

## СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

В. В. Гогосов, В. А. Полянский

(Москва)

Проводится анализ структуры электрогидродинамических ударных волн в случае малых чисел Прандтля, когда температуру среды можно считать постоянной, и в случае больших чисел Прандтля, когда процессами, связанными с теплопроводностью, можно пренебречь. Параметр взаимодействия — произволен.

Показано, что когда знак нормальной к фронту ударной волны составляющей электрического поля  $E_I^*$  перед волной совпадает со знаком нормальной к фронту составляющей скорости  $u_I^*$  (произведение  $u_I^* E_I^* > 0$ , всюду в работе для определенности предполагается  $u_I^* > 0$ ), то ударная волна всегда имеет структуру и нормальная к фронту составляющая электрического поля непрерывна на ударной волне. Если произведение  $u_I^* E_I^* < 0$ , а плотность тока  $j^* > 0$ , то структура ударной волны существует не при всех значениях параметров перед фронтом волны. Из анализа структуры, если последняя существует, следует, что в этом случае величина электрического поля за фронтом волны либо равна величине поля перед фронтом ( $E_{II}^* = E_I^*$ ), либо связана со скоростью соотношением  $u_{II}^* + bE_{II}^* = 0$ . Найдены области изменения параметров перед фронтом волны, в которых осуществляется тот или иной случай. Эти соотношения позволяют замкнуть систему уравнений на фронте электрогидродинамической ударной волны, выписанную в работе [1].

Указан класс эволюционных ударных волн, которые не имеют структуры. Из исследования структуры, а также из анализа эволюционности вытекает, что ударные волны в электрогидродинамике всегда есть волны сжатия.

В случае, если скорость и электрическое поле за фронтом волны связаны соотношением  $u_{II}^* + bE_{II}^* = 0$ , систему уравнений на фронте ударной волны можно свести к одному уравнению третьей степени относительно скорости за фронтом волны. Если наименьший из трех возможных действительных корней этого уравнения больше скорости звука за фронтом волны, то ударная волна не имеет структуры и неэволюционна. Когда наименьший корень меньше скорости звука, указан диапазон параметров перед фронтом, при котором волна имеет структуру. Два других корня кубического уравнения соответствуют неэволюционным ударным волнам, которые не имеют структуры. В случае, когда кубическое уравнение имеет один действительный корень, ударная волна всегда имеет структуру, если величина корня меньше скорости звука за фронтом волны (волна эволюционна) и не имеет структуры в противоположном случае.

Если  $u_I^* E_I^* < 0$ , плотность тока  $j^* < 0$  и  $u_I^* + bE_I^* \neq 0$ , то из анализа структуры ударных волн следует, что электрическое поле на фронте волны непрерывно. Если  $u_I^* + bE_I^* = 0$ , то поле на фронте волны может терпеть разрыв. При этом для определения параметров за фронтом нормальную составляющую поля за фронтом  $E_{II}^*$  (или какой-либо другой параметр за фронтом) нужно задавать. Указаны пределы, в которых величина  $E_{II}^*$  может быть задана. Если при этом  $u_{II}^* + bE_{II}^* \neq 0$ , то в таких ударных волнах скорость перед фронтом больше, а скорость за фронтом меньше скорости звука. Если  $u_{II}^* + bE_{II}^* = 0$ , то скорость среды впереди и за фронтом волны сверхзвуковая. Все волны указанного типа имеют структуру и эволюционны.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим стационарное течение газа с положительным объемным зарядом в электрическом поле в приближении элект-

рогидродинамики [2]. Направим ось  $x$  по скорости потока и будем считать, это электрическое поле имеет только составляющую, параллельную оси  $x$ . Пусть все параметры течения зависят только от  $x$ . Уравнения, описывающие такое течение с учетом вязкости и теплопроводности, в безразмерной форме могут быть записаны в виде [1]

$$\rho u = 1, \quad l \frac{du}{d\zeta} = u + \frac{1}{\gamma M_1^2} \frac{T}{u} - SE^2 - \Pi, \quad \Pi = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\frac{3l}{4(\gamma-1)M_1^2 Pr} \frac{dT}{d\zeta} + lu \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2} T + \frac{1}{2} u^2 + \quad (1.2)$$

$$+ 2SJ(\varphi - \varphi_1) - \Sigma, \quad p = \rho T, \quad \Sigma = \text{const}$$

$$\frac{dE}{d\zeta} = \frac{\delta}{E + R_q u}, \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = -QE, \quad R_q J = q(E + R_q u), \quad J = \text{const} \quad (1.3)$$

Безразмерные параметры, входящие в уравнения (1.1)–(1.3), определяются формулами

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_1^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_1^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_1^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_1^*}, \quad E = \frac{E^*}{E_1^*}$$

$$q = \frac{q^*}{q_1^*}, \quad \varphi = \frac{4\pi q_1^* \varphi^*}{E_1^{*2}}, \quad M_1 = \frac{u_1^*}{a_1^*}, \quad a_1^{*2} = \frac{\gamma p_1^*}{\rho_1^*}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad S = \frac{E_1^{*2}}{8\pi \rho_1^* u_1^{*2}}, \quad Q = \frac{4\pi q_1^* L}{E_1^*} \quad (1.4)$$

$$J = \frac{j_1^*}{q_1^* u_1^*}, \quad R_q = \frac{u_1^*}{b E_1^*}, \quad Pr = \frac{c_p \eta}{\kappa}$$

$$\delta = R_q Q J = \frac{4\pi j_1^* L}{b E_1^{*2}}, \quad \zeta = \frac{x}{L}, \quad l = \frac{\lambda}{L}, \quad \lambda = \frac{4\eta}{3\rho_1^* u_1^*}$$

Здесь  $\rho^*$ ,  $u^*$ ,  $p^*$ ,  $T^*$  — соответственно размерные плотность, скорость, давление и температура среды,  $q^*$ ,  $j^*$ ,  $E^*$ ,  $\varphi^*$  — соответственно размерные плотность объемного заряда, плотность тока, напряженность электрического поля и электрический потенциал,  $b$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$  — коэффициенты подвижности, вязкости и теплопроводности, которые в дальнейшем считаются постоянными,  $c_p$ ,  $c_v$  — удельные теплоемкости,  $L$  — величина, имеющая размерность длины.

Индексом 1 обозначены параметры в одной из точек потока, где членами, стоящими в левых частях второго уравнения (1.1) и первого уравнения (1.2), связанными с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь. Это означает, что в этой точке вклад плотности потока импульса за счет вязкости и плотности потока тепла за счет теплопроводности и работы вязких сил в полную плотность потока импульса и плотность потока энергии пренебрежимо мал. При этом постоянные интегрирования  $\Pi$  и  $\Sigma$ , определенные по значениям параметров течения в этой точке, равны

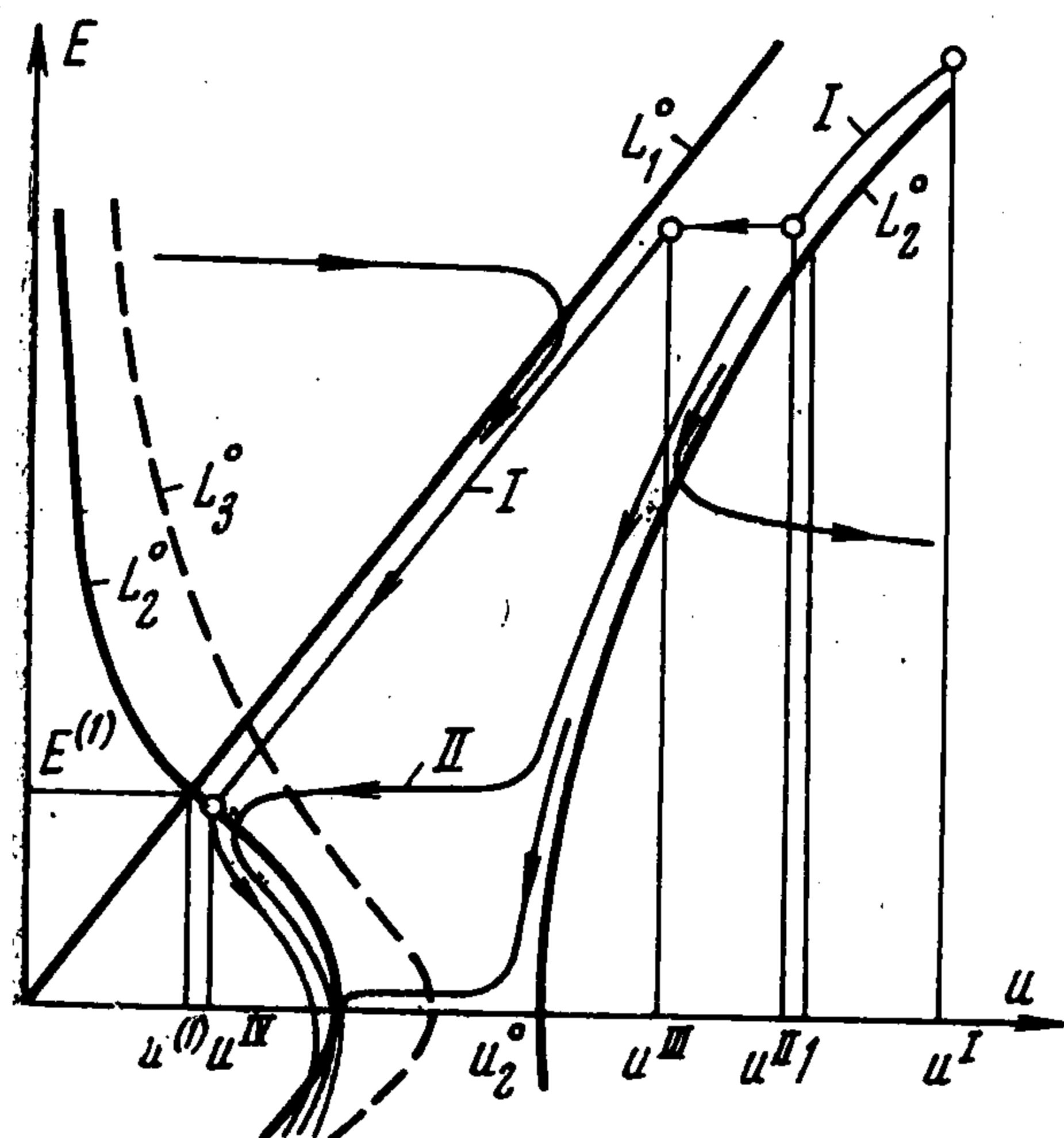
$$\Pi = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} - S, \quad \Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2}$$

В принятом приближении константы  $\Pi$  и  $\Sigma$  совпадают с безразмерными плотностями потока импульса и газодинамической энергии в невязком и нетеплопроводном течении.

