

ОДНОМЕРНОЕ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ  
С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ ПРИ МАЛОМ ПАРАМЕТРЕ  
ЭЛЕКТРОГИДРОВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. И. Грабовский

(Москва)

Рассматривается одномерное течение униполярно заряженного газа между эмиттером и коллектором при заданном разрывном изменении скорости в рабочем промежутке (например при наличии газодинамической ударной волны при малом параметре электрогидровзаимодействия). Определены характеристики течения в зависимости от положения и интенсивности разрыва скорости, а также разности потенциалов между электродами. Показано, что решения с равным нулю поверхностным зарядом на разрыве реализуются только в ограниченном интервале изменения определяющих параметров. Вне этого интервала возможно бесчисленное количество решений с отличным от нуля поверхностным зарядом. Проведен отбор решений при помощи условия предложенного в [1].

1. Рассмотрим одномерное движение униполярно заряженной среды в промежутке  $0 \leq X \leq L$  между плоскими электродными сетками при следующем распределении скорости:

$$\mathbf{V} = (V_* u, 0, 0) \quad u = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \xi \\ r, & \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

$$x = X/L, \quad V_*, r = \text{const}, \quad r \leq 1$$

Такое распределение скорости может реализоваться при стационарном одномерном движении газа с ударной волной в точке  $\xi$  (тогда  $r$  представляет собой отношение плотностей на ударной волне) в случае малого параметра электрогидровзаимодействия, когда электрические силы не изменяют газодинамической картины течения.

Распределения электрического потенциала  $\varphi$ , электрического поля  $E = E_x(x)$ , плотности объемного заряда  $q$  в области  $0 \leq x \leq 1$  без учета диффузии заряженных частиц описываются уравнениями

$$\varphi'' = -q, \quad q = i / (u - \varphi'), \quad i = \text{const}, \quad E = -\varphi' \quad (1.1)$$

В этих соотношениях  $\varphi$ ,  $E$  и  $q$  безразмерные с характерными комплексами соответственно:  $V_* L / b$ ,  $V_* / b$  и  $\varepsilon V_* / (4\pi b L)$ , где  $b = \text{const}$  — подвижность заряженных частиц,  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная. Величина  $i$  представляет собой продольную компоненту плотности электрического тока, отнесенную к  $\varepsilon V_*^2 / (4\pi b L)$ . Штрих означает дифференцирование по переменной  $x$ .

Система (1.1) должна дополняться граничными условиями и соотношениями на разрыве  $x = \xi$ . Будем рассматривать течения, когда между элект-

тродами поддерживается разность потенциалов  $\alpha = \text{const}$ , а источник заряженных частиц работает в режиме насыщения [2]

$$x = 0, \varphi = 0, E = -1; x = 1, \varphi = \alpha \quad (1.2)$$

Безразмерный параметр  $\alpha$  может быть равен нулю (течение между заземленными сетками), больше нуля (внешнее электрическое поле направлено против потока), меньше нуля (внешнее электрическое поле направлено по потоку).

Разрыв скорости при  $x = \xi$ , согласно (1.1), должен вызывать разрыв плотности заряда  $q$ . При этом в зависимости от положения разрыва  $\xi$  и его интенсивности  $1/r$  возможны два случая: течение с равной нулю величиной поверхностного заряда при  $x = \xi$  (такое течение будем называть «непрерывным») и течения с  $\sigma \neq 0$  («разрывные»).

В первом случае соотношения при  $x = \xi$  имеют вид (индексы 1, 2 обозначают соответственно значения параметров перед и за фронтом ударной волны)

$$x = \xi, \{\varphi\} = \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \{i\} = 0; \{E\} = 0 \quad (1.3)$$

Для разрывных решений условия при  $x = \xi$  можно записать в виде

$$x = \xi, \{\varphi\} = 0, \{i\} = 0, E_2 + u_2 = \gamma \geq 0 \quad (1.4)$$

Рассматриваемая задача характеризуется тем, что при любых фиксированных  $\xi$ ,  $r$  и  $\alpha$  существует некоторый интервал изменения  $\gamma$ , для каждой точки которого имеется формальное решение системы (1.1), (1.2), (1.4). Отбор физически реализующегося течения будет проводиться на основе предложенного в [1] условия, согласно которому  $\gamma = 0$ .

Для определенности в дальнейшем изучается положительно заряженный газ. Поэтому

$$q > 0, i \geq 0, \sigma = \{E\} \geq 0 \quad (1.5)$$

Цель исследования состоит в определении диапазонов изменения параметров  $\xi$ ,  $r$  и  $\alpha$ , при которых существует непрерывное или разрывное решение, и в выяснении особенностей распределения электрических параметров в рабочем промежутке.

