

К ТЕОРИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО РЕЖИМА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СОУДАРЕНИЯМИ

Ю. С. Федосенко, М. И. Фейгин

(Горький)

Для широкого класса систем с соударениями предлагается приближенный метод расчета скользящих режимов, характеризуемый такой же степенью завершенности и трудоемкости, как и известные методы расчета движений простейших типов. Для случая, когда на заключительном участке скользящего режима относительное ускорение соударяющихся тел изменяется по линейному закону, получено аналитическое выражение для коэффициента длительности режима как функции коэффициента восстановления скорости при ударе. Рассматриваются примеры расчета конкретных моделей. Сравнение с результатами, полученными точным методом, показывает, что ошибка даже первого приближения не превышает нескольких процентов.

Под скользящим режимом в системе с соударениями понимается движение, сопровождающееся на конечном интервале времени бесконечной последовательностью мгновенных ударных взаимодействий между двумя фиксированными элементами системы.

Для широкого класса рассматриваемых систем в работах [1-3] решена задача определения в фазовом пространстве точных границ областей скользящих режимов и выделения областей существования периодических движений с участком скользящего режима в пространстве параметров. Однако использованную при этом итеративную процедуру из-за значительной трудоемкости нецелесообразно рекомендовать в качестве практического метода расчета. Приближенный метод рассмотрения скользящих режимов был предложен в работе [4]. Но при применении его к конкретным моделям значительные участки рассчитываемых зависимостей, как отмечается в работах [5,6] получить не удалось.

В данной работе предлагается приближенный метод расчета областей скользящих режимов в фазовом пространстве и областей существования периодических движений с участком скользящего режима в пространстве параметров.

Метод базируется на рассмотрении точечных отображений гиперплоскости ударных взаимодействий в себя и следующих двух идеализациях: а) введенная в рассмотрение некоторая новая характеристика — коэффициент длительности скользящего режима — зависит только от физических параметров системы, б) скользящий режим, начиная с некоторого момента времени, можно также рассматривать как движение соударяющихся масс с наложенной кинематической связью после их абсолютно неупругого взаимодействия [1]. При таком подходе приближенность метода связана с приближенностью принятых идеализаций. Однако остается возможность неограниченного уточнения рассматриваемой динамической модели за счет выбора момента времени, принимаемого за начало скользящего режима.

1. Уравнение границы области скользящего режима в фазовом пространстве. Рассмотрим динамическую систему, безразмерные уравнения движения которой в промежутках времени между соударениями представимы в виде

$$\begin{aligned} x_1'' &= F_1 + F_{12}, & \mu x_2'' &= F_2 - F_{12} \\ x_i'' &= F_i & (i = 3, 4, \dots, n), & & x_2 - x_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Через x_1 и x_2 обозначены смещения соударяющихся масс, причем начало отсчета выбрано так, что удар происходит при выполнении равенства $x_2 = x_1$; μ — отношение соударяющихся масс, а F_{12} — сила взаимодействия между ними, зависящая лишь от разности $x_2 - x_1$. Полагаем, что силы F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не зависят от величин x_1 и x_2 и представляют собой аналитические функции остальных фазовых координат $x_1, \dots, x_n, x_3, \dots, x_n, t$. Таким образом, правые части системы (1.1) сохраняют непрерывность в моменты соударений.

Сделаем замену двух переменных по формулам $y = x_2 - x_1$, $y' = x_2' - x_1'$. Тогда уравнения движения (1.1) примут вид

$$\begin{aligned} \mu y'' &= F_2 - \mu F_1 - (1 + \mu) F_{12}, & (1 + \mu) x_1'' &= F_1 + F_2 - \mu y'' \\ x_i'' &= F_i & (i = 3, 4, \dots, n), & y > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Идеализируя удар как мгновенный с коэффициентом восстановления скорости $0 \leq R < 1$, имеем известные соотношения между послеударными y^+ , x_1^+ и доударными y^- , x_1^- значениями скоростей y' , x_1' в виде