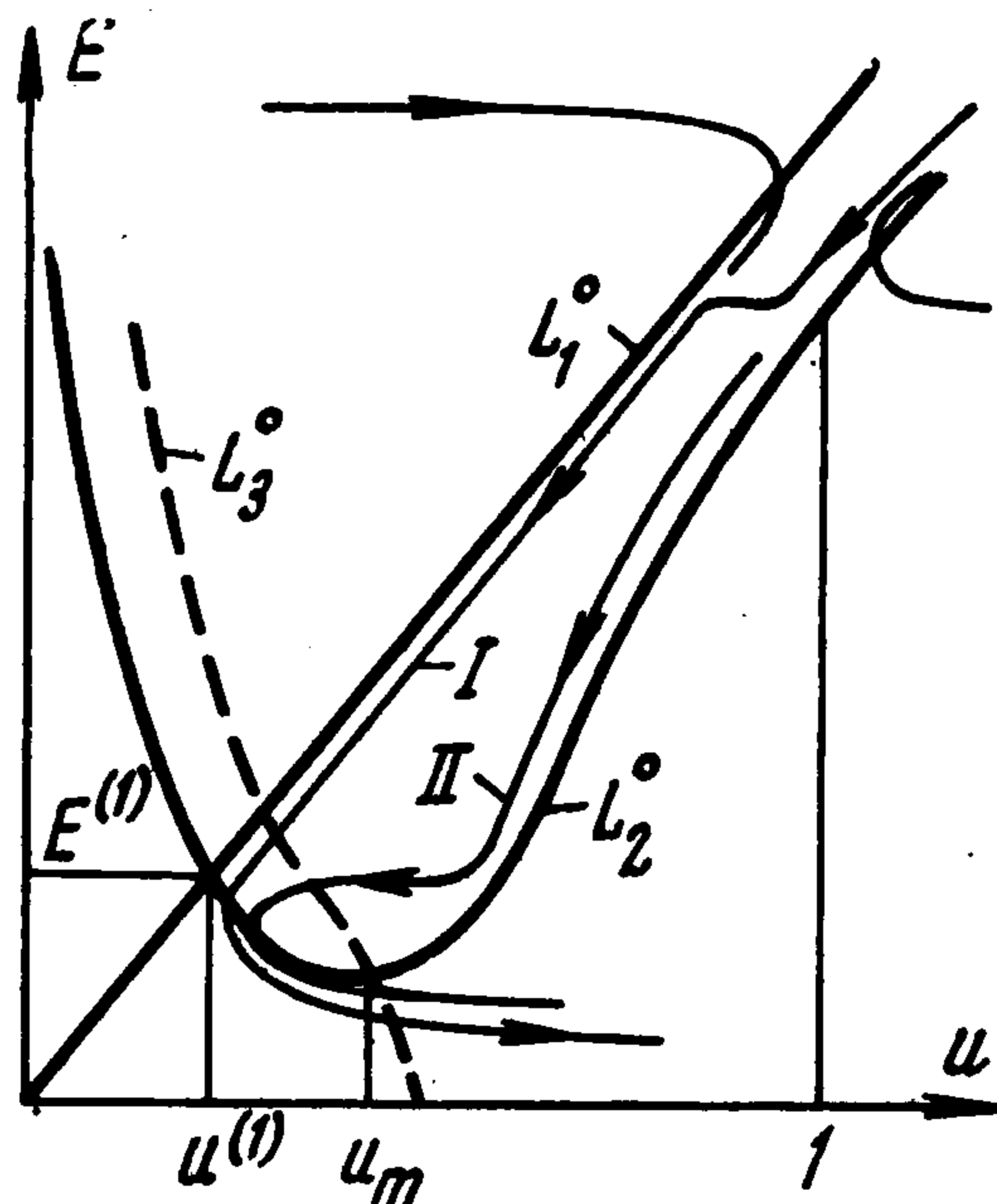
В дальнейшем имеется в виду исследовать структуру электрогидродинамической ударной волны. Для этого необходимо знать поведение интегральных кривых уравнений (1.1)—(1.3). Будут рассмотрены два случая: величина  $Pr \ll 1$  и  $Pr \gg 1$ . Первый случай соответствует большому коэффициенту теплопроводности среды, тогда первое уравнение (1.2) можно заменить соотношением  $T = 1$ . Второй случай соответствует малому коэффициенту теплопроводности, и тогда в первом уравнении (1.2) можно пренебречь членом, содержащим  $dT/d\xi$ .

Известно [1], что система соотношений на ударной волне в электрогидродинамике незамкнута: не хватает уравнений для определения нормальной к фронту разрыва составляющей электрического поля  $E_{II}^*$  за фронтом ударной волны. Здесь и далее значения параметров перед и за фронтом ударной волны обозначаются нижними индексами I и II. Недостающее соотношение было найдено в работе [1]. При этом существенно использовалось, что структура ударной волны существует, а скорость монотонно падает внутри структуры волны, что всегда выполняется, например, когда параметр взаимодействия мал. В работе [1] показано, что при  $u^* > 0, j_1^* > 0$ , когда электрическое поле перед фронтом волны  $E_I^* > 0$ , то  $E_{II}^* = E_I^*$ . Если  $E_I^* < 0$  (газ течет против электрического поля), то возможны два случая: либо  $E_{II}^* = E_I^*$  (когда  $u_{II}^* + bE_I^* > 0$ ), либо  $E_{II}^* = -u_{II}^*/b$  (когда  $u_{II}^* + bE_I^* < 0$ ).

Ниже из анализа структуры ударной волны будет найдено недостающее соотношение на фронте ударной волны в случае произвольного параметра взаимодействия.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Структура ударной волны в газе с большим коэффициентом теплопроводности. Исследуем поведение интегральных кривых уравнений (1.1), (1.3) и  $T = 1$  в полуплоскости  $uE, u > 0$ . Разделив первое уравнение (1.3) на второе уравнение (1.1), получим

$$\frac{dE}{du} = \frac{\varepsilon}{(E + R_q u)(u + M_t^{-2} u^{-1} - SE^2 - \Pi_t)}, \quad \varepsilon = \delta l$$

$$M_t = u_1^* a_t^{*-1}, \quad \Pi_t = 1 + M_t^{-2} - S, \quad a_t^{*2} = p_1^* \rho_1^{*-1} \quad (2.1)$$

Здесь  $a_t^*$  — изотермическая скорость звука,  $q^* > 0, u_1^* > 0$ . Пусть ток  $j_1^* > 0$ , поле  $E_1^* < 0, M_t > 1$  (случай, когда ток  $j_1^* < 0$ , рассматривается ниже). При этом электрическое число Рейнольдса  $R_q < 0$ , вели-

чины  $Q < 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Из условия  $J = 1 + R_q^{-1} > 0$  следует, что  $|R_q| > 1$ , поэтому величина  $J \lesssim 1$ . Параметр  $\lambda$  равен по порядку величины длине свободного пробега. Нетрудно видеть [1], что  $\varepsilon = 4\pi q_1^* \lambda R_q J / E_1^* \ll 1$ .

Обозначим

$$L_1 = E + R_q u, \quad L_2 = u + \frac{1}{M_t^2 u} - SE^2 - \Pi_t \quad (2.2)$$

Построим в рассматриваемой полуплоскости линии  $L_1 = 0$  и  $L_2 = 0$  (фиг. 1—4). Эти линии в дальнейшем будем обозначать соответственно  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . Расположение этих линий определяется параметрами  $M_t$ ,  $R_q$  и  $S$ . Нетрудно видеть, что в размерной плоскости  $u^* E^*$  расположение линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  зависит от параметров  $b$ ,  $m^*$ ,  $\Pi^*$ ,  $a_t^*$ , где  $m^* = \rho_1^* u_1^*$ ,  $\Pi^* = m^* u_1^* + a_t^{*2} \frac{m^*}{u_1^*} - \frac{1}{8\pi} E_1^{*2}$ .

На линиях  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  интегральные кривые уравнения (2.1) имеют вертикальные касательные. Линия  $L_2^\circ$  имеет вертикальную асимптоту  $u = 0$  и проходит через точки  $u = 1$ ,  $E = \pm 1$ . При  $u \rightarrow \infty$  на линии  $L_2^\circ$  поле  $E \sim \pm (u/S)^{1/2}$ . В зависимости от значений параметров  $S$  и  $M_t$  линия  $L_2^\circ$  может иметь различный вид. При  $S < (1 - M_t^{-1})^2$  линия  $L_2^\circ$  состоит из двух ветвей, которые пересекают ось  $u$  в точках

$$u_{1,2}^\circ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{M_t^2} - S \right) \mp \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{M_t^2} - S \right)^2 - \frac{1}{M_t^2} \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

В этих точках линия  $L_2^\circ$  имеет вертикальные касательные. При  $S \ll 1$  величины  $u_1^\circ = 1/M_t^2$ ,  $u_2^\circ = 1$ . Если  $S = (1 - M_t^{-1})^2$ , обе ветви кривой  $L_2^\circ$  соединяются в точке  $u_{1,2}^\circ = 1/M_t$ , являющейся точкой пересечения линии  $L_2^\circ$  с осью  $u$ . С увеличением параметра взаимодействия  $S$  (при  $S > (1 - M_t^{-1})^2$ ) ветви кривой  $L_2^\circ$  снова разделяются, при этом одна ветвь лежит целиком в верхней части полуплоскости  $u > 0$ ,  $E > 0$ , другая (симметричная) — в нижней  $u > 0$ ,  $E < 0$ . Обе ветви имеют экстремум в точках

$$u_m = \frac{1}{M_t}, \quad E_m = \pm \left( 1 - \frac{S^*}{S} \right)^{1/2}, \quad S^* = \left( 1 - \frac{1}{M_t} \right)^2 \quad (2.4)$$

Отметим, что на прямой  $u = u_m$  скорость течения равна скорости звука; при  $u < u_m$  поток дозвуковой, при  $u > u_m$  поток сверхзвуковой. Следовательно, при  $S < S^*$  левая ветвь линии  $L_2^\circ$  лежит в дозвуковой области, правая — в сверхзвуковой.