2. Для решения задачи необходимо проинтегрировать уравнения (1.1) в областях  $x < \xi$  и  $x > \xi$  и сшить решения при  $x = \xi$ . Используя граничные соотношения (1.2) и условие  $i_1 = i_2 = i$ , находим

$$\begin{aligned} 0 \leq x < \xi, \varphi_I &= x - x\sqrt{8ix/9} & (2.1) \\ \xi < x \leq 1, \varphi_{II} &= \alpha + r(x-1) + [(r^2 + 2i + c)^{3/2} - (r^2 + 2ix + c)^{3/2}]/(3i) \end{aligned}$$

Постоянные  $i$  и  $c$  (при заданных  $\xi$ ,  $r$  и  $\alpha$ ) связаны между собой уравнением, вытекающим из условия  $\{\varphi\} = 0$ ,

$$\alpha + r(\xi - 1) + \frac{1}{3i} [(r^2 + 2i + c)^{3/2} - (r^2 + 2i\xi + c)^{3/2}] - \xi + \frac{2}{3} \xi \sqrt{2i\xi} = 0 \quad (2.2)$$

Если решение непрерывно, то из условия  $\{E\} = 0$  при помощи (2.1) находим замыкающее уравнение

$$1 - r - \sqrt{2i\xi} + \sqrt{r^2 + 2i\xi + c} = 0 \quad (2.3)$$

которое вместе с (2.2) служит для определения  $i$  и  $c$ . Однако можно показать, что совместное решение этих уравнений (и тем самым — существование непрерывных решений) возможно не при любых  $\xi$ ,  $r$  и  $\alpha$ . Из (2.3) также следует, что непрерывное решение характеризуется неравенством

$$1 - r - \sqrt{2i\xi} \leq 0 \quad (i \geq (1 - r)^2 / (2\xi)) \quad (2.4)$$

В случае разрывного решения постоянные  $i$  и  $c$  находятся при помощи (2.2), (2.1), условия  $E_2 + u_2 = 0$  и выражаются в виде

$$\sqrt{i} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{|\xi + r(1 - \xi) - \alpha|}{[\xi^{3/2} + (1 - \xi)^{3/2}]}, \quad c = -r^2 - 2i\xi \quad (2.5)$$

Из найденных соотношений и последнего условия (1.5) вытекает неравенство, служащее критерием отбора разрывных решений

$$E_2 - E_1 = \sigma(\xi, r, \alpha) = 1 - r - \sqrt{2i\xi} \geq 0 \quad (i \leq (1 - r)^2 / (2\xi)) \quad (2.6)$$

Условие (2.6) совместно с (2.5) позволяет определить область значений параметров  $(\xi, r)$ ,  $\alpha$  — фиксированное, при которых осуществляются разрывные решения. Эта область ограничена двумя кривыми: кривой семейства 1 (кривая 1)<sup>1</sup>

$$r = \frac{2[\xi^{3/2} + (1 - \xi)^{3/2}] + 3\sqrt{\xi}(\alpha - \xi)}{2[\xi^{3/2} + (1 - \xi)^{3/2}] + 3\sqrt{\xi}(1 - \xi)} \quad (2.7)$$

и кривой семейства 2 (кривая 2)

$$r = (\alpha - \xi) / (1 - \xi) \quad (2.8)$$

Согласно неравенствам (2.6) и (2.4), кривая (2.7) является границей также и области значений параметров  $(\xi, r)$ , где существуют непрерывные решения. Таким образом, эти две области нигде не пересекаются и непрерывно переходят одна в другую через кривую (2.7). Эта линия, как следует из (2.4) и (2.6), принадлежит сразу обоим режимам и ее точки соответствуют решениям с  $\sigma = 0$  и  $E_2 + u_2 = 0$  одновременно.

По кривой (2.8) происходит непрерывный переход из области разрывного решения в зону, где вообще в данной постановке задачи не существует решения («запретная» зона). Как следует из (2.5), точки кривых семейства 2 соответствуют режиму холостого хода, так как ток между электродами равен нулю. В этом случае в рабочем промежутке отсутствуют электрические заряды, но, согласно (2.6), поверхностный заряд в точке  $x = \xi$  отличен от нуля.

Отметим, что для области разрывного решения справедливо неравенство, связывающее величины электрического поля перед ударной волной