$$y^+ = -Ry^-, \quad x_1^+ = x_1^- + \frac{\mu(1+R)}{1+\mu} y^- \quad (1.3)$$

В фазовом пространстве $x_1, y, x_3, \dots, x_n, x_1', y', x_3', \dots, x_n', t$ рассматриваемой системы ударные взаимодействия происходят на гиперплоскости Π , определяемой соотношением $y = 0$. Порождаемое уравнениями (1.2), (1.3) точечное преобразование $M_1 = T(M_0)$ отображает поверхность Π в себя. Область скользящих движений Π_s является частью Π , заключенной между многообразием $y' = 0$ и некоторой границей Γ_s . Последняя отделяет состояния системы, являющиеся исходными для последующего скользящего режима, от начальных условий, при движении из которых скользящий режим не имеет места.

Необходимо отметить, что знание только участка $\Gamma_s' \in \Gamma_s$ в сколь угодно малой окрестности многообразия выхода M_s из области Π_s позволяет путем рассмотрения обратного преобразования $T^{-1}(\Gamma_s')$ расширять известную часть границы Γ_s от Γ_s' до Γ_s'' , Γ_s''' , ... [2,3]. При этом всякий раз будет смещаться лишь номер соударения, которое может быть принято за исходное для последующего скользящего режима. Поэтому без уменьшения общности достаточно выделить наиболее важную часть Γ_s , примыкающую к многообразию M_s .

Из рассмотрения точечного преобразования $M_1 = T(M_0)$ всегда возможно (хотя бы численным методом) [7] получить некоторое соотношение

$$\Phi(\tau_0, x_{10}, 0, x_{30}, \dots, x_{n0}, x_{10}', y_0', x_{30}', \dots, x_{n0}', t_0) = 0 \quad (1.4)$$

связывающее длительность $\tau_0 = t_1 - t_0$ между начальным и последующим соударениями с координатами начальной точки

$$M_0(x_{10}, 0, x_{30}, \dots, x_{n0}, x_{10}', y_0', x_{30}', \dots, x_{n0}', t_0)$$

Длительность τ_0 является наименьшим положительным простым корнем уравнения (1.4).

Непрерывная зависимость τ_0 от координат начальной точки нарушается при вырождении этой величины в кратный корень уравнения (1.4), т. е. на некотором многообразии Γ_1 , определяемом условиями

$$y = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_{\tau_0}' = 0 \quad (1.5)$$

Особенность траекторий, выходящих в момент t_0 из Γ_1 , состоит в том, что в момент $t_0 + \tau_0$ они лишь касаются гиперплоскости Π . Поэтому уравнения Γ_1 могут быть получены и как обратное точечное отображение T^{-1} многообразия $y = 0, y' = 0$.

Введем в рассмотрение некоторую новую характеристику. Будем называть коэффициентом длительности скользящего режима Θ отношение временного промежутка τ_0 ко всей длительности скользящего режима h , начинающегося в момент t_0 и заканчивающегося в момент t_s на многообразии выхода, т. е.

$$\Theta = \tau_0 h^{-1} \quad (1.6)$$

Будем полагать, что коэффициент Θ не зависит от фазовых координат и характеризуется только параметрами системы. Тогда уравнения (1.4), (1.6) позволяют формально определить на гиперплоскости Π некоторые многообразия W_h , соответствующие определенным значениям $h = \text{const}$. Эти многообразия, образуют однопараметрическое семейство, расположенное между границей $y' = 0$ и огибающей (1.5) семейства (1.4). Очевидно, что с учетом принятого предположения о характере коэффициента Θ , физический смысл имеют только те точки многообразий W_h , которые одновременно располагаются на границе Γ_s . Для выделения этих точек воспользуемся независимым от предыдущего рассмотрения способом определения длительности скользящего режима h .

