

## ОДНОМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

И. П. Семенова, А. Е. Якубенко

(Москва)

Проводится исследование одномерных стационарных электрогидродинамических течений в каналах с ударными волнами при произвольном параметре взаимодействия. Предполагается, что положение ударной волны задано. Получен критерий существования электрогидродинамических течений с ударными волнами с непрерывной нормальной к фронту волны компонентой электрического поля, а также критерий существования течений со скачком электрического поля в ударной волне. В плоскости скорость — электрическое поле построена диаграмма, позволяющая судить о реализации того или иного течения по значениям скорости и электрического поля перед фронтом ударной волны.

Для совершенного газа построена ударная адиабата в электрогидродинамике.

1. Рассмотрим одномерное стационарное течение сжимаемого, невязкого, нетеплопроводного газа с объемным зарядом в электрическом поле. Будем считать, что скорость газа и электрическое поле направлены вдоль оси  $x$ , и все величины зависят только от координаты  $x$ . Система уравнений электрогидродинамики в этом случае имеет интегралы [1]

$$\rho u = m = \text{const}, \quad mu + p - \frac{E^2}{8\pi} = \Pi = \text{const} \quad (1.1)$$

$$m(c_p T + \frac{1}{2}u^2) + j_0 \Phi = \varepsilon = \text{const}, \quad j_0 = q(u + bE) = \text{const}$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $u$  — скорость ( $u > 0$ ),  $p$  — давление,  $q$  — плотность объемного электрического заряда ( $q > 0$ ),  $E$  — напряженность электрического поля,  $\Phi$  — электрический потенциал,  $j_0$  — плотность электрического тока,  $T$  — температура,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении.

Для исследования одномерных электрогидродинамических течений с ударными волнами будем использовать обычно применяемую в газодинамике методику: зададим положение ударной волны при  $x = \xi$  и в зависимости от положения волны будем находить значения величин на выходе. При этом в сверхзвуковом потоке газодинамические величины могут быть заданы на входе в канал, а для электрического поля формулируется краевая задача ( $\Phi = 0$  при  $x = 0$ ,  $\Phi = \Phi^*$  при  $x = L$ ,  $L$  — длина канала,  $j_0$  — задано). Воспользуемся уравнениями (1.1) для получения соотношений на ударной волне. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m, \quad m u_1 + p_1 - \frac{E_1^2}{8\pi} = m u_2 + p_2 - \frac{E_2^2}{8\pi} = \Pi \\ m(c_p T_1 + \frac{1}{2}u_1^2) = m(c_p T_2 + \frac{1}{2}u_2^2) = \varepsilon_g, \quad j_0 = \text{const} \\ p_2 = \rho_2 R T_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь индексами 1, 2 отмечены величины до и после поверхности разрыва,  $\varepsilon_g$  — газодинамическая энергия. Последнее уравнение (1.2) есть уравнение состояния. При получении уравнений (1.2) было использовано условие непрерывности электрического потенциала  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Параметры перед ударной волной будем считать известными. Для однозначного разрешения уравнений (1.2) необходимо использовать дополнительное соотношение, так как число величин, входящих в (1.2), на единицу больше числа уравнений.

В ряде случаев таким соотношением служит условие непрерывности нормальной к фронту волны составляющей электрического поля  $E_1 = E_2$  при  $x = \xi$ . Однако существуют случаи, когда использование этого условия приводит к противоречию. Действительно, как следует из закона Ома  $j = q(u + bE)$ , в том случае, когда  $E < 0$ ,  $j > 0$ ,  $q > 0$ ,  $u > 0$ , скорость в ударной волне может измениться так сильно, что величина  $u + bE$  при непрерывном электрическом поле изменит знак. Это приводит к нарушению условия непрерывности нормальной составляющей плотности электрического тока. В работе [2] было показано, что в этом случае за ударной волной необходимо требовать выполнение условия  $u_2 = -bE_2$ , что соответствует разрыву нормальной компоненты электрического поля и наличию поверхностного заряда на фронте ударной волны.

В том случае, когда  $j_0 < 0$ ,  $q > 0$ , всегда можно пользоваться условием непрерывности электрического поля. Действительно, если перед ударной волной справедливо неравенство  $u + bE < 0$ , то за фронтом ударной волны это неравенство только усилится, так как при прохождении ударной волны скорость потока уменьшается.

Очевидно, что в случае  $E > 0$  всегда нужно пользоваться условием непрерывности электрического поля.

2. Исследуем соотношения на ударной волне (1.2). Исключая из них величины  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , получим соотношение [1]

$$u^2 - \frac{2\gamma(\Pi + E^2/8\pi)}{m(\gamma + 1)}u + \frac{2(\gamma - 1)}{m(\gamma + 1)}\varepsilon_g = 0 \quad (2.1)$$

Отметим, что уравнение (2.1) не зависит от коэффициента подвижности  $b$ . При фиксированных величинах расхода  $m$  и полного импульса  $\Pi$  соотношение (2.1) дает в плоскости  $uE$  (фиг. 1) семейство линий, зависящих от одного параметра. Кроме того, на фиг. 1 нанесены линии  $M = 1$  и  $M = \infty$  ( $M$  — число Маха). Парабола  $M = 1$  в каждой своей точке пересекается семейством линий (2.1) с вертикальной касательной. Исключение представляет точка  $D$  (особая точка типа седла), через которую проходят две особые кривые семейства (2.1).