Линии  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  могут пересекаться либо в одной, либо в трех точках, координаты  $u^{(i)}$ ,  $E^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) которых определяются из уравнений  $E = -R_q u$  и

$$SR_q^2 u^3 - u^2 + \left( 1 + \frac{1}{M_t^2} - S \right) u - \frac{1}{M_t^2} = 0 \quad (2.5)$$

Если  $S \leq S^*$ , то, как видно из фиг. 1, всегда есть одна точка пересечения, лежащая в дозвуковой области. Если  $S > S^*$ , то возможна либо одна точка пересечения, лежащая в дозвуковой области (фиг. 2) или в сверхзвуковой области (фиг. 3), либо три точки пересечения. В последнем случае или все три точки расположены в сверхзвуковой области или две лежат в сверхзвуковой, одна в дозвуковой областях (фиг. 4). Пусть

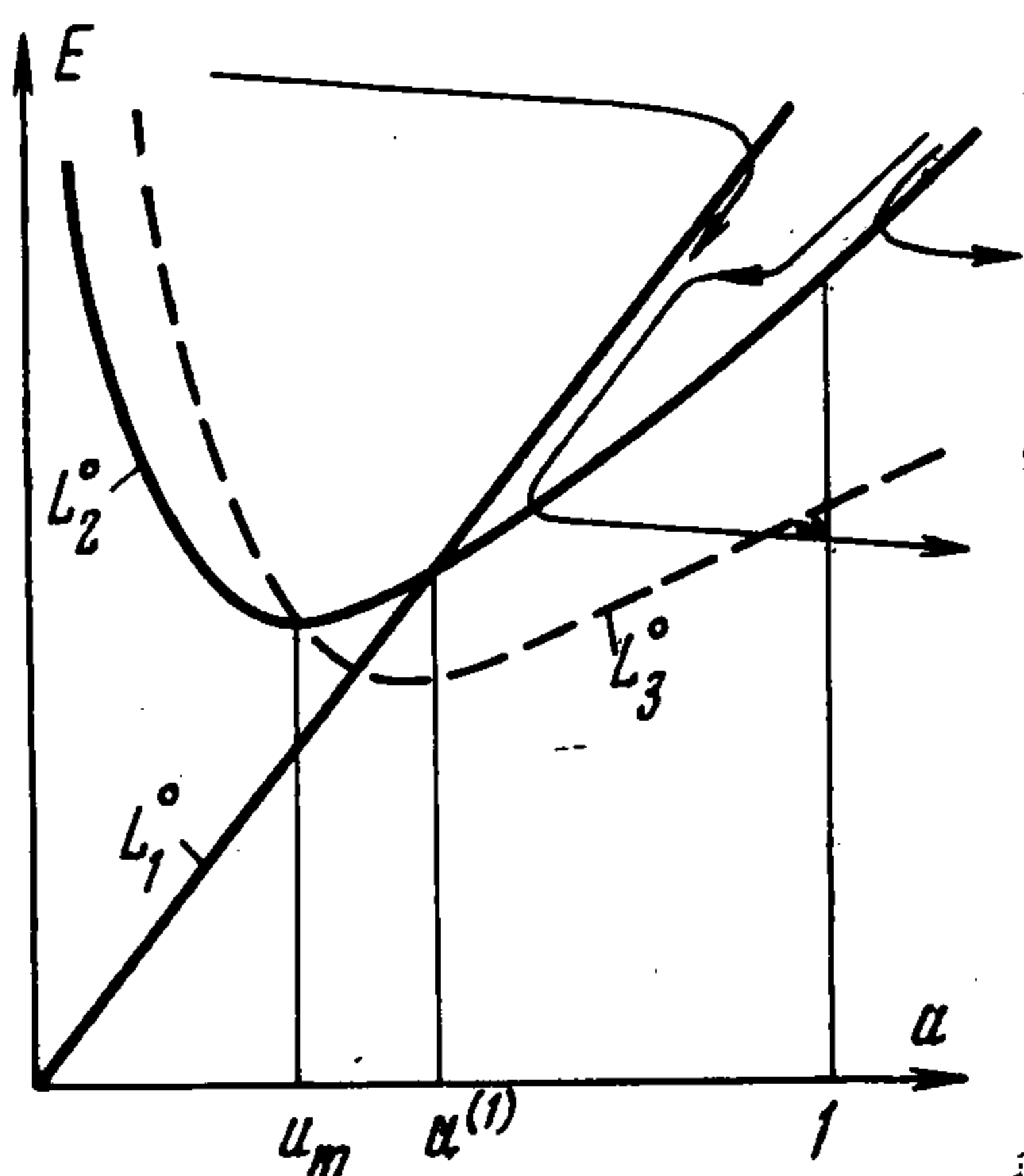
параметр  $S > S^*$ . Предположим, что кривые  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  пересекаются в точке минимума верхней ветви кривой  $L_2^\circ$ , т. е. один из корней (2.5) равен  $u^{(1)} = u_m = M_t^{-1}$ . Очевидно, что при этом левее линии  $u = u_m$  не может быть других точек пересечения  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . Подставляя значение корня  $u^{(1)}$  в (2.5), получим

$$S = \frac{(M_t - 1)^2}{M_t^2 - R_q^2} \quad (2.6)$$

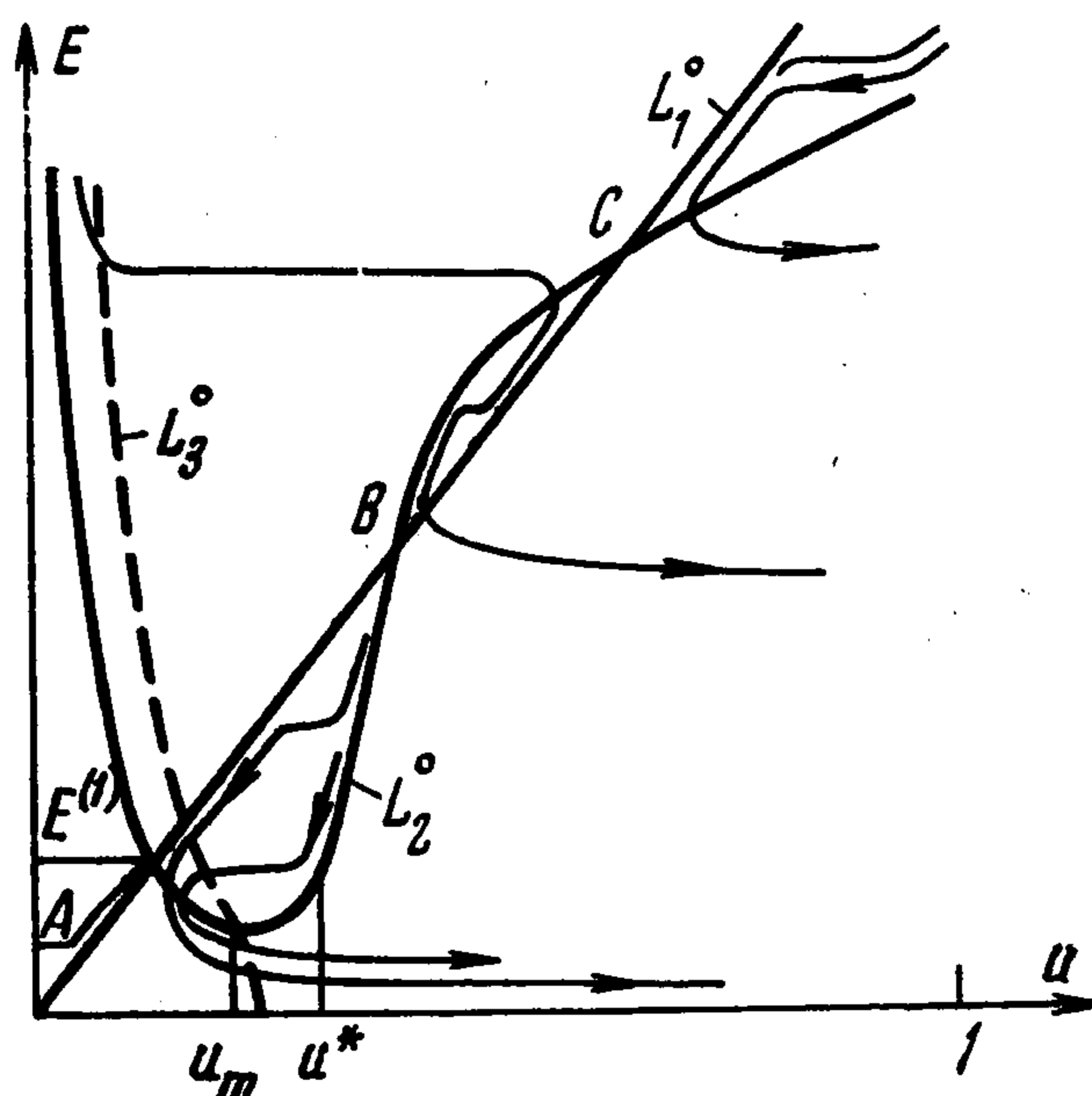
Отсюда следует, что  $R_q^2 < M_t^2$ , так как  $S > 0$ . Уравнение для определения двух оставшихся корней  $u^{(2)}$  и  $u^{(3)}$  имеет вид

$$u^2 + \frac{SR_q^2 - M_t}{SR_q^2 M_t} u + \frac{1}{SR_q^2 M_t} = 0 \quad (2.7)$$

Квадратный трехчлен (2.7) имеет действительные положительные корни, лежащие в интервале  $u_m < u < 1$ , если одновременно выполняются неравенства  $SR_q^2 / M_t \leq$



Фиг. 3



Фиг. 4

$\leq 3 - 2\sqrt{2}$ ,  $SR_q^2 M_t > 1$ ,  $R_q^2 > 1$ . Используя (2.6), первые два неравенства можно записать в виде

$$\frac{M_t^2}{M_t(M_t - 1)^2 + 1} < R_q^2 \leq \frac{(3 - 2\sqrt{2}) M_t^3}{(M_t - 1)^2 + (3 - 2\sqrt{2}) M_t} \quad (2.8)$$

Дробь, ограничивающая значения  $R_q^2$  сверху, больше единицы при  $M_t > \sqrt{2} + 1$ . Дробь, ограничивающая значения  $R_q^2$  снизу, меньше единицы при  $M_t > \sqrt{2} + 1$ . Следовательно, имеется непустое множество значений параметров  $M_t$  и  $R_q$ , удовлетворяющих условиям  $R_q^2 > 1$  и  $R_q^2 < M_t^2$ , при которых выполняются неравенства (2.8).