Известно, что при движении системы (1.2), (1.3) в скользящем режиме фазовая траектория, отвечающая ему, начиная с некоторого момента времени t_0 , будет сколь угодно близка к фазовой траектории идеализированной системы с наложенной кинематической связью между соударяющимися массами [1]. Закон движения этой динамической модели получим из соотношений (1.2), заменив первые два из них уравнениями движения взаимодействующих масс в кинематической связи

$$G(t) \equiv F_2 - \mu F_1 - (1 + \mu)F_{12} < 0, \quad (1 + \mu) x_1'' = F_1 + F_2 \quad (1.7)$$

$$x_i'' = F_i \quad (i = 3, 4, \dots, n), \quad y = 0$$

Уравнения многообразия выхода M_s получим из условия окончания движения в кинематической связи

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad G(t) = 0, \quad G'(t) > 0 \quad (1.8)$$

Соотношения (1.7), (1.8) позволяют приближенно из рассмотрения движения с наложенной связью после абсолютно неупругого удара получить зависимость длительности скользящего режима от координат начальной точки преобразования в виде, аналогичном выражению (1.4), т. е.

$$\Phi(h, x_{10}, \dots, x_{n0}, x_{10}', \dots, x_{n0}', t_0) = 0 \quad (1.9)$$

Величина h определяется как наименьший положительный корень уравнения (1.9). Однопараметрическое семейство, определяемое соотношением (1.9) состоит из расположенных на поверхности Π многообразий V_h , каждое из которых соответствует определенной длительности $h = \text{const}$ движения соударяющихся масс в кинематической связи.

Система уравнений (1.4), (1.6), (1.9) накладывает дополнительную связь на координаты гиперплоскости Π и определяет тем самым искомую границу Γ_s как геометрическое место пересечений многообразий W_h и V_h при различных значениях параметра h . Примеры таких пересечений приведены в п. 3 на фиг. 2.

Следует отметить, что выделение границы области Π_s можно рассматривать как задачу получения достаточных условий грубости пространства параметров [8] системы с соударениями по отношению к замене реальных значений коэффициента R нулем. Если состояние системы при $R \neq 0$ в некоторый момент времени t_0 характеризуется фазовой точкой $M_0 \in \Pi_s$, то идеализация последующего поведения (скользящего режима) как движения взаимодействующих масс с наложенной кинематической связью принципиально допустима. Погрешности такой идеализации могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора t_0 — «момента её начала», так как соответствующие фазовые траектории при этом будут сколь угодно близки. В случае же $M_0 \notin \Pi_s$ указанная идеализация необоснована, так как выходящие из точки M_0 фазовые траектории для системы с $R \neq 0$ и системы с $R = 0$, вообще говоря, не будут на заданном конечном интервале времени неограниченно сближаться.

После того, как получены уравнения границы Γ_s , изучение периодических движений с участком скользящего режима сводится к обычной процедуре отыскания неподвижных точек соответствующих точечных отображений поверхности Π в себя и исследованию их устойчивости. Дополнительным требованием будет налагаемое на одну из неподвижных точек M_0 ограничение $M_0 \in \Pi_s$. Заменяя это условие соотношением $M_0 \in \Gamma_s$, получим из системы для определения координат неподвижных точек уравнения границ C_s областей существования рассматриваемого периодического движения в пространстве параметров динамической системы.

2. Коэффициент длительности скользящего режима при линейном законе изменения относительного ускорения соударяющихся тел. Покажем, что у широкого и, по-видимому, наиболее важного класса динамических систем с соударениями коэффициент Θ — сравнительно простая функция коэффициента восстановления скорости R .

Рассмотрим случай, когда относительное ускорение $y''(t)$ в окрестности $[t_0, t_0 + h]$ момента времени t_0 , принимаемого за начало скользящего режима, приближенно можно считать линейной функцией времени вида

$$y''(t) = y''(t_0) + (t - t_0)Y \quad (2.1)$$

Тогда на участке (t_k, t_{k+1}^r) закон изменения относительного расстояния $y(t)$ может быть представлен формулой Тейлора

$$y(t) = -Ry_k'(t - t_k) + \frac{(t - t_k)^2}{2} y_k'' + \frac{(t - t_k)^3}{6} Y \quad (2.2)$$

$$(y_k' = y'(t_k), \quad y_k'' = y''(t_k))$$

Полагаем, что необходимые условия существования скользящего режима выполнены, т. е. $y_k^{\cdot} < 0$, $y_k^{\ddot{}} < 0$, $Y > 0$ [1].