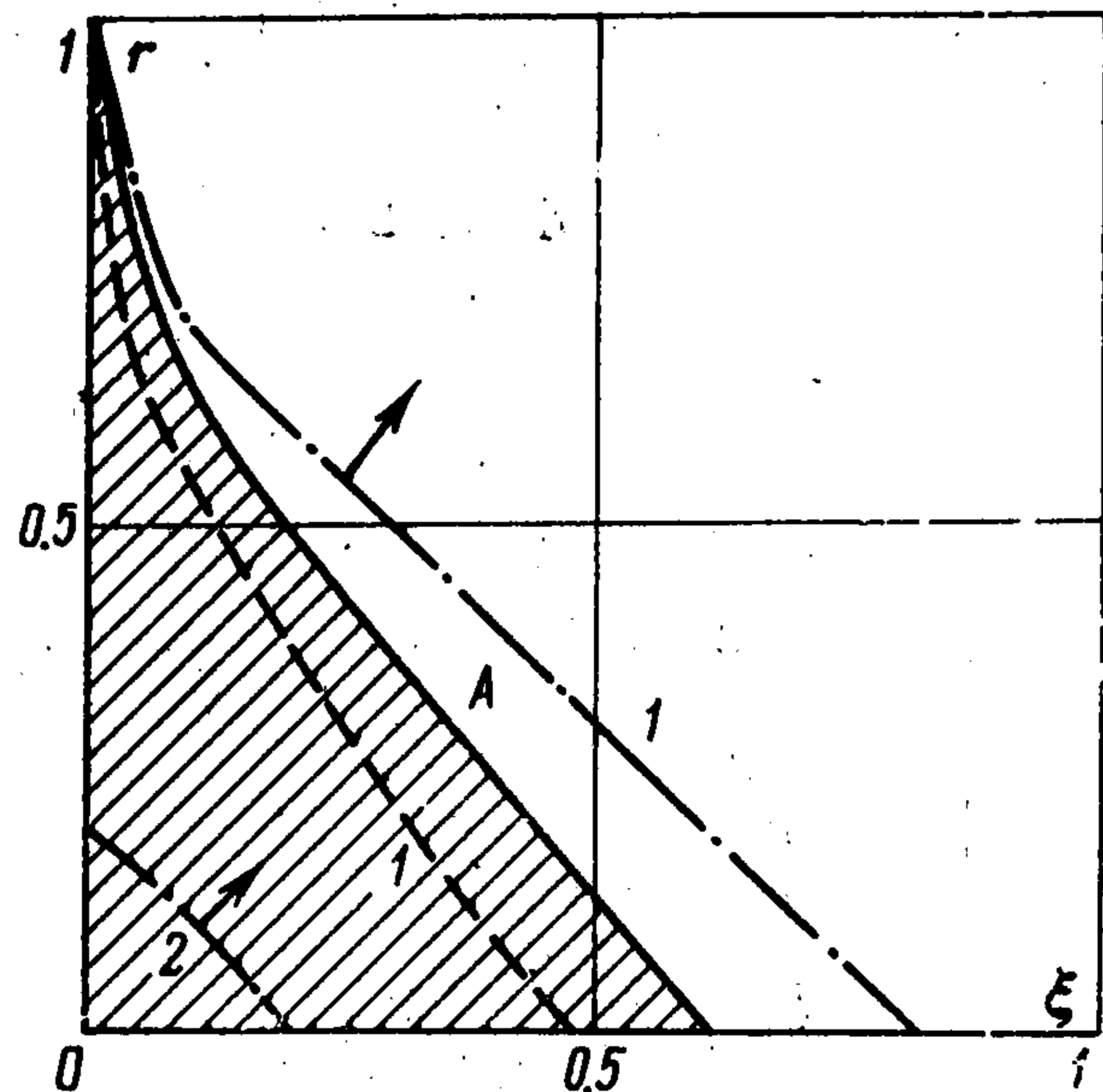
<sup>1</sup> На возможность существования аналитической кривой (6.7) было указано И. П. Семеновым, А. Е. Якубенко при обсуждении данной работы.

$E_1$  и скоростей по обе стороны от разрыва

$$-1 \leq E_1 \leq -r \quad (2.9)$$

3. В зависимости от величины безразмерного параметра  $\alpha$  кривые семейств  $1, 2$  будут по-разному разделять рассматриваемую область значений  $\xi, r$ . При любых  $\alpha \leq 1$  кривая  $1$ , проходя через точку  $(0, 1)$ , пересекает квадрат  $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq r \leq 1\}$ . Кривая  $2$  проходит через этот квадрат только при  $\alpha \geq 0$ . Таким образом, при  $0 \leq \alpha \leq 1$  существуют три области, соответствующие различным решениям: область существования непрерывного решения (I), разрывного (II) и запретная область (III). В случае  $\alpha < 0$  запретная зона отсутствует. Во всех случаях эти области нигде не пересекаются и непрерывно переходят одна в другую.

На фиг. 1 сплошной линией нанесена кривая семейства  $1$  при  $\alpha = 0$  (A-линия). В этом случае кривая семейства  $2$  вырождается в точку  $(0, 0)$ , поэтому заштрихованная зона является областью II, из которой через кривую A можно перейти в область I. Можно показать, что при  $\alpha < 0$  кривые  $1$  смещены относительно A-линии к точке  $(0, 0)$ . При этом размер области II уменьшается и соответственно увеличивается область I. На фиг. 1 пунктирная линия  $1$  соответствует  $\alpha = -0.2$ .