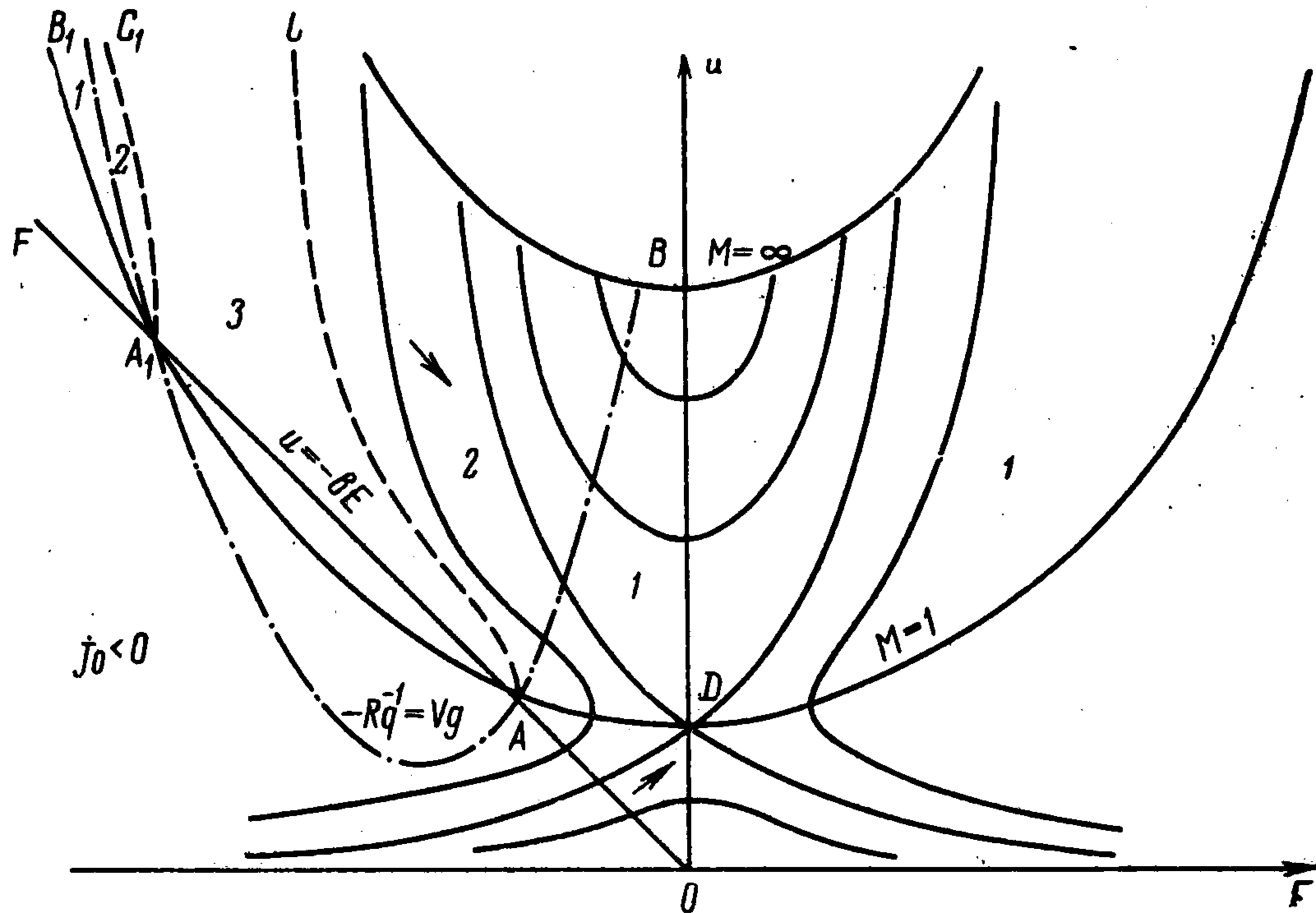
Поясним физический смысл кривых (2.1). Зафиксируем параметр  $\varepsilon_g$ , что соответствует выбору одной из кривых (2.1). Пусть одна из точек этой кривой соответствует состоянию до ударной волны. Все остальные точки кривой соответствуют всем возможным состояниям за ударной волной. Для однозначного выбора состояния за ударной волной необходимо воспользоваться одним из двух дополнительных условий, о которых говорилось выше. Для выяснения вопроса о том, каким условием пользоваться, исключим из уравнения (2.1) величину  $E$ , используя соотношение  $u = -bE$ .