В момент t_{k+1} имеет место равенство $y(t_{k+1}) = 0$. Поэтому для определения интервала времени $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ между двумя соседними соударениями из формулы (2.2) имеем следующее соотношение:

$$-Ry_k^{\cdot} + \frac{1}{2}\tau_k y_k^{\ddot{}} + \frac{1}{6}\tau_k^2 Y = 0 \quad (2.3)$$

где τ_k — наименьший положительный корень уравнения (2.3), т. е.

$$\tau_k = -\frac{3y_k^{\ddot{}}}{2Y} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{3} R\alpha_k \right)^{1/2} \right], \quad \alpha_k = -4Y \frac{y_k^{\cdot}}{(y_k^{\ddot{}})^2} \quad (2.4)$$

При выполнении достаточных условий существования скользящего режима [1], и, в частности, неравенства

$$\frac{5(R-1)}{6R} < \frac{4Yy_0^{\cdot}}{(y_0^{\ddot{}})^2}$$

величина $|\frac{2}{3} R\alpha_k| < 1$, и правая часть равенства (2.4) может быть представлена абсолютно сходящимся рядом по натуральным степеням произведения $R\alpha_k$

$$\tau_k = 2R \frac{y_k^{\cdot}}{y_k^{\ddot{}}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{6^n (n-1)! (n+1)!} (R\alpha_k)^n \right] \quad (2.5)$$

Из (2.5) в соответствии с (2.2) для определения величин y_k^{\cdot} и $y_k^{\ddot{}}$ имеем следующие соотношения:

$$y_{k+1}^{\cdot} = Ry_k^{\cdot} [1 - \frac{1}{6}R\alpha_k - \frac{1}{18}(R\alpha_k)^2 - \dots] \quad (2.6)$$

$$y_{k+1}^{\ddot{}} = y_k^{\ddot{}} [1 - \frac{1}{2}R\alpha_k - \frac{1}{12}(R\alpha_k)^2 - \dots]$$

Используя выражения (2.5), (2.6) в качестве итерационных преобразований, выразим τ_k через величины y_0^{\cdot} , $y_0^{\ddot{}}$. В результате получим

$$\tau_k = 2R^{k+1} \frac{y_0^{\cdot}}{y_0^{\ddot{}}} \left\{ 1 + \left(2 \frac{1-R^k}{1-R} + R^k \right) \frac{R\alpha_0}{6} + \left[7 \frac{1-R^{2k}}{1-R^2} + 2R^{2k} + \frac{7R}{1-R} \left(2 \frac{1-R^{2k-2}}{1-R^2} - 2R^{k-1} \frac{1-R^{k-1}}{1-R} + R^{k-1} - R^{2k-1} \right) \right] \frac{(R\alpha_0)^2}{36} + \dots \right\}$$

Суммируя последовательность $\{\tau_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), получим общую длительность временного промежутка, отвечающего бесконечноударному процессу, в виде ряда

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = \frac{2Ry_0^{\cdot}}{(1-R)y_0^{\ddot{}}} \left\{ 1 + \frac{R\alpha_0}{6(1-R)} \left[1 + \frac{R\alpha_0}{6(1-R^3)} (2 + 3R + 2R^2) \right] \dots \right\} \quad (2.7)$$

Перейдем теперь к получению зависимости величины τ_0 от длительности h . В соответствии с (2.5) имеем

$$\tau_0 = -\frac{R\alpha_0 y_0^{\ddot{}}}{2Y} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{6^n (n-1)! (n+1)!} (R\alpha_0)^n \right] \quad (2.8)$$

Предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в выражении (2.1) приводит в граничном случае окончания скользящего режима на многообразии схода к уравнению

$$y_0'' + hY = 0 \quad (2.9)$$

Введя безразмерный параметр

$$\delta = \frac{R\alpha_0}{1-R} \quad (2.10)$$

получаем из (2.7)—(2.10) для отыскания коэффициента длительности скользящего режима Θ следующую систему уравнений:

$$\Theta = \frac{1-R}{2} \delta \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{6^n (n-1)! (n+1)!} (1-R)^n \delta^n \right]$$

$$\delta \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{6^n (n-1)! (n+1)!} \delta^n f_n(R) \right] = 2 \quad (2.11)$$

$$f_1(R) = 1, \quad f_2(R) = \frac{2+3R+2R^2}{2(1+R+R^2)}$$

$$f_3(R) = \frac{5+18R+19R^2+19R^3+18R^4+5R^5}{5(1+R+R^2)(1+R+R^2+R^3)}, \dots, f_n(0) = 1$$

Из (2.11) непосредственно следует, что Θ зависит только от коэффициента восстановления скорости R . Точность вычисления коэффициента Θ и величины δ зависит от количества учитываемых членов ряда (2.5) и соответственно этому количества членов в рядах (2.11). Заметим, что приближения параметра δ слабо зависят от R : при изменении R на интервале $[0,1]$ нулевое δ_0 и первое δ_1 приближения параметра δ вообще остаются постоянными ($\delta_0 = 2$, $\delta_1 = 1.584$), $1.464 \leq \delta_2 \leq 1.448$, $1.386 \leq \delta_3 \leq 1.414$.

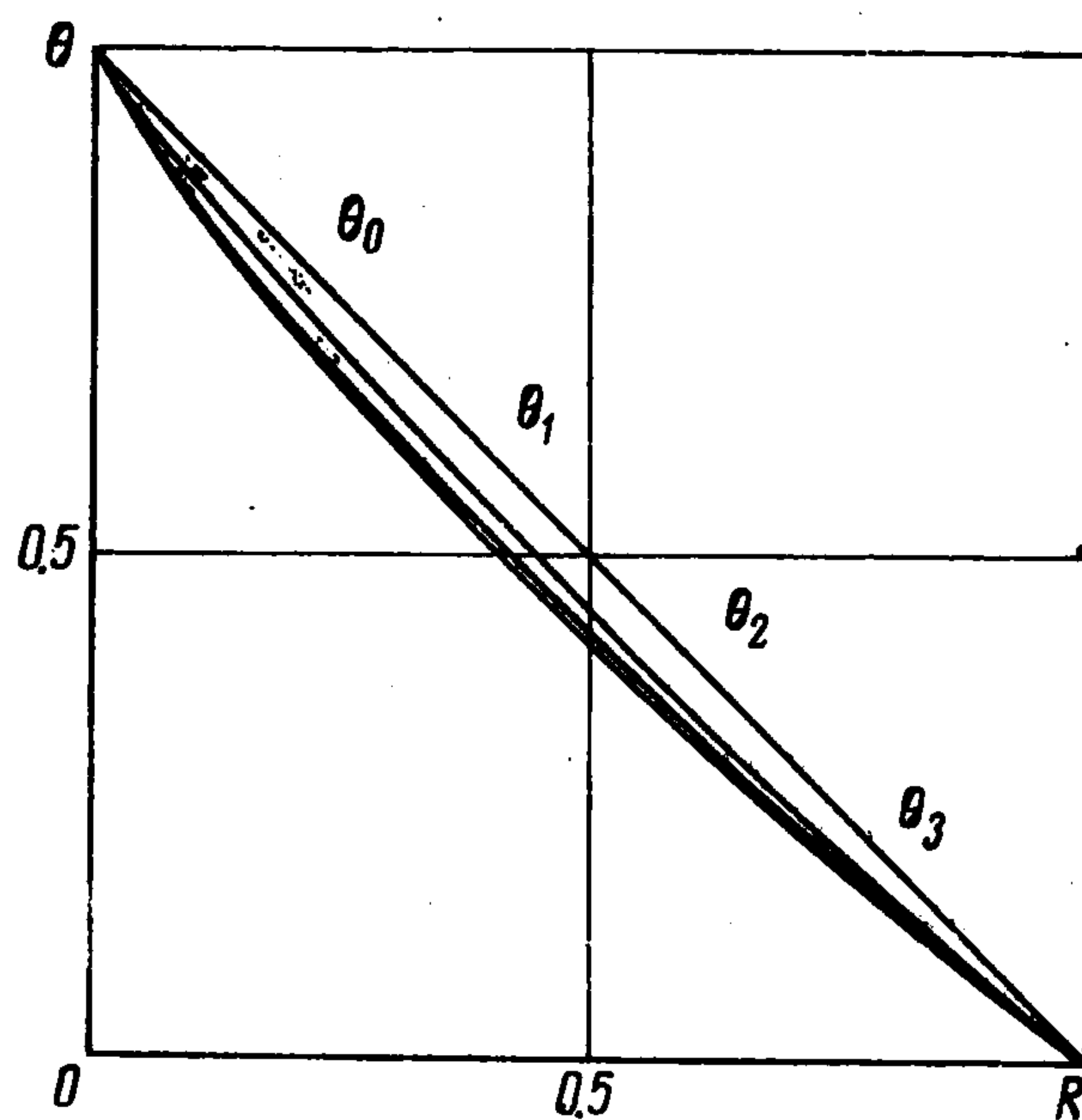
В частном [случае $y''(t) = \text{const}$ из (2.7), (2.8) следует, что коэффициент Θ совпадает со своим нулевым приближением $\Theta_0 = 1 - R$.