Таким образом, показано что существует диапазон значений параметров  $S > 0$ ,  $|R_q| > 1$  и  $M_t > 1$ , при котором в интервале  $0 < u < 1$  есть три точки пересечения кривых  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , три действительных корня уравнения (2.5). Два из них всегда лежат в сверхзвуковой области значений скорости  $u$ , а третий может находиться в сверх и дозвуковой областях. Тем самым доказано, что существует диапазон параметров  $m^*$ ,  $\Pi^*$ ,  $a_t^*$  и  $b$ , при котором в размерной плоскости  $u^* E^*$  кривые  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  имеют три точки пересечения. Если  $|R_q| \geq M_t$ , то при любом параметре взаимодействия  $S$  кривые  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  всегда имеют в интервале  $0 < u < 1$  только одну точку пересечения, лежащую в дозвуковой области значений скорости  $u$ . Условие  $|R_q| \geq M_t$  означает, что диффузионная скорость в точке  $x = x_1$ , равная разности скоростей заряженных и нейтральных частиц, меньше или равна скорости звука в этой точке.

Отметим, что уравнение (2.5) служит для определения скорости газа за ударной волной при исследовании соотношений на разрывах в электрогидродинамике, если нормальная составляющая электрического поля за волной  $E_{II}^* = -u_{II}^* / b$ , а  $T^* = \text{const}$  [1]. В самом деле, при постоянной температуре газа  $p = \rho$ ; исключая при помощи этого равенства давление  $p$  из первой формулы (6.2) работы [1], получим соотношение (2.5). Таким образом, значения скорости  $u$  и электрического поля  $E$  в точках пересечения  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  дают возможность найти состояние газа за электрогидродинамической ударной волной. Отбор одной точки пересечения в случае, если имеются три таких точки, будем производить, исследуя поведение интегральных кривых в задаче о структуре ударной волны.

Пусть  $E > 0$ . Изучим поведение интегральных кривых, когда линии  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  имеют одну точку пересечения и расположены так, как указано на фиг. 1, 2. Из первого уравнения (1.3) видно, что с увеличением  $\zeta$  (при движении вниз по потоку) безразмерное электрическое поле всегда уменьшается. Это позволяет выбрать направление движения вдоль интегральных кривых, которое указано на фигурах стрелками. Интегральные кривые, описывающие течения с положительным током  $J$ , всегда находятся ниже линии  $L_1^\circ$ . Параметр  $\varepsilon \ll 1$ , поэтому наклон интегральных кривых вдали от линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  мал. Вблизи этих линий, когда  $L_1 \sim \varepsilon$  или  $L_2 \sim \varepsilon$ , тангенс угла наклона интегральных кривых  $dE / du \sim 1$ , интегральные кривые резко поворачивают и идут вдоль линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  в  $\varepsilon$ -окрестности от них. Когда параметр  $\varepsilon$  уменьшается (коэффициент вязкости  $\eta \rightarrow 0$ ), интегральные кривые все ближе прижимаются к линиям  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  и в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  «входят» в эти линии и далее идут, «слившись» с ними. Угол наклона интегральных кривых вдали от линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из анализа второго уравнения (1.1) и первого уравнения (1.3) следует, что различным участкам интегральных кривых в плоскости  $uE$  соответствуют различные режимы течения в физической плоскости.

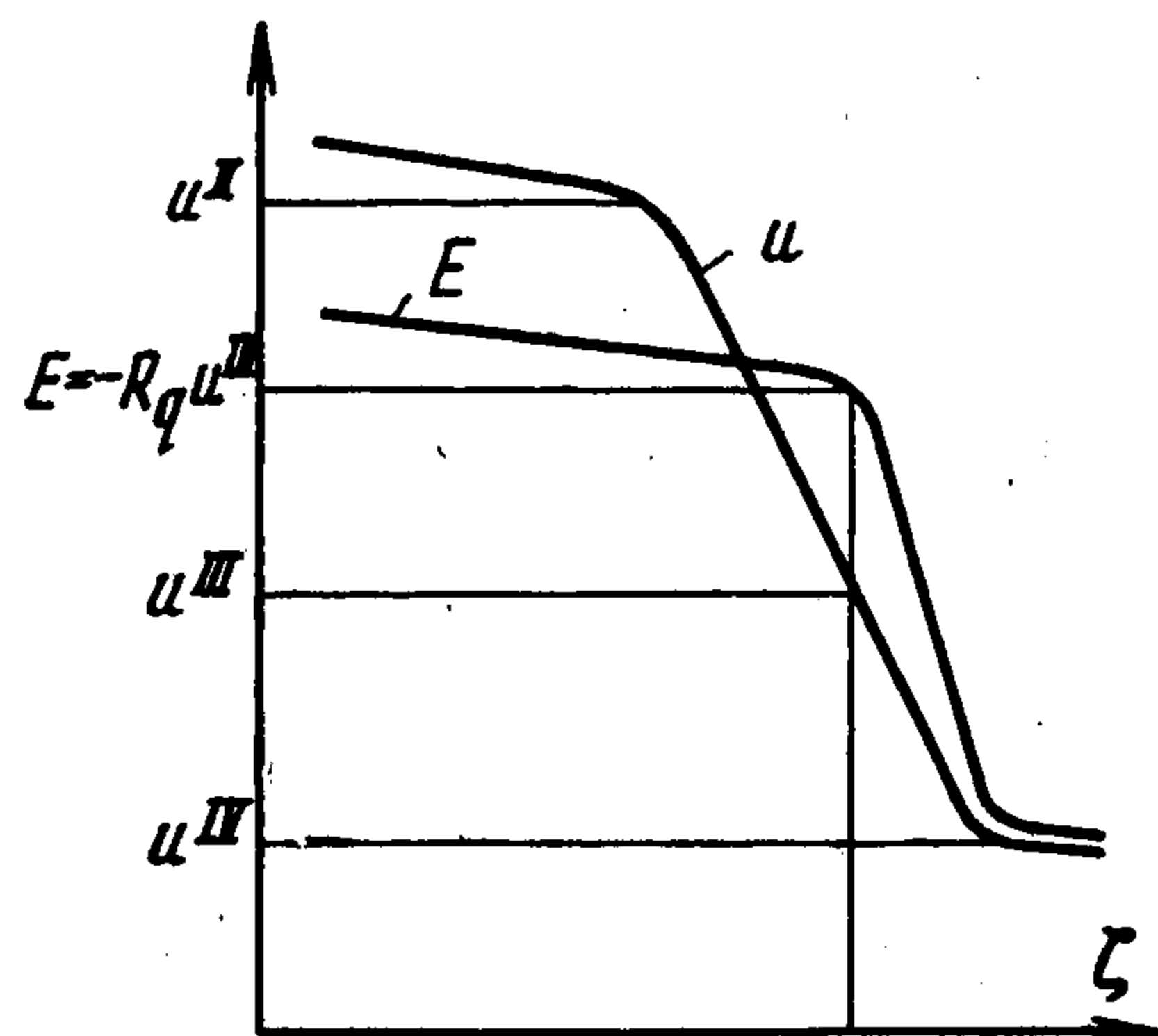
Рассмотрим, для определенности, интегральную кривую  $I$ , которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выходит из малой окрестности точки  $u = 1, E = 1$  с горизонтальным наклоном. Выше этой точки кривая  $I$  идет вблизи линии  $L_2^\circ$  вдоль нее. Пусть по определению  $\Delta \zeta_u$  и  $\Delta \zeta_E$  — характерные расстояния, на которых соответственно скорость и электрическое поле меняются в силу второго уравнения (1.1) и первого уравнения (1.3) на величину порядка единицы. На участке интегральной кривой  $I$ , на котором  $u^{II} < u < u^I$ , длины  $\Delta \zeta_u \sim 1$ ,  $\Delta \zeta_E \sim 1$ , так как здесь величины  $|L_2| \sim l \sim \varepsilon$ ,  $|L_1| \sim 1$ . В физической плоскости этот участок соответствует области течения с переменными скоростью и электрическим полем, в которой влияние вязкости на изменение параметров течения мало. Когда  $u^{III} < u < u^{II}$ , длины  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon \ll 1$ ,  $\Delta \zeta_E \sim 1$ , так как на этом участке интегральной кривой  $I$  величины  $|L_1| \sim 1$ ,  $|L_2| \sim 1$ . В физической плоскости этот участок соответствует узкой области течения, в которой сильно меняется скорость, а электрическое поле почти не меняется. Наконец, на участке интегральной кривой  $I$ , где  $u^{IV} < u < u^{III}$  длины  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$  и  $\Delta \zeta_E \sim \varepsilon$ , так как здесь  $|L_1| \sim \varepsilon$ ,  $|L_2| \sim 1$ . В физической плоскости эта часть интегральной кривой описывает узкую область течения с сильным изменением скорости и электриче-

ского поля. В окрестности точки  $u^{(1)}, E^{(1)}$ , где  $u^{(1)}, E^{(1)}$  — координаты точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ ,  $u^{(1)}$  — корень уравнения (2.5), интегральная кривая  $I$  пересекает линию  $L_2^\circ$  с вертикальной касательной и далее идет вдоль линии  $L_2^\circ$ . На этом участке интегральной кривой длины  $\Delta\zeta_u \sim 1$ ,  $\Delta\zeta_E \sim 1$ , так как здесь  $|L_1| \sim 1$ ,  $L_2 \sim \varepsilon$ . В физической плоскости этой части кривой соответствует область течения с переменными  $u$  и  $E$ , в которой влияние вязкости на изменение параметров мало. Будем считать, что участок интегральной кривой  $I$ , где  $u > 1$ ,  $E > 1$ , соответствует течению газа перед ударной волной, участок интегральной кривой  $I$ , где  $E < E^{(1)}$ , соответствует течению газа за ударной волной. На этих участках вкладом плотности потока импульса за счет вязкости в суммарную плотность потока импульса можно пренебречь. Часть интегральной кривой, где  $E^{(1)} < E < 1$ , описывает структуру электрогидродинамической ударной волны. В физической плоскости этому участку соответствует область течения с сильным изменением параметров  $u$  и  $E$ . Изменение параметров  $u$  и  $E$  в физических плоскостях  $\zeta u$  и  $\zeta E$ , соответствующее интегральной кривой  $I$ , представлено на фиг. 5. В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  интегральная кривая  $I$  выходит из линии  $L_2^\circ$  в точке  $u = 1$ ,  $E = 1$  и входит в линию  $L_2^\circ$  в точке  $u = u^{(1)}$ ,  $E = E^{(1)}$ ; эти точки соответствуют состояниям газа непосредственно перед и за фронтом ударной волны. Величины  $u^{(1)}$  и  $E^{(1)}$  связаны соотношением  $E^{(1)} + R_q u^{(1)} = 0$ , которое в размерном виде можно записать следующим образом:

$$u_{II}^* + bE_{II}^* = 0 \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9), полученное из анализа структуры ударной волны при произвольном параметре взаимодействия  $S$ , служит недостающим соотношением, замыкающим систему уравнений на фронте ударной волны, описанных в [1].