Фиг. 1

Отметим, что при  $\alpha \rightarrow -\infty$  кривые семейства  $1$  стремятся к прямой  $\xi = 0$ , но при любых конечных значениях  $\alpha$  не достигают ее, т. е. всегда существует область разрывного решения. Это объясняется тем, что из-за граничного условия на левой сетке, а именно  $E(0) = -1$ , при любом  $\alpha$  существует сколь угодно малая окрестность точки  $x = 0$ , где справедливо неравенство (2.9), что приводит к разрывным решениям.

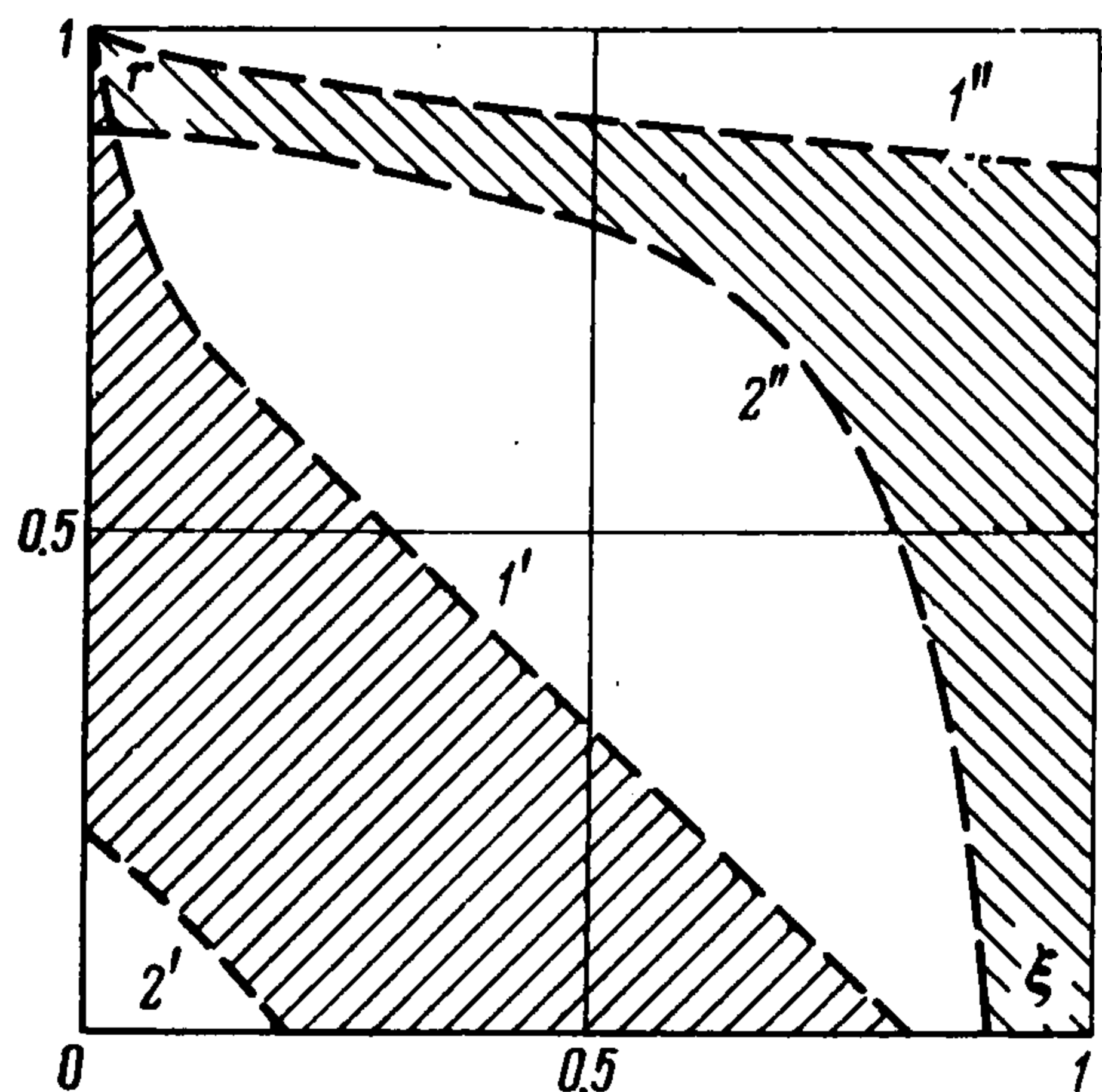
Физический смысл движений линий семейства  $1$  состоит в том, что уменьшение  $\alpha$  на электроде  $x = 1$  ведет к смещению максимума потенциала к точке  $x = 0$ . Таким образом, уменьшается протяженность отрезка продольной оси, где электрическое поле принимает отрицательное значение. Это уменьшает (по параметру  $\xi$ ) возможность существования разрывных решений, так как они реализуются только при выполнении неравенства (2.9). При увеличении параметра  $\alpha$  все происходит наоборот.

