial T_1^*}{\partial X} \quad (18)$$

Последнее уравнение приводится к уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \Omega = \frac{1}{9} \Omega, \quad \Omega = e^{-1/3 X} T_1^*$$

решения которого хорошо известны. Исходя из условий ограниченности решения при $\rho \rightarrow \infty$ и принципа минимальной особенности [4] при $\rho \rightarrow 0$, выбираем следующее его решение:

$$\Omega = C \rho^{-1} \exp(-1/3 \rho)$$

где C — функция R_∞ .

Для определения $T_1(r \rightarrow \infty, \theta)$ сравним двухчленные внутреннее и внешнее разложения

$$T = \left(1 + \frac{\omega}{r}\right)^{1/2} + R_\infty T_1(r, \theta), \quad T^* = 1 + R_\infty \frac{C}{\rho} \exp \frac{X - \rho}{3}$$

Действуя стандартными методами, [4] получим $C = \omega / 2$ и

$$T_1(\infty, \theta) = 1/6 \omega (\cos \theta - 1) \quad (19)$$

С учетом (19) решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r &= f(r) \cos \theta, \quad u_\theta = -g(r) \sin \theta, \quad \Pi_1 = h(r) \cos \theta + m(r) \\ T_1 &= T_0^{-1} [\psi(r) + t(r, \theta)], \quad t = \tau(r) \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f &= 0, \quad g = 0, \quad \psi = 0, \quad \tau = 0 & (r = 1) \\ f &\rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow \omega / 6, \quad \psi \rightarrow -\omega / 6 & (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (20) в (17), убеждаемся, что переменные разделяются, $\psi = \omega(1 - r) / (6r)$, а τ удовлетворяет уравнению

$$\tau'' + \frac{2}{r} \tau' - \frac{2}{r^2} \tau - \frac{2}{3} \frac{T_0'}{T_0} f = 0 \quad (22)$$

Температурные напряжения, выражаемые через ψ , определяют $m(r)$, т. е. вызывают симметричное перераспределение давления по r , поэтому ниже они не учитываются. Пренебрегая в (10), (11) членами порядка R_∞ по сравнению с единицей (в частности, конвективными членами), используя (20), найдем

$$f' + (2/r)(f - g) - T_0^{-1} T_0' f = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} h' - T_0 \left[f'' + \frac{2}{r} f' - \frac{4}{r^2} (f - g) \right] - 2T_0' f' + T_0^{-1} T_0'^2 f + \\ + 3\delta T_0' \left[\tau'' + \frac{2}{r} (T_0^{-1} T_0' \tau - \tau') - \frac{2}{3} T_0^{-1} T_0' f \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$-h + T_0 [rg'' + 2g' + 2r^{-1}(f - g)] + T_0' (rg' + f - g) - 3\delta T_0' \tau' = 0 \quad (25)$$

Итак, задача свелась к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (22) — (25) с граничными условиями (21). При численном интегрировании, эти уравнения приводились к более удобному виду, с использованием новых переменных ξ, H , вводимых формулами

$$r = |\omega| e^\xi, \quad H = rh / T_0$$

Рассмотрим вопрос о вкладе местных температурных напряжений в силу F , действующую на сферу. Третий член формулы (7) запишется так:

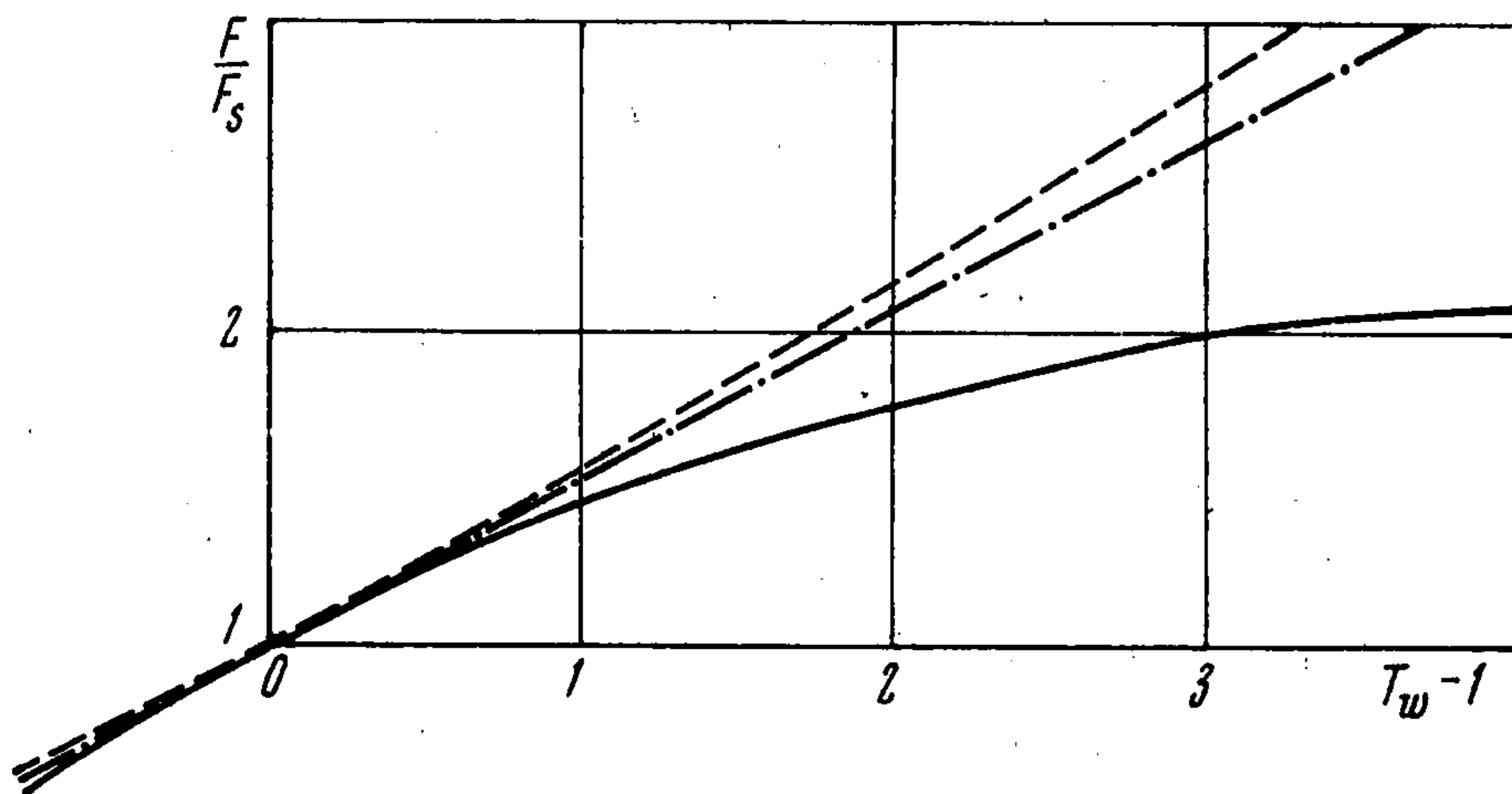
$$\begin{aligned} 3/2 T_w (T_0^2)_{ij} + 3/2 R_\infty [2T_w (\psi)_{ij} + T_1 (T_0^2)_{ij} + 2T_w (t)_{ij}] \\ ()_{ij} = \frac{\partial^2 ()}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (26)$$

Первые два члена (26) не дают вклада в F , третий равен нулю (на сфере $T_1 = 0$). Далее имеем

$$(t)_{rr} = \tau'' \cos \theta, \quad (t)_{r\theta} = -(\tau/r)' \sin \theta$$

Вклад местных температурных напряжений в F равен нулю. Действительно, он пропорционален

$$\int_0^\pi [(t)_{rr} \cos \theta - (t)_{r\theta} \sin \theta] \sin \theta d\theta = \left(\frac{\tau}{r}\right)' \int_0^\pi (1 - 3\cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = 0$$



Фиг. 1

Здесь использовано уравнение (22) и то, что на стенке $f = 0$. Таким образом, как и в приближении Навье — Стокса, действующая на сферу сила F является интегралом по ее поверхности от давления и вязких напряжений, которые, однако, уже не определяются уравнениями Навье — Стокса

$$F = \frac{2}{9} (2g'T - h)_{r=1} F_S, \quad F_S = 6\pi\rho_\infty\mu_\infty r_0 \quad (27)$$

Здесь F_S дается формулой Стокса.

Результаты расчетов по уравнениям (22) — (25) показали, что температурные напряжения слабо влияют на поле скоростей, но — при больших T_w — резко уменьшают F . Последнее объясняется уменьшением (по абсолютной величине) несимметричной части давления $\pi_{1h}(r) \cos \theta$, где

$$\pi_{1h} = h - \frac{1}{3} (4\delta - 1) f T_0'$$

На фиг. 1, 2 сплошными кривыми даны результаты вычислений с учетом температурных напряжений ($\delta = 1$), пунктирными — без их учета ($\delta = 0$). Штрих-пунктирная прямая (фиг. 1) рассчитана по формуле (4.6) работы [2], найденной путем линеаризации решения в приближении Навье — Стокса по $(T_w - 1) \ll 1$ относительно решения Стокса. Данные на фиг. 2 получены при $T_w = 4$. При $r = 1$, $\delta = 0$ величина $\pi_{1h} = -3.66$.

Имеющиеся экспериментальные данные [5] показывают, что F увеличивается с ростом T_w , тем сильнее, чем меньше R_∞ , однако они получены при $R_\infty > 2$ в условиях, когда возможно проявление эффектов свободной гравитационной конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридендер О. Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
2. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридендер О. Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
3. Kassoy D. R., Adamson T. C., Messiter A. F. Compressible low Reynolds Number flow around a sphere. Phys. Fluids. 1966, vol. 9, N 4, p. 671—681.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
5. Басина И. П., Максимов И. А. О влиянии неизотермичности на аэродинамическое сопротивление сферической частицы. В сб.: Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики, вып. 5. Алма-Ата, «Наука», 1969.