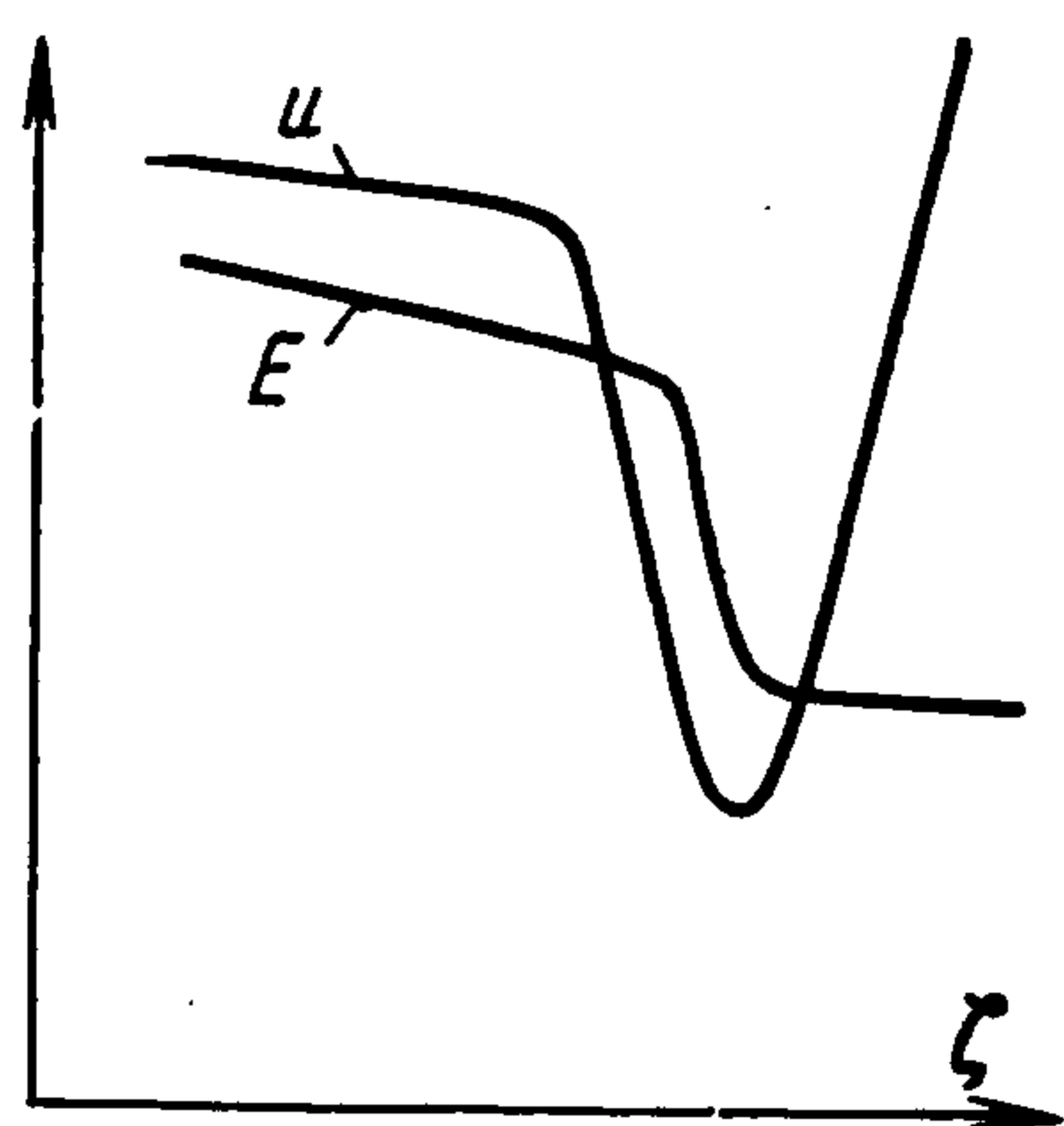
Из фиг. 1 и 2 видно, что имеется много интегральных кривых, расположенных в окрестности точки  $u^{(1)}, E^{(1)}$ ; при  $\varepsilon \rightarrow 0$  все они проходят через эту точку и выходят из линии  $L_2^\circ$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в точках, лежащих выше и ниже точки  $u = 1$ ,  $E = 1$ . Любой из этих точек можно поставить в соответствие состояние перед фронтом ударной волны, структура которой описывается интегральной кривой, выходящей из этой точки. Цифрой  $II$  обозначена интегральная кривая, которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадает с отрезком прямой  $E = E^{(1)}$ . Интегральные кривые, лежащие выше линии  $II$ , описывают структуру ударных волн с разрывом электрического поля на фронте волны. Интегральная кривая  $II$ , а также все кривые, лежащие ниже ее, в том числе для  $E < 0$ , описывают структуру ударных волн, на которых при  $\varepsilon \rightarrow 0$  электрическое поле непрерывно. При этом точки, в которых интег-



Фиг. 5

ральные кривые входят в линию  $L_2^\circ$ , соответствуют состояниям непосредственно за фронтом волны. Как следует из работы [1], уравнения для определения газодинамических параметров за фронтом волны совпадают при непрерывном поле с соответствующими уравнениями в обычной газовой динамике. Отметим, что на интегральных кривых, выходящих из  $L_2^\circ$  при  $E < 0$ , размерное электрическое поле перед фронтом положительно.

Если расположение линии  $L_2^\circ$  таково, как указано на фиг. 1 ( $S < S^*$ ), то скорость газа за фронтом ударной волны дозвуковая, при этом ударная волна эволюционная [1]. Если параметр взаимодействия  $S > S^*$ , то точка  $u^{(1)}, E^{(1)}$  пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  может при определенных значениях параметров  $R_q, M_t$  и  $S$  лежать в сверхзвуковой области (фиг. 3). Интегральные кривые при  $E > E^{(1)}$  выходят из  $\varepsilon$ -окрестности линии  $L_2^\circ$ , идут



Фиг. 6

с малым наклоном до линии  $L_1^\circ$ , далее идут в  $\varepsilon$ -окрестности  $L_1^\circ$  до пересечения с линией  $L_2^\circ$  в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $u^{(1)}, E^{(1)}$ , после чего поворачивают и идут с малым отрицательным наклоном в сторону увеличения  $u$ . Физическая интерпретация участков этих интегральных кривых до пересечения с линией  $L_2^\circ$  такая же, как и выше. На участке интегральных кривых после пересечения, где  $u > u^{(1)}$ , длины  $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$ ,  $\Delta \zeta_E \sim 1$ , так как здесь  $|L_1| \sim 1$ ,  $L_2 \sim 1$ . В физической плоскости этот участок интегральных кривых описывает течение с резким увеличением скорости при постоянном

электрическом поле (фиг. 6). Отметим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  на интегральных кривых в области, где  $L_2 < 0$  (выше линии  $L_2^\circ$ ), производная  $du/d\zeta \rightarrow -\infty$ ; в области, где  $L_2 > 0$  (ниже линии  $L_2^\circ$ ), производная  $du/d\zeta \rightarrow \infty$ . Интегральные кривые после пересечения с линией  $L_2^\circ$  нигде не идут вдоль нее — здесь нет участка, соответствующего невязкому течению. Таким образом, для  $E > 0$  нет интегральных кривых, описывающих структуру ударной волны.

Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых, когда линии  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  имеют три точки пересечения  $A(u^{(1)}, E^{(1)})$ ,  $B(u^{(2)}, E^{(2)})$ ,  $C(u^{(3)}, E^{(3)})$ , и  $u^{(1)} < u^{(2)} < u^{(3)}$ . Пусть  $u^{(1)} < u_m$  расположение линий  $L_1^\circ$ ,  $L_2^\circ$  и поведение интегральных кривых такое, как указано на фиг. 4. Интегральные кривые, которые выходят из  $\varepsilon$ -окрестности линии  $L_2^\circ$  выше последней в области  $u > u^{(3)}$ , не дают структуру ударной волны. Ситуация здесь аналогична описанной выше для случая одной точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , лежащей в сверхзвуковой области.

Интегральные кривые, которые выходят из  $\varepsilon$ -окрестности линии  $L_2^\circ$  выше последней в области  $u_m < u < u^{(2)}$ , описывают структуру эволюционных ударных волн. Ситуация здесь аналогична рассмотренной выше для случая одной точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , лежащей в дозвуковой области. При этом, если  $u_* < u < u^{(2)}$ , где  $u_*$  — больший корень уравнения  $L_2(u, E^{(1)}) = 0$ , то за фронтом ударной волны нужно задавать связь  $u_{II}^* + bE_{II}^* = 0$ . Если  $u_m < u \leq u_*$ , то на фронте ударной волны

$E_{11}^* = E_1^*$ . Участок линии  $L_2^\circ$  между точками  $B$  и  $C$  расположен в области  $J < 0$ .

Если  $u^{(1)} > u_m$ , то все точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  лежат в сверхзвуковой области и интегральных кривых, описывающих структуру ударных волн, не существует.