Из формулы (2.7) следует, что при всех  $\alpha > 0$  кривые  $1$  смещены относительно A-линии к точке  $(1, 1)$ . При этом, очевидно, происходит сужение области I. При  $\alpha = 1$  так как кривая  $1$  становится прямой  $r = 1$ , область I вырождается в прямую.

Из выражения (2.8) вытекает, что при увеличении  $\alpha$  кривая  $2$  смещается к точке  $(1, 1)$ , увеличивая размер области III. На фиг. 1 штрих-пунктирные линии  $1, 2$  соответствуют границам областей при  $\alpha = 0.2$ . Между этими кривыми находится область II. Стрелками указано направление движения граничных кривых при увеличении  $\alpha$ .

Так как при  $\alpha = 1$  обе граничные кривые совпадают по прямой  $r = 1$ , то «скорость» перемещения кривой  $2$  при  $\alpha \rightarrow 1$  больше скорости смещения кривой  $1$ . Таким образом, при увеличении параметра  $\alpha$  размер области II (также как и области I) уменьшается. В предельном случае  $\alpha = 1$  запретная зона занимает весь исследуемый квадрат, а две другие области вырождаются в прямую  $r = 1$ , т. е. осуществляется только режим холостого хода и только без ударной волны в рабочем промежутке.

На фиг. 2 изображено взаимное расположение областей при различных значениях  $\alpha$ . Кривые  $1', 2'$  ограничивают область II для  $\alpha = 0.2$ , а кривые  $1'', 2''$  — для  $\alpha = 0.9$ .