Получим

$$SV(R_q^2 V^2 - 1) - P_g(V) = 0 \quad (2.2)$$

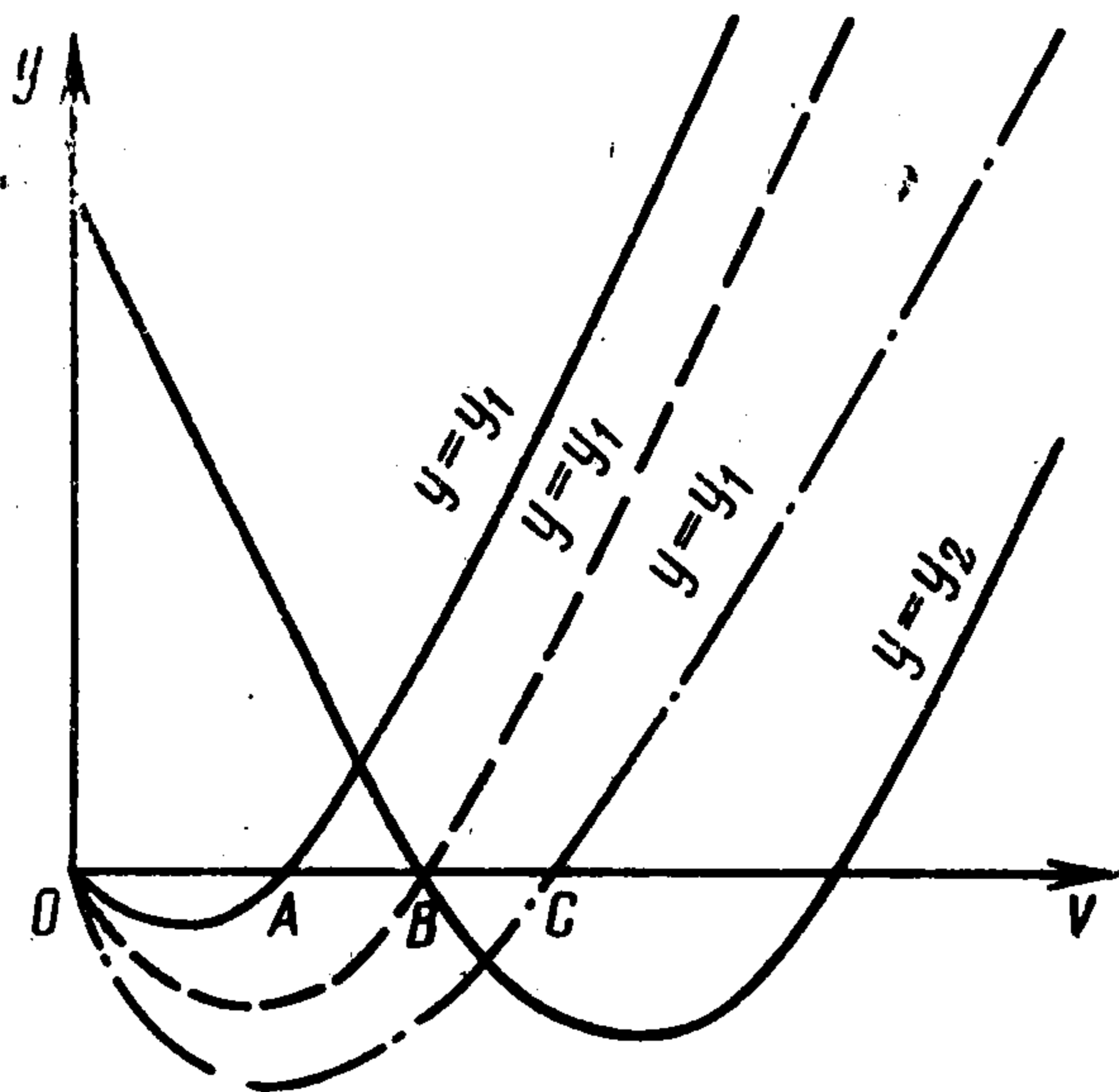
$$S = \frac{E_1^2}{8\pi\rho_1 u_1^2}, \quad R_q = \frac{u_1}{b|E_1|} > 1, \quad V = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$P_g(V) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} V^2 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2}\right) V + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{2} + \frac{1}{M_1^2}\right)$$



Фиг. 1

Зная решение кубического уравнения (2.2), можно определить все параметры за ударной волной. В частном случае при  $S \rightarrow 0$  получаем условие  $P_g(V) = 0$ , которое соответствует газодинамическим скачкам. Полином  $P_g(V)$  имеет два корня  $V = 1$  и  $V = V_g < 1$ .