Соотношения на электрогидродинамических ударных волнах [1] допускают эволюционный переход скачком из любой точки линии  $L_2^\circ$  при  $u > u^{(3)}$  в любую точку линии  $L_2^\circ$  с  $u^{(1)} < u < u_m < (при S > S^*, \text{фиг. 4})$  или  $u^{(1)} < u < u_1^\circ$  (при  $S \leq S^*$ ,  $u_1^\circ$  — левая точка пересечения (2.3)). Как следует из результатов данной работы, такие ударные волны не имеют структуры.

Анализ структуры ударных волн проводился выше для случая  $E > 0$ . Когда  $E < 0$ , структура ударных волн существует, а поле на фронте волны непрерывно.

**3. Структура ударной волны в газе с малым коэффициентом теплопроводности.** Рассмотрим задачу о структуре ударной волны в случае, когда число  $Pr \gg 1$ . Ниже будет показано, что на интегральных кривых в плоскости  $uE$ , описывающих течение внутри ударной волны, изменение электрического потенциала мало. Пренебрегая в первом уравнении (1.2) членом с производной  $dT/d\zeta$  и считая, что  $\varphi = \varphi_1$ , получим с использованием второго уравнения (1.1) соотношение для температуры газа

$$T = \gamma(\gamma - 1)M_1^2(1/2u^2 - SE^2u - \Pi u + \Sigma) \quad (3.1)$$

При помощи (3.1) можно исключить температуру из второго уравнения (1.1). Обозначим

$$L_1 = E + R_q u, \quad L_2 = \frac{\gamma + 1}{2}u + \left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{2}\right)\frac{1}{u} - \gamma SE^2 - \gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} - S\right) \quad (3.2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{L_2}{l}, \quad \frac{dE}{d\zeta} = \frac{\delta}{L_1} \quad (3.3)$$

Разделив второе из уравнений (3.3) на первое, получим

$$\frac{dE}{du} = \frac{\varepsilon}{L_1 L_2}, \quad \varepsilon = \delta l \ll 1 \quad (3.4)$$

Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (3.4) в полуплоскости  $uE$ ,  $u > 0$ . Пусть  $E_1^* < 0$ ,  $q^* > 0$ ,  $j_1^* > 0$ ,  $M_1 > 1$ .

Тогда  $Q < 0$ ,  $R_q < 0$ ,  $\delta > 0$ ; кроме того,  $|R_q| > 1$ . Обозначим линии  $L_1 = 0$  и  $L_2 = 0$  в полуплоскости  $uE$ ,  $u > 0$  соответственно  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . На этих линиях интегральные кривые уравнения (3.4) имеют вертикальные касательные. Линия  $L_2^\circ$  имеет вертикальную асимптоту  $u = 0$ . При  $u \rightarrow \infty$  электрическое поле  $E \sim [(\gamma + 1)u/2\gamma S]^{1/2}$  на линии  $L_2^\circ$ . Введем обозначение

$$S_* = 1 + \frac{1}{\gamma M} - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]^{1/2}$$

Ниже показано, что при любых  $\gamma > 1$  и  $M_1 > 1$  величина  $S_* > 0$ . Если параметр взаимодействия  $S < S_*$ , кривая  $L_2^\circ$  состоит из двух ветвей, пересекающих с вертикальной касательной линию  $E = 0$  в двух точках. При  $S = S_*$  обе ветви линии  $L_2^\circ$  соединяются в единственной точке пересечения  $L_2^\circ$  с осью  $u$ . С увеличением  $S$  ветви линии  $L_2^\circ$  снова разделяются, причем одна из ветвей лежит теперь целиком в части  $u > 0$ ,  $E > 0$  рассматриваемой полуплоскости, другая (симметричная) — в части  $u > 0$ ,  $E < 0$ . Обе ветви имеют экстремум в точках

$$u_m = \left[ \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{1/2}, \quad E_m = \pm \left( 1 - \frac{S_*}{S} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Линия  $L_2^\circ$  всегда проходит через точки  $u = 1$ ,  $E = \pm 1$ . Так как  $E_m^2 \leq 1$ , то  $S_* > 0$ .

Построим в полуплоскости  $uE$ ,  $u > 0$  линию  $L_3^\circ$ , где скорость равна скорости звука. На этой линии  $u^2 M_1^2 = T$ , т. е.

$$E = \pm \frac{1}{\sqrt{S}} \left( cu + \frac{1}{u} \Sigma - \Pi \right)^{1/2}, \quad c = \frac{-2}{2\gamma(\gamma - 1)} \quad (3.6)$$

Вид линии  $L_3^\circ$  существенно зависит от знака коэффициента  $c$ . Если  $c > 0$  ( $\gamma > 2$ ), линия  $L_3^\circ$  состоит из двух ветвей. В зависимости от значений параметров  $\gamma$ ,  $M_1$  и  $S$  эти ветви могут пересекать с вертикальной касательной ось  $u$  в двух точках, в одной точке (ветви соединяются) и, наконец, точки пересечения с осью  $u$  могут отсутствовать, при этом ветви линии  $L_3^\circ$  симметричны и лежат в верхней и нижней четвертях полуплоскости  $uE$ ,  $u > 0$ . Таким образом, вид линии  $L_3^\circ$  при  $\gamma > 2$  качественно подобен виду линии  $L_2^\circ$ .

Если  $c < 0$  ( $\gamma < 2$ ), линия  $L_3^\circ$  состоит из одной ветви, пересекающей ось  $u$  с вертикальной касательной. При  $c = 0$  ( $\gamma = 2$ ) вид линии  $L_3^\circ$  определяет знак величины  $\Pi$ . Если  $\Pi > 0$ , линия  $L_3^\circ$  имеет одну ветвь (так же, как при  $c < 0$ ), если  $\Pi < 0$ , линия  $L_3^\circ$  представляет собой гиперболу, ветви которой лежат соответственно в верхней и нижней четвертях полуплоскости.

Взаимное расположение линий  $L_2^\circ$  и  $L_3^\circ$  может быть различным. Пересечение этих линий возможно только в точках (3.5) экстремумов линии  $L_2^\circ$ , если последние существуют, или в точке, где ветви линии  $L_2^\circ$  соединяются (т. е. при  $S \geq S_*$ ). В случае пересечения  $L_2^\circ$  и  $L_3^\circ$  части линии  $L_2^\circ$ , лежащие в интервале  $u < u_m$ , находятся в дозвуковой области, лежащие в интервале  $u > u_m$  — в сверхзвуковой; в точке пересечения скорость звуковая. Если линии  $L_2^\circ$  и  $L_3^\circ$  не пересекаются ( $S < S_*$ ), то левая ветвь линии  $L_2^\circ$  целиком расположена в дозвуковой области, правая ветвь — в сверхзвуковой.

Координаты  $u^{(k)}$ ,  $E^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) точек пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  определяются из уравнений  $E = -R_q u$  и

$$SR_q^2 u^3 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} u^2 + \left( 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} - S \right) u - \left( \frac{1}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) совпадает с уравнением для определения состояния газа за фронтом ударной волны при исследовании соотношений на разрыве, если за фронтом разрыва электрическое поле  $E_{II}^* = -u_{II}^* / b$ . В самом деле, исключая из уравнений (6.2) работы [1] давление  $p$ , получим (3.7). Это уравнение исследовалось в работе [3] при анализе одномерных течений идеального газа с ударными волнами.

Исследуем возможное поведение линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , когда они пересекаются в точке минимума верхней ветви  $L_2^\circ$  ( $S > S_*$ ). Очевидно, что левее точки  $u_m$  не может быть других точек пересечения. Подставляя значение корня  $u^{(1)} = u_m$  в (3.7), получим соотношение

$$S = S_* (1 - R_q^2 u_m^2)^{-1}$$

Уравнение для определения двух других корней (3.7) имеет вид

$$u^2 + u_m (1 - A) u + A u_m^2 = 0, \quad A = \frac{\gamma + 1}{2\gamma S R_q^2 u_m} \quad (3.8)$$

Квадратный трехчлен (3.8) имеет действительные корни, лежащие в интервале  $u_m < u < 1$ , если выполняются неравенства  $R_q^2 > 1$  и

$$\frac{u_m}{u_m^3 + u_m^2 - 2u_m + 1} < R_q^2 \leq \frac{3 - 2\sqrt{2}}{u_m [u_m^2 - (2\sqrt{2} - 1)u_m + 1]} \quad (3.9)$$

Выражения, ограничивающие  $R_q^2$  сверху и снизу, соответственно больше и меньше единицы, при  $u_m < \sqrt{2} - 1$ . Нетрудно убедиться, что имеется непустое множество значений параметров  $\gamma$ ,  $R_q$  и  $M_1$ , удовлетворяющих условиям  $\gamma > 1$ ,  $R_q^2 > 1$  и  $R_q^2 < u_m^{-2}$ , при которых выполняются неравенства (3.9), и, следовательно, при  $u > u_m$  имеются еще две точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . При небольшом изменении параметров, определяющих взаимное расположение линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , например, параметра взаимодействия, точка пересечения, расположенная в минимуме линии  $L_2^\circ$ , может смещаться как в дозвуковую, так и в сверхзвуковую области. При этом другие две точки пересечения остаются в сверхзвуковой области. Таким образом, линии  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  могут иметь три точки пересечения, из которых две всегда расположены в сверхзвуковой области, а одна может быть в сверхзвуковой и в дозвуковой областях. Аналогичное утверждение относительно расположения корней полинома (3.7) получено в работе [3]. Если  $|R_q| \geq u_m^{-1}$ , то в интервале  $0 < u \leq 1$  кривые  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  всегда имеют единственную точку пересечения, находящуюся в дозвуковой области.

Поведение интегральных кривых при  $\gamma > 1$  качественно аналогично рассмотренному в п. 2 для случая  $T^* = \text{const}$  (фиг. 1 — 4). Линия  $L_3^\circ$  изображена пунктиром в случае  $\gamma < 2$  на фиг. 1, 2, 4 и в случае  $\gamma > 2$  на фиг. 3.