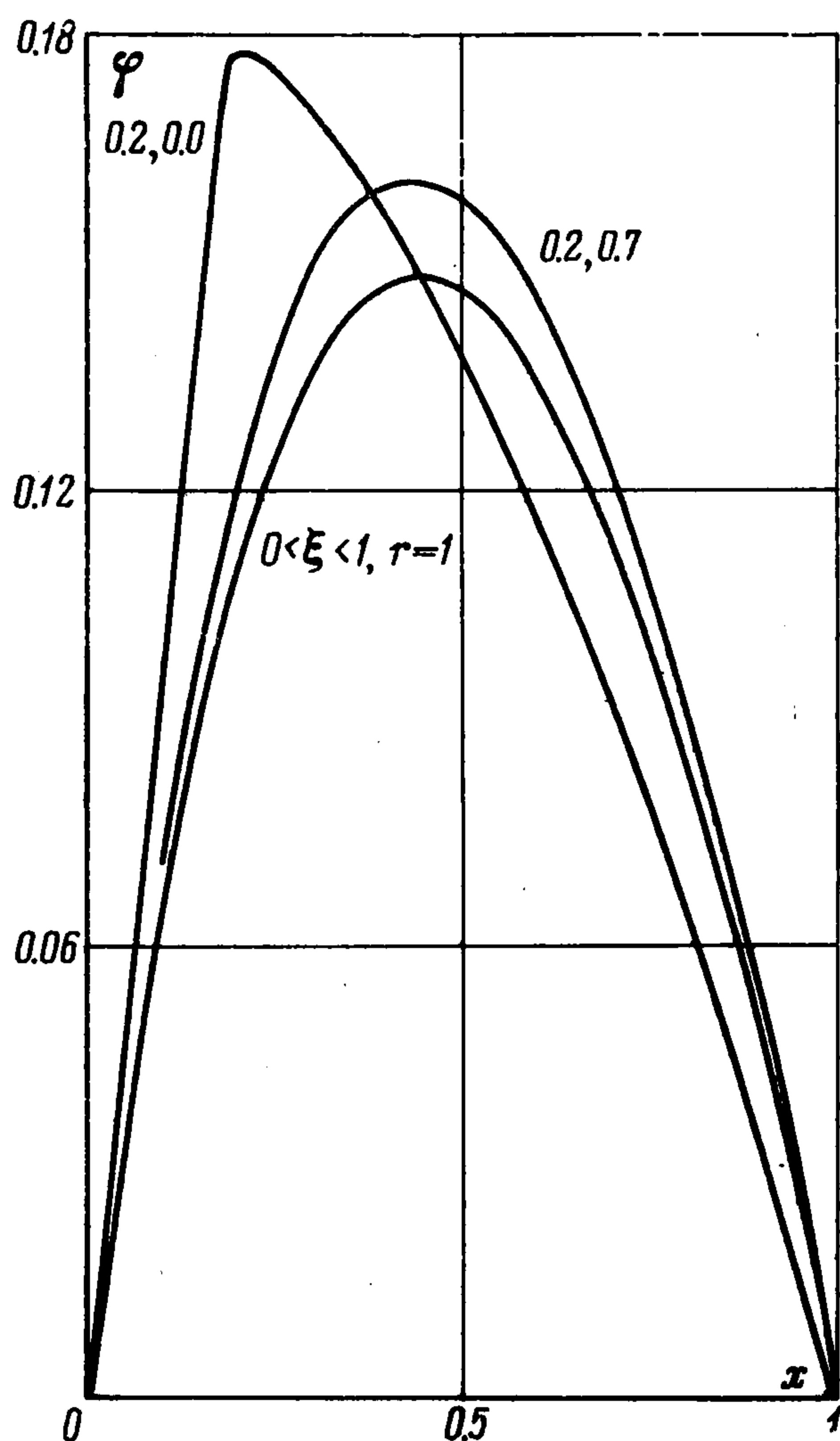
Фиг. 2

Правее кривых 1 соответственно располагаются области I, а левее линий 2 — запрещенные зоны.

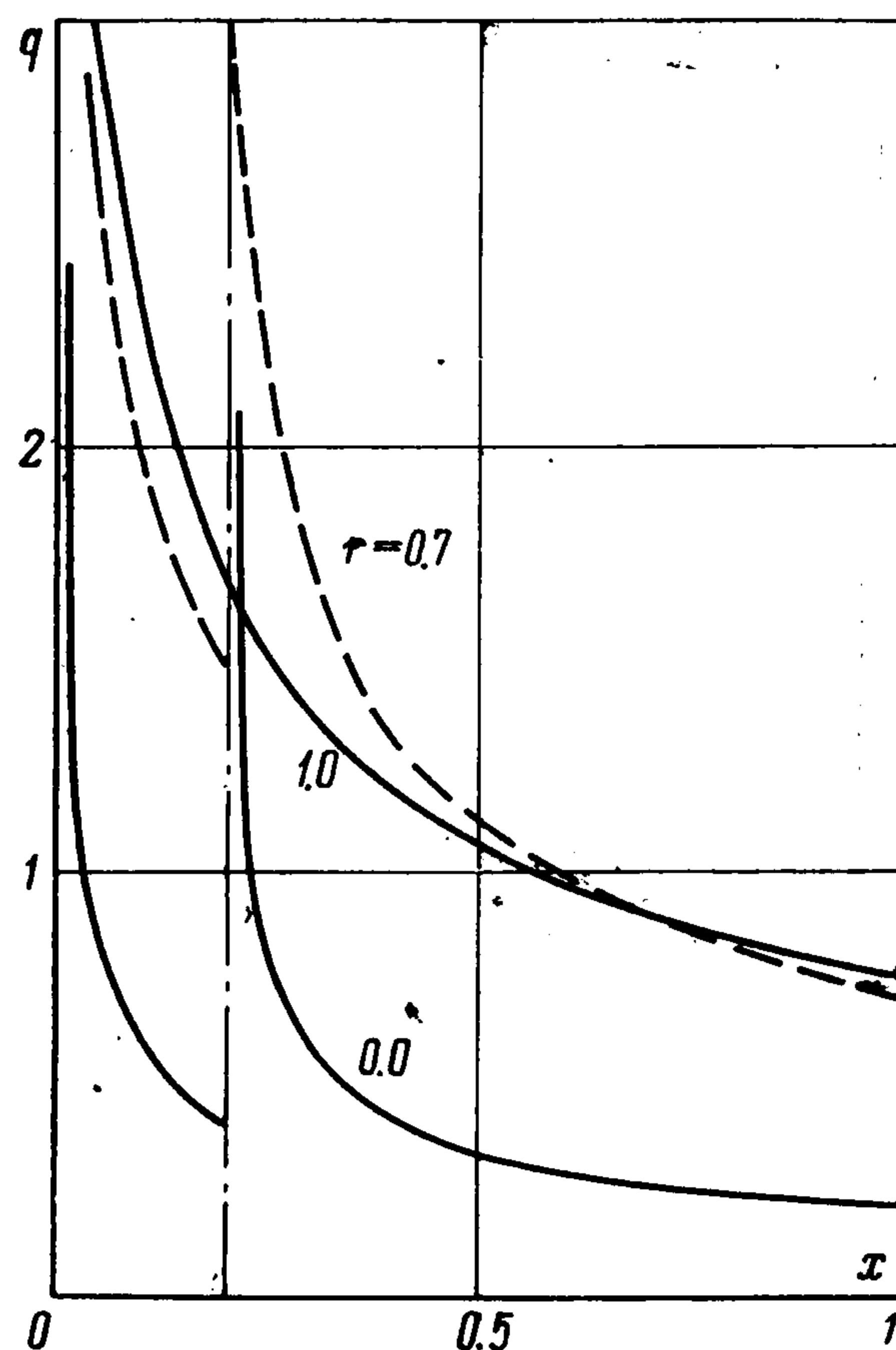
4. Приведем результаты расчетов электрических параметров. На фиг. 3, 4 нанесены соответственно распределения  $\varphi$  и  $q$  при различных парах значений  $(\xi, r)$ ,  $\alpha = 0$ .