Фиг. 2

Проведем качественное исследование уравнения (2.2). Рассмотрим поведение функции  $y = y_1 + y_2$ ,  $y_1 = SV(R_q^2 V^2 - 1)$ ,  $y_2 = P_g(V)$  на отрезке  $0 \leq V \leq 1$ . Величина  $y(V)$  на отрезке  $[0, 1]$  меняет знак ( $y(0) < 0$ ,  $y(1) > 0$ , так как  $R_q > 1$ ). Следовательно, на этом отрезке кубический полином (2.2) всегда имеет, по крайней мере, один действительный корень. В случае  $S \geq 1 + 1/\gamma M_1^2$  ( $\Pi < 0$ ) полином (2.2), согласно правилу Декарта, имеет только

положительный действительный корень на отрезке  $[0, 1]$ . Ниже подробно будет исследован случай  $S < 1 + 1/\gamma M_1^2$  ( $\Pi > 0$ ).

На фиг. 2 представлены кривые  $y_2$  и  $y_1$  для различных значений параметра  $R_q$  (сплошная линия соответствует случаю  $R_q^{-1} < V_g$ , пунктирная —  $R_q^{-1} = V_g$ , штрих-пунктирная —  $R_q^{-1} > V_g$ ).

В первом случае ( $R_q^{-1} < V_g$ ) уравнение (2.2) имеет только один корень, расположенный на отрезке  $AB$  ( $R_q^{-1} < V < V_g$ ); плотность по-

верхностного заряда на фронте ударной волны отрицательна ( $\sigma = E_2 - E_1 < 0$ ). Таким образом, использование условия  $u_2 = -bE_2$  за ударной волной приводит к физическому противоречию, и в этом случае необходимо использовать условие непрерывности электрического поля на фронте ударной волны.

Во втором случае ( $R_q^{-1} = V_g$ ) уравнение (2.2) имеет точное решение  $V = V_g = R_q^{-1}$ . Это решение соответствует течению с газодинамической ударной волной, в которой электрическое поле непрерывно и выполнено условие  $u_2 = -bE_2$ .

В третьем случае ( $R_q^{-1} > V_g$ ) уравнение (2.2) на отрезке  $BC$  может иметь один или три действительных корня.

Покажем, что в зависимости от параметров  $S$ ,  $R_q$ ,  $\gamma$ ,  $M$  оно может иметь три корня на отрезке  $BC$ . Действительно, выберем параметры  $R_q$  и  $M$  так, чтобы абсциссы минимумов кривых  $y_1$  и  $y_2$  совпали. Уравнение кривой  $y = y_2$  не зависит от параметра  $S$ , поэтому выбором  $S$  можно добиться касания кривых  $y_1$  и  $y_2$  в точке минимума, что соответствует наличию кратного корня кубического уравнения и служит доказательством сделанного утверждения.

Представим полученные результаты в плоскости  $uE$ . На фиг. 1 штрихпунктиром показана парабола  $V_g = -R_q^{-1}$ , уравнение которой в переменных  $uE$  имеет вид

$$u = bE + \frac{2\gamma}{m(\gamma+1)} \left( \Pi + \frac{E^2}{8\pi} \right) \quad (2.3)$$