Пусть  $E > 0$ . Видно, что если уравнение (3.7) имеет один действительный корень, расположенный в дозвуковой области, то ударная волна имеет структуру и эволюционна; за фронтом разрыва выполняется соотношение  $E_{II}^* = E_I^*$  ( $E_{II}^* = -u_{II}^* / b$ ), когда структура ударных волн описывается интегральными кривыми, расположенными ниже (выше) интегральной кривой II. На интегральной кривой II электрическое поле  $E_{II}^* = E_I^* = -u_{II}^* / b$ . Если корень уравнения (3.7) лежит в сверхзвуковой области или имеется три действительных положительных корня, расположенных в сверхзвуковой области (это может быть только при  $S > S_*$ ), то структуры ударной волны не существует. Если один из трех действительных корней (при  $S > S_*$ ) лежит в дозвуковой области (фиг. 4), то ударная волна имеет структуру и эволюционна, если скорость перед фронтом волны  $u_m < u < u^{(2)}$  ( $u^{(1)} < u^{(2)} \leq u^{(3)}$  — корни уравнения (3.7)). При этом, если  $u_* < u < u^{(2)}$ , где  $u_*$  — больший корень уравнения  $L_2(u, E^{(1)}) = 0$ , то за фронтом ударной волны нужно задавать связь  $E_{II}^* = -u_{II}^* / b$ . Если  $u_m < u \leq u_*$ , то на фронте ударной волны  $E_{II}^* = E_I^*$ . При значениях

параметра взаимодействия  $S < S_*$  один корень уравнения (3.7) всегда лежит в дозвуковой области. Если в этом случае имеются три точки пересечения кривых  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ , то при  $E > 0$  структуру имеют ударные волны, у которых скорость перед фронтом  $u_2^\circ < u < u^{(2)}$ . Здесь  $u_2^\circ$  — значение скорости в точке пересечения правой ветви линии  $L_2^\circ$  с осью  $u$ . Эти волны эволюционны. Соотношения на электрогидродинамических ударных волнах [1] допускают эволюционный переход скачком из любой точки линии  $L_2^\circ$  при  $u > u^{(3)}$  в любую точку линии  $L_2^\circ$  с  $u^{(1)} < u < u_m$  (при  $S > S_*$ , фиг. 4) или  $u^{(1)} < u < u_1^\circ$  (при  $S \leq S_*$ ,  $u_1^\circ$  — значение скорости в точке пересечения левой ветви линии  $L_2^\circ$  с осью  $u$ ). Из результатов данной работы видно, что такие ударные волны не имеют структуры.

Если  $E < 0$ , то структура ударных волн существует, а электрическое поле на фронте ударной волны непрерывно.

Видно, что электрогидродинамические ударные волны всегда представляют собой волны сжатия.

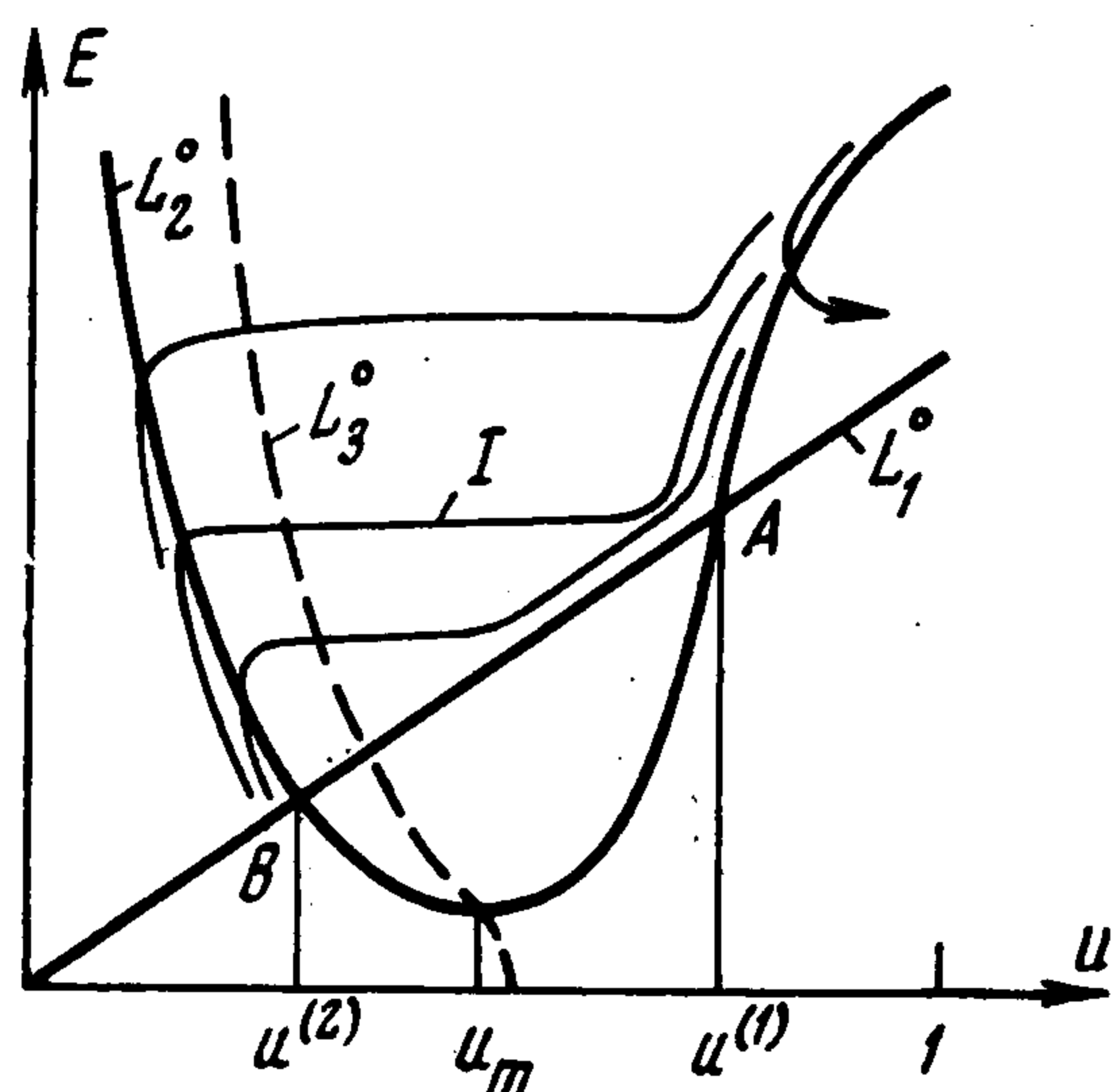
Рассмотрим изменение электрического потенциала вдоль интегральных кривых. Из второго уравнения (1.3) видно, что характерная длина изменения потенциала  $\Delta \zeta_\phi$  всюду на интегральных кривых порядка единицы. Следовательно, на участках интегральных кривых, описывающих структуру ударной волны, которым в физической плоскости соответствует область течения  $\Delta \zeta \sim \varepsilon$ , изменение электрического потенциала  $\Delta \phi \sim \varepsilon$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $\Delta \phi \rightarrow 0$  — потенциал непрерывен на фронте ударной волны. Отметим, что участки интегральных кривых, которым соответствуют области течения  $\Delta \zeta \sim 1$ , физического смысла не имеют, так как здесь  $\Delta \phi \sim 1$ . Состоянию непосредственно перед фронтом ударной волны может соответствовать любая точка линии  $L_2^\circ$  из указанных выше допустимых областей. Однако течение, близкое к идеальному течению перед фронтом ударной волны, не описывается участками интегральных кривых, идущими вдоль линии  $L_2^\circ$ , так как в таком течении электрический потенциал меняется, а линия  $L_2^\circ$  построена без учета изменения  $\phi$ . Интегральные кривые, описывающие течение, близкое к идеальному перед фронтом волны, идут вдоль поверхности в пространстве  $uE\phi$ , на которой постоянны потоки массы, импульса и полной энергии идеального течения. Вблизи этой же поверхности идут интегральные кривые, описывающие течение, близкое к идеальному, за фронтом ударной волны.

Отметим отличие постановки задачи о структуре электрогидродинамической ударной волны от соответствующей задачи в газовой динамике. В газовой динамике состояния перед и за фронтом ударной волны определяются заданием полных потоков массы, импульса и энергии. В электрогидродинамике задание этих потоков недостаточно для определения параметров перед фронтом ударной волны. В рассмотренной постановке необходимо еще задать величину  $u$  или  $E$  перед волной. Только тогда точка на линии  $L_2^\circ$ , соответствующая состоянию перед ударной волной, определяется однозначно.

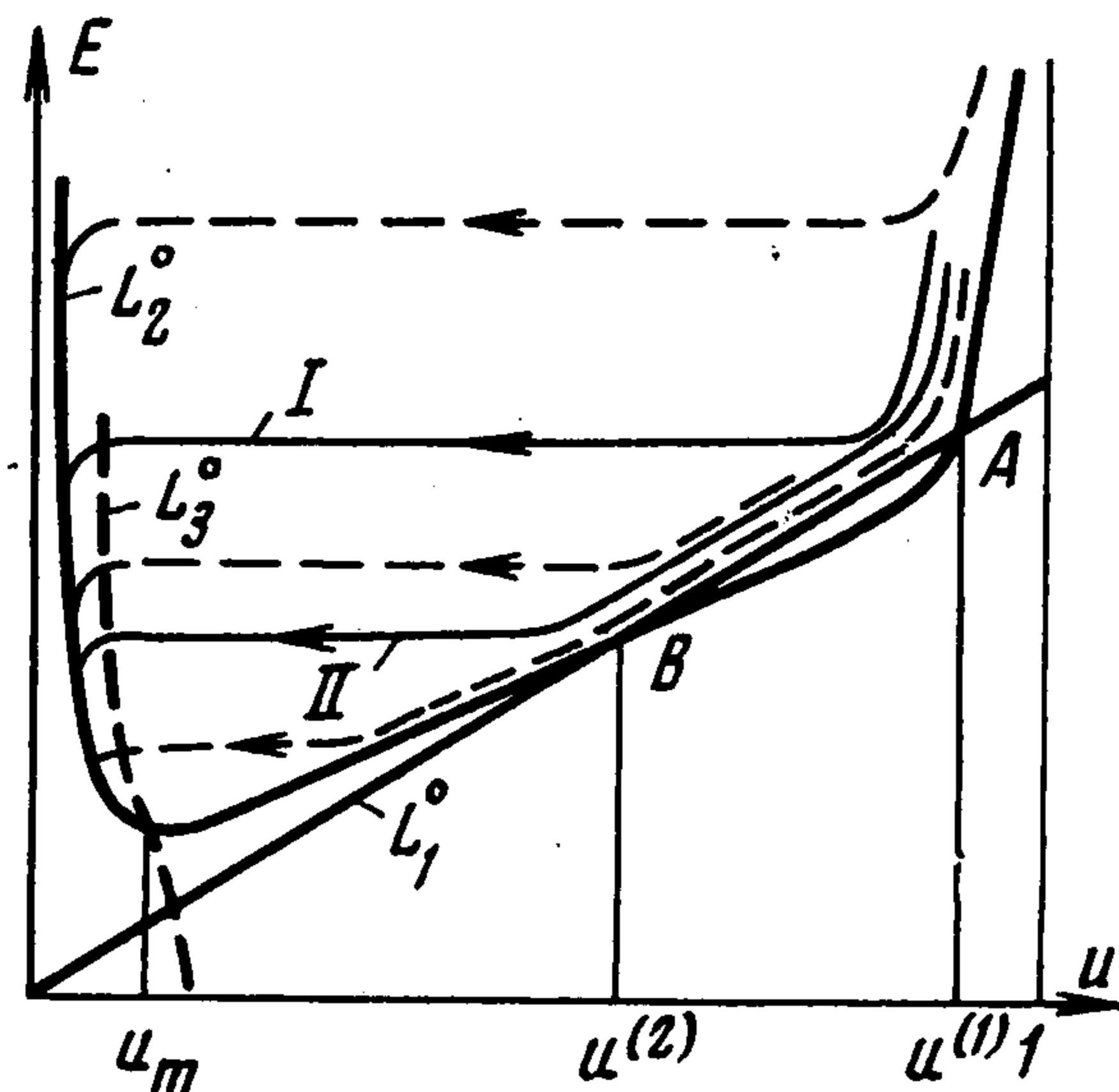
Исследование структуры электрогидродинамических ударных волн, проведенное в данной работе, позволяет при заданных потоках массы, импульса и газодинамической энергии указать области параметров течения перед фронтом, при которых существуют эволюционные ударные волны, имеющие структуру.