На фиг. 1 представлены различные приближения Θ_n коэффициента Θ .

Как показали непосредственные расчеты, для практических целей оказывается вполне достаточно третьего приближения Θ_3 , т. е. учет первых четырех членов в рядах (2.11). В этом случае для описания коэффициента длительности скользящего режима Θ целесообразно использовать интерполирующую параболическую функцию вида

$$\Theta(R) = (1-R)(1-0.4R) \quad (2.12)$$

При изменении R на практически наиболее важном интервале $0 \leq R \leq 0.6$ расхождение значений коэффициента Θ , определяемых из соотношений (2.11) и (2.12) не превышает 2.5%.



Фиг. 1

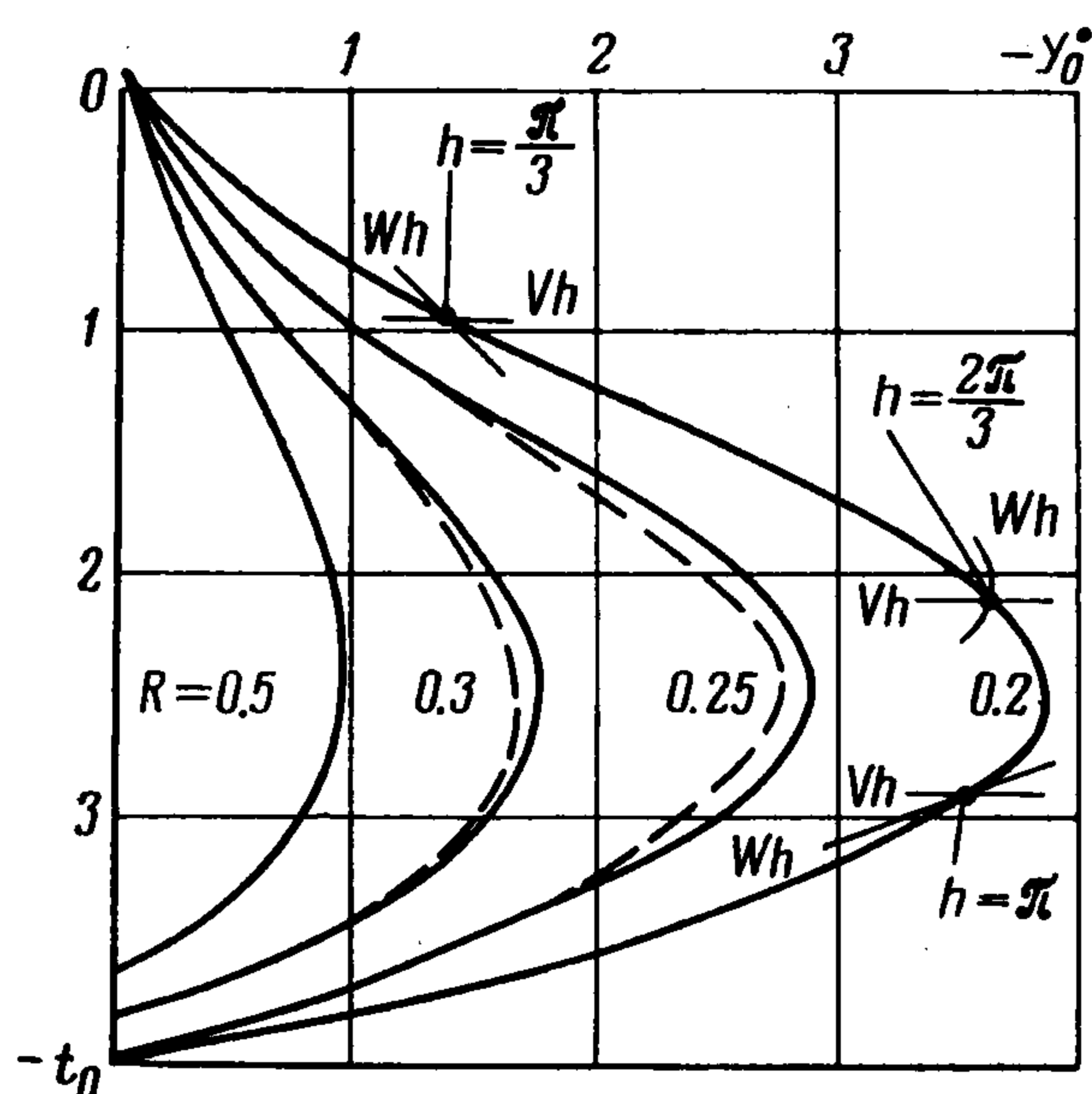
3. *Пример 1.* Из уравнений: безударных движений простейшей двухмассовой системы с двумя ударными парами [9] $y'' = -\sin t$, $|y| < d$, ударных взаимодействий $y^+ = -Ry^-$, $|y| = d$, состояния кинематической связи $y = +d$ ($y = -d$), $\sin t > 0$ и условий (1.8) окончания этого движения следует $\Phi(\tau_0, y_0^-, t_0) \equiv \sin(t_0 + \tau_0) - \sin t_0 - \tau_0(\cos t_0 + Ry_0^-) = 0$

$$\Phi(h, t_0) \equiv h + t_0 - \pi = 0 \quad (3.1)$$

С учетом (1.6) уравнение границы Γ_s^- области Π_s^- , расположенной на поверхности $y = -d$, как следует из соотношений (3.1), имеет вид

$$\sin[t_0 + \Theta(\pi - t_0)] - \sin t_0 - \Theta(\pi - t_0)(\cos t_0 + Ry_0^-) = 0 \quad (3.2)$$

На фиг. 2 приведены результаты расчета границы (3.2) при отдельных значениях коэффициента R . Пунктирными линиями даны уточненные границы области Π_s^- , полученные при помощи итерационной процедуры обратных точечных отображений [2]. Из сравнения следует, что даже первое приближение имеет сколь-нибудь заметное расхождение с уточненным решением только в области наибольших по модулю значений доударной скорости. Аналогичная область Π_s^+ располагается на поверхности $y = +d$.