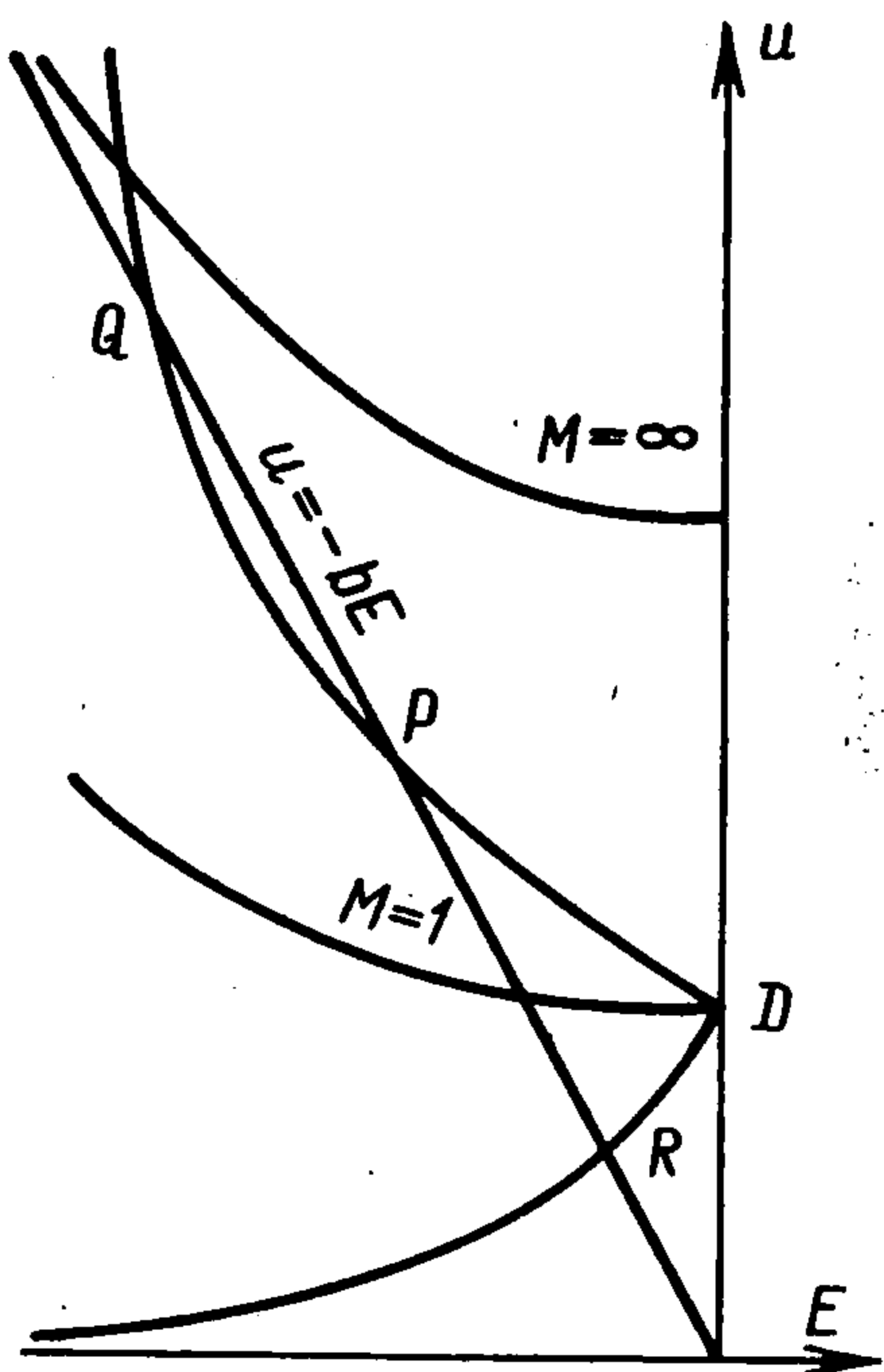
Область в плоскости  $uE$ , расположенная вне параболы (2.3) (область (1) на фиг. 1), соответствует значениям параметров  $u$  и  $E$  перед ударной волной, при которых необходимо использовать в качестве дополнительного соотношения условие непрерывности электрического поля  $E_1 = E_2$ . При этом осуществляются только переходы из сверхзвуковой области в дозвуковую. Область, заключенная внутри параболы, соответствует значениям параметров  $u$  и  $E$  перед ударной волной, при которых нельзя пользоваться условием непрерывности электрического поля в ударной волне. В качестве дополнительного соотношения можно использовать условие  $u_2 = -bE_2$ .

Для наглядности подробно рассмотрим частный случай взаимного расположения кривых  $M = 1$ ,  $M = \infty$ ,  $V_g = -R_q^{-1}$ ,  $u = -bE$ , представленный на фиг. 1. Этот случай соответствует наличию только одного корня полинома (2.2) (каждая кривая семейства (2.1) только один раз пересекает линию  $u = -bE$ ). Области  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (области (2)) ограничены линиями  $M = \infty$ ,  $V_g = -R_q^{-1}$  и кривыми семейства (2.1), проходящими через точки  $A$  и  $A_1$  (пунктирные линии на фиг. 1). Из областей (2) возможны переходы со скачком электрического поля из сверхзвуковой области только в дозвуковую область, причем состояниям за ударной волной соответствуют точки линии  $u = -bE$ , расположенные на отрезках  $AO$  и  $A_1F$ . Течение после ударной волны происходит в дозвуковой области. Направление изменения параметров потока указано стрелками в соответствии с результатами работы [1].

Область  $AA_1C_1C$  (область (3)) соответствует переходам из сверхзвуковых состояний до ударной волны в сверхзвуковые состояния за волной. Такие переходы невозможны [2].

Помимо случая, представленного на фиг. 1, возможны случаи такого взаимного расположения линий  $M = 1$ ,  $M = \infty$ ,  $V_g = -R_q^{-1}$  и  $u = -bE$ , который соответству-

ет наличию трех корней кубического полинома (2.2) (кривые семейства (2.1) могут три раза пересечь прямую  $u = -bE$ ). Докажем, что в этом случае дозвуковой корень может быть только один. Из (2.1) следует, что при  $M < 1$  производная  $u_E'$  положительна вдоль линий семейства. Линия  $u = -bE$  имеет всюду отрицательный наклон. Отсюда следует, что если есть пересечение в дозвуковой области, то оно единственно.



Фиг. 3

Из фиг. 3 видно, что особое решение при  $M < 1$  пересекает линию  $u = -bE$  при любых значениях подвижности  $b$ . Покажем, что возможны случаи, когда из трех корней уравнения (2.2) один дозвуковой, а два сверхзвуковых. При этом достаточно показать, что при  $M > 1$  особая кривая уравнения (2.1) пересечет линию  $u = -bE$ . На особой кривой в сверхзвуковой области возьмем произвольную точку  $P$ . Проведем через начало координат  $O$  и точку  $P$  прямую линию. Эта линия есть прямая  $u = -bE$  при соответствующем выборе коэффициента подвижности  $b$  (он определяется наклоном этой прямой). Такое построение всегда можно провести, так как уравнение особой линии (2.1) от  $b$  не зависит. Было показано, что особое решение пересекает линию  $u = -bE$  в дозвуковой области только один раз (точка  $R$ ), а по построению обязательно пересекает ее в сверхзвуковой области (точка  $P$ ), следовательно, оно должно пересечь прямую третий раз в сверхзвуковой области (точка  $Q$ ).