**4. Структура ударных волн, когда ионы движутся навстречу газу.** Пусть  $q^* > 0$ ,  $u^* > 0$ ,  $E_1^* < 0$ ,  $j_1^* < 0$ ,  $M_1 > 1$ . При этом  $\varepsilon < 0$ ,  $R_q < 0$ . Из третьего уравнения (1.3) следует, что  $|R_q| < 1$ . Уравнение линии  $L_2^\circ$  дается второй формулой (2.2) в случае  $Pr \ll 1$  и второй формулой (3.2) в случае  $Pr \gg 1$ . Можно показать, что линии  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  имеют в полуплоскости  $uE$ ,  $u > 0$  одну или три точки пересечения. При этом в интервале  $0 < u \leq 1$  точки пересечения или отсутствуют или их две. В последнем

случае либо одна из точек расположена в дозвуковой области, другая в сверхзвуковой, либо обе точки лежат в сверхзвуковой области. Анализ допустимого расположения точек пересечения проводится, как в п. 2,3, путем совмещения одной из точек пересечения с точкой минимума кривой  $L_2^\circ$  (при  $S > S_*$ ). Интегральные кривые уравнения (2.1) ( $Pr \ll 1$ ) и уравнения (3.4) ( $Pr \gg 1$ ), описывающие течение с отрицательным током, лежат выше прямой  $L_1^\circ$ . Рассмотрим подробно поведение интегральных кривых в случае, когда в интервале  $0 < u \leq 1$  имеются две точки пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$ . Пусть точка  $A(u^{(1)}, E^{(1)})$  лежит в сверхзвуковой области.



Фиг. 7



Фиг. 8

Вторая точка пересечения — точка  $B(u^{(2)}, E^{(2)})$  расположена в дозвуковой области на фиг. 7 и в сверхзвуковой области на фиг. 8. Обозначим цифрой  $I$  интегральную кривую, которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выходит из малой окрестности точки  $A$  с горизонтальным наклоном. Интегральные кривые, выходящие с горизонтальным наклоном из окрестности линий  $L_2^\circ$ , выше точки  $A$  (фиг. 7, 8) и ниже точки  $B$  (фиг. 8), описывают структуру эволюционных ударных волн с непрерывным электрическим полем на фронте волны. Цифрой  $II$  на фиг. 8 обозначена интегральная кривая, выходящая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с горизонтальным наклоном из окрестности точки  $B$ . Интегральные кривые, расположенные ниже кривой  $I$  на фиг. 7 и между кривыми  $I$  и  $II$  на фиг. 8, проходят при  $\varepsilon \rightarrow 0$  через малую окрестность точки  $A$ , далее идут вблизи прямой  $L_1^\circ$ , затем отходят от нее и идут с малым положительным наклоном до пересечения с дозвуковой частью линии  $L_2^\circ$  при различных значениях электрического поля, заключенного в пределах

$$E^{(2)} < E < E^{(1)} \quad (4.1)$$

Участки этих интегральных кривых выше точки  $A$  и ниже точек пересечения их с линией  $L_2^\circ$  идут при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вблизи линии  $L_2^\circ$ , соответствующей невязкому течению. Рассматриваемые интегральные кривые описывают структуру эволюционных ударных волн со скачком электрического поля на фронте волны. При этом значения параметров в точке  $A$ , связанные соотношением  $E^{(1)} + R_q u^{(1)} = 0$  (в размерном виде  $u_1^* + bE_1^* = 0$ ), соответствуют состоянию перед фронтом волны. Чтобы найти состояние за

фронтом таких ударных волн, нужно задать за фронтом один из параметров. В частности, величину электрического поля можно задавать в пределах (4.1). Структура подобных ударных волн в случае малого параметра взаимодействия рассматривалась в работе [4]. Интегральная кривая  $I$  описывает структуру ударной волны, у которой поле за фронтом  $E_{II}^* = E_I^* = -u_I^* / b$ . Интегральная кривая  $II$  (фиг. 8) дает структуру эволюционной ударной волны, у которой поле перед фронтом  $E_I^* = -u_I^* / b$ , поле за фронтом  $E_{II}^* = -u^{(2)*} / b$  ( $u^{(2)*}$  — размерное значение величины  $u^{(2)}$ ). Скорость за фронтом этой ударной волны дозвуковая и равна меньшему корню уравнения  $L_2(u, E^{(2)}) = 0$ .

Кроме интегральной кривой  $II$ , выходящей при  $\varepsilon \rightarrow 0$  из малой окрестности точки  $B$  с горизонтальным наклоном (фиг. 8), имеется множество близких интегральных кривых, выходящих из малой окрестности точки  $B$  с наклоном, равным наклону линии  $L_2^\circ$ . Ниже точки  $B$  часть этих интегральных кривых идет вдоль линии  $L_2^\circ$  в малой ее окрестности. Такие интегральные кривые описывают структуру ударных волн, у которых параметры перед и за фронтом связаны соотношениями  $u_k^* + bE_k^* = 0$ ,  $k = I, II$ , скорость за фронтом волны, как и перед волной, сверхзвуковая и равна большему корню уравнения  $L_2(u, E^{(2)}) = 0$ .

Волны такого типа эволюционны. В самом деле, число уравнений на фронте этих волн равно шести: законы сохранения массы, импульса и энергии, закон Ома и два условия  $u_k^* + bE_k^* = 0$  ( $k = I, II$ ). Для эволюционности необходимо, чтобы число расходящихся от разрыва волн слабой интенсивности равнялось пяти (на единицу меньше числа соотношений на фронте разрыва). Вниз по потоку от разрыва в рассматриваемом случае уходят три коротковолновых высокочастотных возмущения: две звуковых и одна энтропийная волна (распространяющиеся со скоростями  $u_{II}^* \pm a_{II}^*$  и  $u_{II}^*$  соответственно). В этих возмущениях изменяются все параметры за исключением электрического поля. Вверх по потоку от разрыва уходит ионная энтропийная волна, в которой возмущается только плотность заряда и плотность тока. Возмущения электрического поля слева и справа от разрыва  $\delta E_I^*$  и  $\delta E_{II}^*$  соответственно распространяются с бесконечной скоростью (длина волны равна бесконечности), при этом плотность заряда не возмущается [5]. Будем считать  $\delta E_I^*$  (либо  $\delta E_{II}^*$ ) заданным; это соответствует приходящей на разрыв волне указанного типа. Величина  $\delta E_{II}^*$  (либо  $\delta E_I^*$ ) определяется из шести перечисленных выше соотношений на разрыве вместе с амплитудами остальных четырех расходящихся волн и величиной, характеризующей возмущение скорости разрыва.

В случае, когда соотношение  $u_k^* + bE_k^* = 0$  выполняется только перед фронтом разрыва ( $k = I$ ) либо только за фронтом разрыва ( $k = II$ ), число соотношений на разрыве равно пяти. При этом число расходящихся из разрыва волн также уменьшается на единицу, так как скорость газа за фронтом разрыва в этих случаях дозвуковая.

Если есть только одна точка пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  и расположена она в сверхзвуковой области, то существуют ударные волны, имеющие структуру в случае, когда скорость газа перед фронтом волны  $u_m < u <$

$< u^{(1)}$  ( $u^{(1)}$  — значение скорости в точке пересечения). Поле на фронте этих ударных волн непрерывно. Если единственная точка пересечения линий  $L_1^\circ$  и  $L_2^\circ$  расположена в дозвуковой области, интегральных кривых, дающих структуру ударных волн, не существует.

В п. 6 работы [1] при упрощении уравнений ударной адиабаты допущена ошибка: во втором уравнении (6.2) пренебрегается членом  $\theta_1 \Phi V^2$ , который при  $V \sim 1$  имеет одинаковый порядок с оставленными членами. В связи с этим уравнение ударной адиабаты (6.3) и следствия, полученные из него, неверны.

Анализ возможных состояний за фронтом ударной волны в зависимости от состояния перед фронтом в плоскости  $uE$  проведен в данной работе.

Выражаем благодарность А. Г. Куликовскому за обсуждение и полезные советы.

Поступила 25 II 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
3. Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные электрогидродинамические течения с ударными волнами. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. Гогосов В. В. Одномерные электрогидродинамические течения с переменным коэффициентом подвижности. Скачки испарения и конденсации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
5. Гогосов В. В., Полянский В. А. О слабых волнах, характеристиках и задаче об обтекании тонкого профиля в электрогидродинамике. Изв. АН СССР) МЖГ, 1972, № 3.