Очевидно, что при  $r = 1$  все параметры непрерывны во всем рабочем промежутке. При  $r < 1$  величина  $q$  всегда терпит разрыв на фронте ударной волны и тем больше, чем меньше  $r$  или  $\xi$ , но величина электрического поля при определенных  $(\xi, r)$  может не рваться.

Расчеты показывают, что наличие ударной волны приводит к уменьшению тока между сетками. Чем интенсивней газодинамический разрыв при  $\xi = \text{const}$ , тем ток меньше. Это объясняется тем, что увеличение интенсивности ударной волны способствует более сильному скапливанию



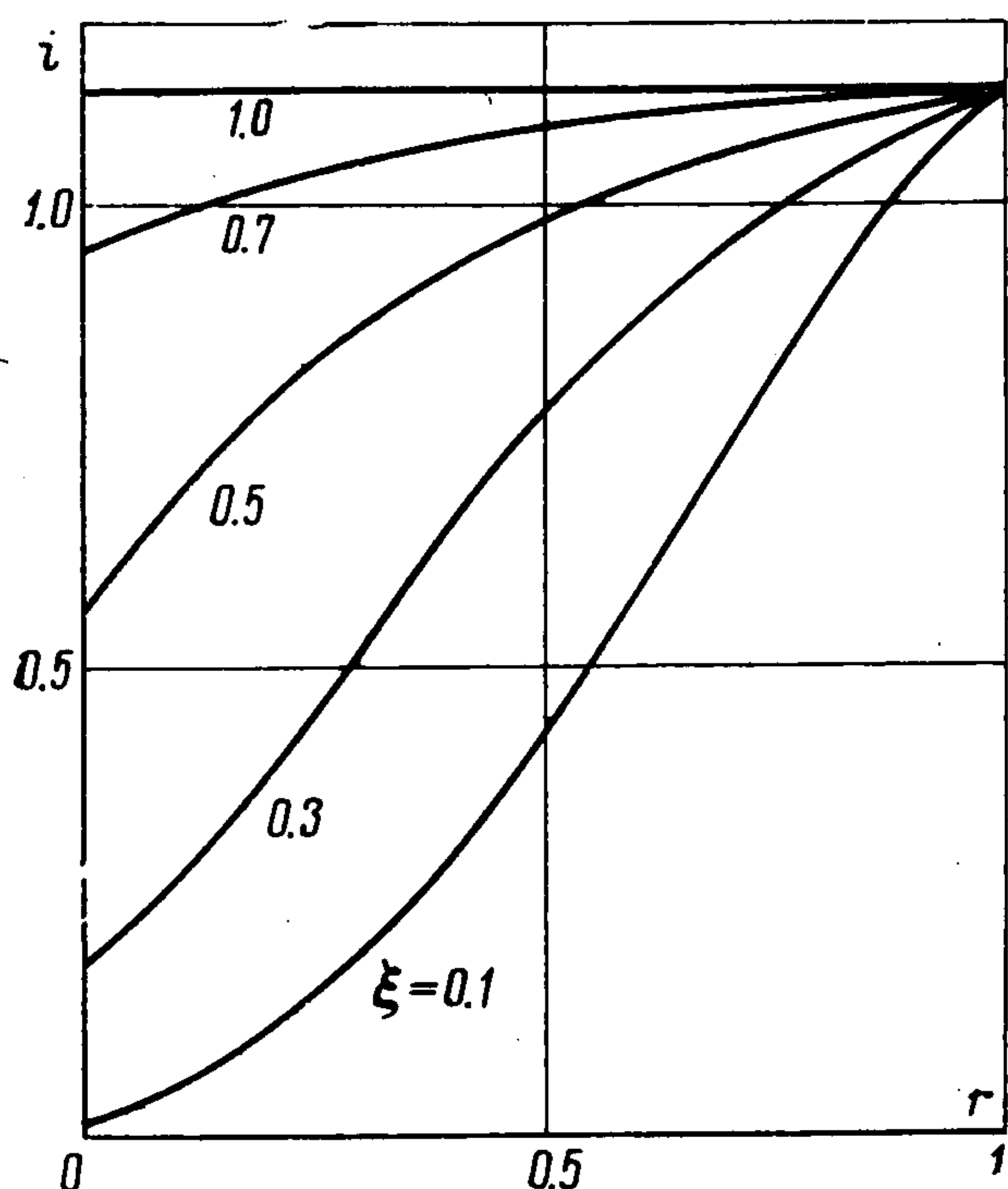
Фиг. 3



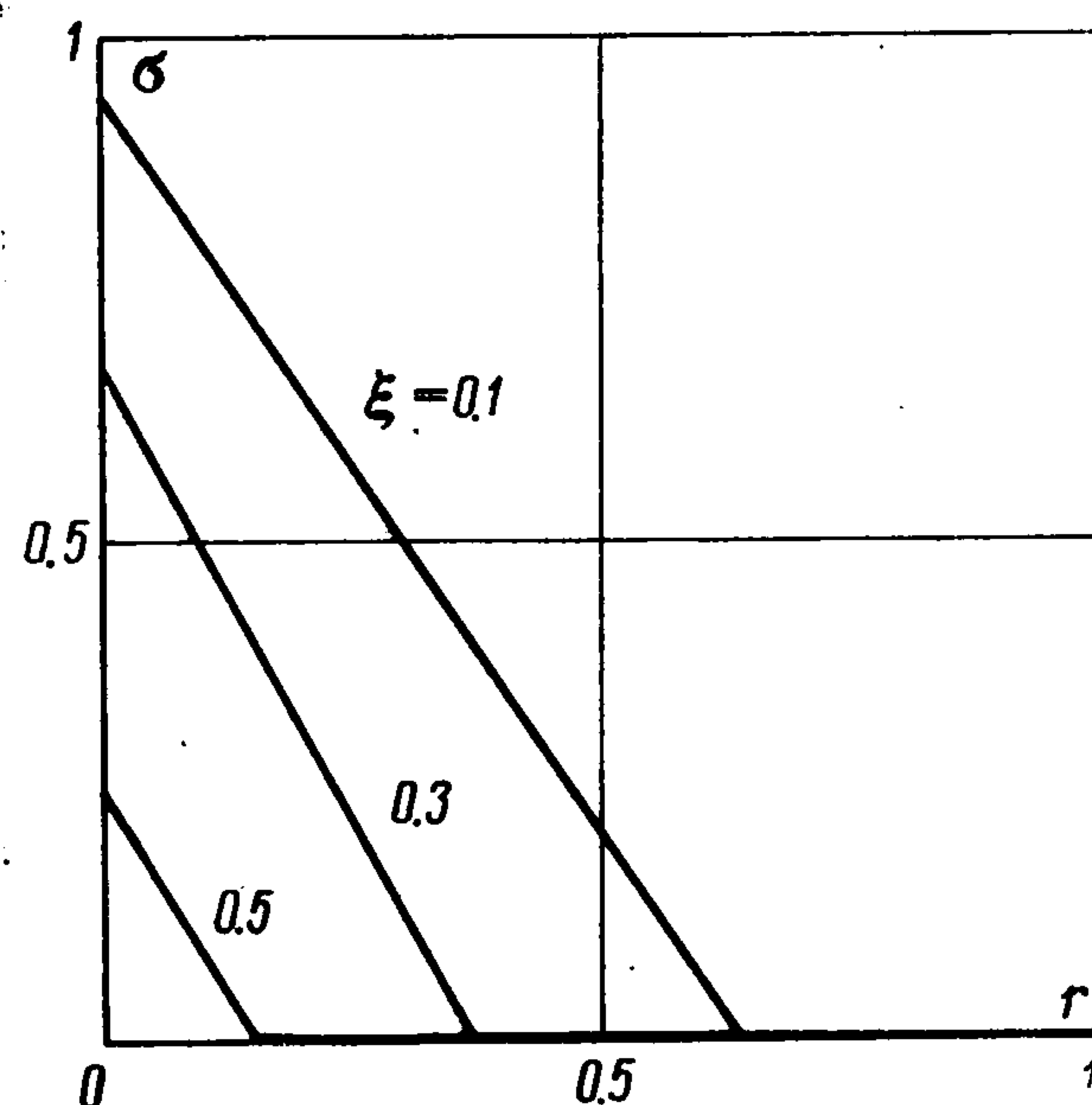
Фиг. 4

заряда за фронтом разрыва. Последнее ведет к увеличению потенциала в промежутке  $0 < x < 1$  и соответственно к росту по абсолютной величине отрицательного электрического поля на начальном участке. Это определяет ограничение величины тока, выносимого из источника. Тот же механизм объясняет увеличение  $\sigma$  на фронте газодинамического разрыва

с ростом его интенсивности  $1/r$ . На фиг. 5, 6 изображены соответственно зависимости  $i(r)$  и  $\sigma(r)$  при различных фиксированных  $\xi$  ( $\alpha = 0$ ). Так как уменьшение  $\xi$  при  $r = \text{const}$  означает фактически смещение фронта газодинамического разрыва в область меньших электрических полей, то



Фиг. 5



Фиг. 6

это ведет к более сильному скоплению заряда за фронтом и, следовательно, к увеличению  $\sigma$ , а также уменьшению  $i$ .

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за постоянное внимание к работе.

Поступила 15 II 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Ватажин А. Б., Лихтер В. А., Шулгин В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971 № 5.