3. Проведенное выше исследование может быть применено для построения ударной адиабаты в плоскости  $P, V$ . Запишем уравнения сохранения импульса и энергии в безразмерной форме

$$P = 1 + \gamma M_1^2 (1 - V) + S^* (R_q^2 V^2 - 1) \quad P = p_2/p_1 \quad (3.1)$$

$$P = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) \frac{1}{V} - \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 V, \quad S^* = \frac{E_1^2}{8\pi p_1}$$

Исключая из уравнений (3.1)  $M_1^2$ , получим

$$P = \frac{\gamma + 1 - (\gamma - 1)V - S^*(\gamma - 1)(1 + V)(R_q^2 V^2 - 1)}{(\gamma + 1)V - (\gamma - 1)} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) дает семейство ударных адиабат в электрогидродинамике, зависящих от двух параметров  $S^*$  и  $R_q$

Исследование ударной адиабаты в электрогидродинамике с условием  $u_2 = -bE_2$  было проведено В. В. Гогосовым и В. А. Полянским в работе [3]. При исследовании ударной адиабаты предполагалось, что  $R_q^2 V^2 \ll 1$ . Однако это неравенство никогда не имеет места, так как величина  $R_q^2 V^2$  ограничена снизу  $R_q^2 V^2 \geq R_q^2 V_q^2 \geq R_q^2 (\gamma - 1)^2 / (\gamma + 1)^2$ , причем  $R_q^2$  всегда больше единицы. Сделанное предположение привело авторов [3] к неправильным выводам.

Полагая в (3.2)  $V = 1$ , получим  $P_1 = 1 - S^*(\gamma - 1)(R_q^2 - 1)$ . Это означает, что ударная адиабата (3.2) при  $V = 1$  проходит ниже адиабаты Гюгонио. Адиабата (3.2) имеет вертикальную асимптоту, совпадающую с асимптотой адиабаты Гюгонио  $V = V^* = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ . Поведение адиабаты при  $V < 1$  зависит от значений параметров  $S^*$  и  $R_q$ .

В том случае, когда  $R_q^{-1} < V^*$ , адиабата (3.2) расположена ниже адиабаты Гюгонио при  $V^* < V < 1$  при любых  $S^*$ . Как было показано выше, использование условия  $u_2 = -bE_2$  приводит в этом случае к образованию отрицательного поверхностного заряда на фронте волны для всех  $V$  в указанном диапазоне, что не имеет физического смысла. Поэтому при  $R_q^{-1} < V^*$  необходимо пользоваться адиабатой Гюгонио (линия  $ABD'C$  на фиг. 4). В том случае, когда  $R_q^{-1} > V^*$ , адиабата Гюгонио пересечется с электрогидродинамической адиабатой  $A'BD''C$  в точке  $B$  ( $V = V_1 = R_q^{-1}$ ). При значениях  $V < V_1$  электрогидродинамическая адиабата расположена выше адиабаты Гюгонио (участок  $BD''C$  на фиг. 4). Таким образом, при фиксированных значениях параметров  $S^*$  и  $R_q$  и произвольном  $M_1$  ударная адиабата в электрогидродинамике состоит из двух кусков: при  $V > V_1$ , она совпадает с адиабатой Гюгонио (отрезок  $AB$  фиг. 4), при  $V < V_1$  она определяется уравнением (3.2) (отрезок  $BD''C$  фиг. 4).

Пусть точка  $A$  соответствует состоянию до ударной волны. Зафиксируем число  $M_1$  и вычислим величину  $V_g$

$$V_g = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma - 1}{2} + \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (3.3)$$

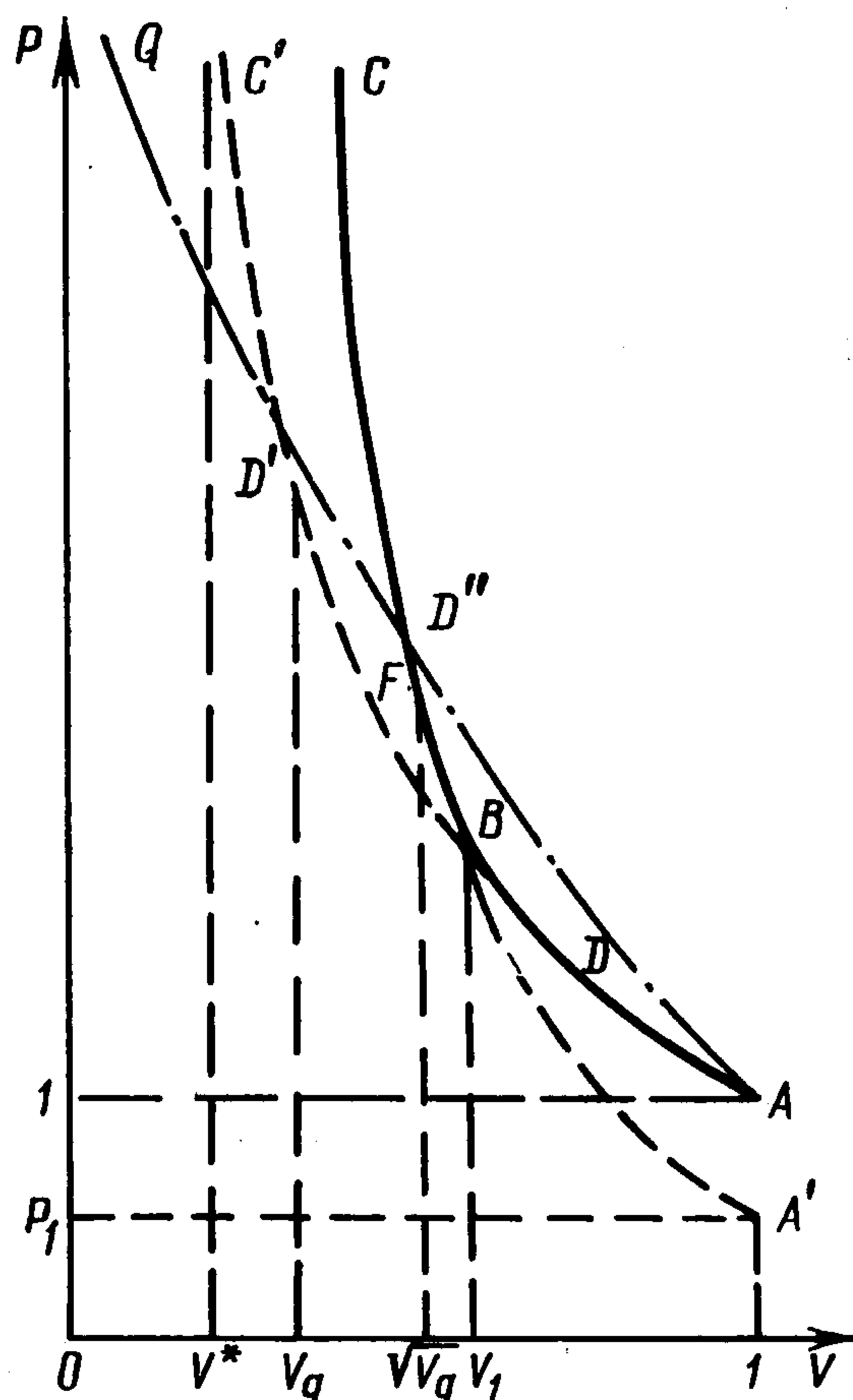
Если  $V_g \geq V_1$ , то надо пользоваться для вычисления величин за ударной волной обычными газодинамическими соотношениями (точка  $D$  на фиг. 4 соответствует состоянию за волной). Если  $V_g < V_1$  (точка  $D'$  на адиабате Гюгонио), то для определения состояния за ударной волной необходимо пользоваться адиабатой (3.2) и уравнением сохранения энергии, которое не зависит от параметров  $R_q$  и  $S^*$ . Проводя через точку  $A$  кривую, определяемую уравнением энергии (линии  $AD''D'Q$ ), найдем точку ее пересечения с адиабатой (3.2) (точка  $D''$  на фиг. 4).

Вообще говоря, таких точек может быть три. Это зависит от значения параметров  $S^*$ ,  $R_q$ ,  $M_1$ , как было указано выше. Точка  $D''$  соответствует в этом случае состоянию за ударной волной. При фиксированном значении  $M_1$  можно нанести еще одну характерную точку на адиабате, соответствующую значению  $M_2 = 1$  (точка  $F$ ). В этой точке  $V = \sqrt{V_g}$ . Действительно, из уравнения энергии следует

$$1 - M_2^2 = \frac{T_1}{T_2} \left[ 1 + M_1^2 \left( \frac{\gamma - 1}{2} - \frac{\gamma + 1}{2} V^2 \right) \right]$$

Полагая  $M_2 = 1$ , имеем  $V = \sqrt{V_g}$ . Точки, расположенные выше  $F$ , соответствуют дозвуковым состояниям за ударной волной.

Нетрудно видеть, что в электрогидродинамических ударных волнах энтропия всегда возрастает.



Фиг. 4

Скачкам разряжения в электрогидродинамике соответствуют точки на ударной адиабате, расположенные правее точки  $A'$ . При этом осуществляются переходы из сверхзвукового режима в сверхзвуковой режим. Такие переходы неэволюционны [3], на фронте ударной волны образуется при этом отрицательный поверхностный заряд, кроме того, энтропия в таких скачках убывает, так как адиабата (3.2) расположена в этой области всюду ниже адиабаты Пуассона.

Действительно, будем искать точку пересечения адиабаты (3.2) и адиабаты Пуассона  $PV^\gamma = 1$  в области  $V > 1$ . Имеем

$$y(V) = S^* V^\gamma (R_q^2 V^2 - 1) + V^{\gamma+1} - 1 + (\gamma - 1) V (V^{\gamma-1} - 1) / (\gamma - 1) = 0$$

Видно, что при  $V > 1$  и  $\gamma > 1$  функция  $y(V)$  всегда положительна, и уравнение (3.4) не имеет положительных корней в указанной области. Поскольку при  $V = 1$  адиабата (3.2) расположена ниже адиабаты Пуассона, то она будет расположена ниже при всех  $V > 1$ .

4. В заключение дадим краткую сводку результатов, доказательство которых было приведено выше. Перечень этих результатов может служить практическим руководством при проведении численных расчетов одномерных электрогидродинамических течений с ударными волнами.

Пусть положение ударной волны задано. Будем считать все величины до скачка известными. По значениям этих величин вычислим значения безразмерных параметров  $S$ ,  $R_q$ ,  $M_1$  и  $V_g$ . Если  $R_q^{-1} \leq V_g$ , то электрическое поле будет непрерывным на ударной волне, при этом  $V = u_2 / u_1 = V_g$  и определяется формулой (3.3).

Если  $R_q^{-1} > V_g$ , то электрическое поле терпит разрыв на ударной волне. Поле за волной определяется соотношением  $u_2 = -bE_2$ . Величина  $V$  находится из решения кубического уравнения (2.2).

Было показано, что корни этого уравнения находятся в интервале  $V_g < V < R_q^{-1}$ . Если  $R_q^{-1} < \sqrt{V_g}$ , то уравнение (2.2) имеет только одно решение, соответствующее переходу из сверхзвукового в дозвуковой режим. В случае  $R_q^{-1} > \sqrt{V_g}$  можно выписать критерий существования дозвукового корня уравнения (2.2). Этот критерий может быть получен следующим образом: при  $V = V_g$  кубический полином (2.2) принимает отрицательное значение и для того, чтобы существовал дозвуковой корень, необходимо, чтобы при  $V = \sqrt{V_g}$  кубический полином принимал положительное значение. Это приводит к условию

$$R_q^2 > \frac{P_g(\sqrt{V_g}) + S\sqrt{V_g}}{SV^{1.5}} \quad (4.1)$$

При малом параметре взаимодействия  $S$  условие (4.1) всегда выполнено, так как  $P_g(\sqrt{V_g}) < 0$  и в этом случае всегда есть один дозвуковой корень, который близок к газодинамическому корню. Два других корня расположены при  $V > 1$  (соответствуют скачкам разряжения).

Если условие (4.1) не выполнено, то все три корня расположены в сверхзвуковой области. Это, по-видимому, означает, что при таких  $S$ ,  $R_q$ ,  $M_1$  стационарные течения с ударными волнами не осуществляются.

В том случае, когда условие (4.1) выполнено, кубическое уравнение, помимо дозвукового корня  $V = V_1$ , может иметь еще два сверхзвуковых

корня  $V_2$  и  $V_3$ . В работе [2] показано, что если все три корня соответствуют скачкам уплотнения, то такие скачки не реализуются, так как они не имеют структуры. Это означает, что нельзя ограничиться нахождением дозвукового корня. Необходимо найти два других корня и проверить условие  $V_i < 1$  ( $i = 2, 3$ ).

При проведении расчетов одномерных электрогидродинамических течений с ударными волнами возникает необходимость интегрирования уравнений движения [1]

$$\frac{du}{dx} = \frac{4\pi j_0 E M^2 (u - u_1)}{m u (M^2 - 1) (u + bE)}, \quad \frac{dE}{dx} = \frac{4\pi j_0}{u + bE}, \quad u_1 = (\gamma - 1) bE \quad (4.2)$$

за ударной волной при условии  $u = -bE$ . При этом величины  $u'$  и  $E'$  стремятся к бесконечности. Разложение решения уравнений (4.2) вблизи особенности дает выражение для скорости и электрического поля, которыми можно пользоваться при расчетах течений за ударной волной в окрестности точки  $x = \xi$

$$u = u_2 + A \sqrt{\frac{8\pi j_0 (x - \xi)}{A + b}}, \quad E = -\frac{u_2}{b} + \sqrt{\frac{8\pi j_0 (x - \xi)}{A + b}}$$

$$A = \frac{\gamma E_2 M_2^2}{4\pi m (M_2^2 - 1)}$$

При  $M_2 < 1$ , всегда  $A > 0$  и такое разложение возможно.

Авторы благодарят А. Б. Ватажина и Г. А. Любимова за полезные обсуждения работы.

Поступила 11 II 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
3. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике, ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.