Фиг. 2

В соответствии с общим подходом, изложенным в п. 1, из условия принадлежности границе (3.2) первой точки пересечения с поверхностью $y = +d$ фазовой траектории, проходящей через точку выхода $M_s^-(d, 0, \pi)$ из области Π_s^- , имеем границу C_s области существования простейших периодических движений с одним участком скользящего режима за полупериод в следующем параметрическом виде:

$$\sin[R\lambda(1.4 - 0.4R)] + \lambda(1 - 1.4R + 0.4R^2)[(1 + R)\cos\lambda + R] - \sin\lambda = 0$$

$$2d = \pi - \lambda + \sin\lambda, \quad |\lambda| \leq \pi \quad (3.3)$$

Непосредственные расчеты показали, что расхождение между расположением границы C_s , построенной при помощи итерационной процедуры [2] и соотношений (3.3) не превышает 2%.

Пример 2. Движения одномассовой модели виброударника описываются уравнениями [3, 10]

$$y'' = \sin t - \lambda^2(y + d), \quad y > 0; \quad y^+ = -Ry^-, \quad y = 0 \quad (3.4)$$

Рассмотрение порожденных соотношениями (3.4) точечных отображений поверхности Π в себя приводит к следующей зависимости:

$$\Phi(\tau_0, y_0^-, t_0) \equiv (\alpha \cos \tau - Ry_0^-) \sin 2\lambda\tau_0 + 2\lambda[d - \alpha \sin t_0 + (\alpha \sin \tau - d)(\sin^2 \lambda\tau_0 + \cos \lambda\tau_0)] = 0$$

$$\alpha = (\lambda^2 - 1)^{-1}, \quad \tau = t_0 + \tau_0 \quad (3.5)$$

Из уравнений кинематической связи между массой и преградой $y = 0$, $\sin t - \lambda^2 d < 0$ получаем выражение

$$\Phi(h, t_0) \equiv h + t_0 - \arcsin(\lambda^2 d) \quad (3.6)$$

которое совместно с условиями (2.12), (3.5) определяет в первом приближении границу Γ_s . Примеры расчета Γ_s по полученным уравнениям приведены на фиг. 3. Кривым 1 — 4 соответствуют следующие значения параметров: 1 — $\lambda = 0.3$, $d = -5.0$, $R = 0.3$, 2 — $\lambda = 0.3$, $d = 0.5$, $R = 0.4$, 3 — $\lambda = 0.5$, $d = 0$, $R = 0.3$, 4 — $\lambda = 0.9$, $d = 0.2$, $R = 0.3$.

Для сравнения пунктирными линиями изображены уточненные границы областей Π_s , полученные при помощи итерационной процедуры [3]. Незначительное расхождение результатов говорит не только о допустимости принятых идеализаций, но и о достаточности рассмотрения при этом первого приближения в сравнительно большой окрестности точки $M_s(0, 0, \arcsin(\lambda^2 d))$.

Получим уравнения границы C_s области существования простейших периодических движений с участком скользящего режима в пространстве параметров μ, d, R . Для этого запишем условия принадлежности кривой Γ_s первой точки пересечения с поверхностью Π фазовой траектории безударных движений, выходящей из точки схода M_s

$$\begin{aligned} d[1 + \alpha \cos \lambda(t_0 - t_s)] - \alpha \sin t_0 + \\ + \alpha \lambda^{-1} \cos t_s \sin \lambda(t_0 - t_s) = 0 \\ \alpha^{-1} y_0 - \lambda d \sin \lambda(t_0 - t_s) + \cos t_s \\ \cos \lambda(t_0 - t_s) - \cos t_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Очевидно, что в системе соотношений (2.12), (3.5) — (3.7) переменные τ_0, h, y_0 легко поддаются исключению и граница C_s представима в параметрическом виде двумя трансцендентными уравнениями.

Пример 3. Рассмотрим задачу о скользящем режиме при взаимодействии с неподвижной плоскостью двухмассной системы с упругой связью между элементами. Частный случай этой автономной задачи, когда до момента начального соударения массы имеют одинаковые скорости и движутся как единое целое с недеформированной упругой связью, исследовался в работе [5] методом, предложенным в работе [4].

Движения системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 y'' + c(y - x) = 0, \quad m_2 x'' + c(x - y) = 0, \quad y > 0 \\ y'^+ = -Ry'^-, \quad y = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

а в случае кинематической связи между массой m_1 и неподвижной преградой происходят по закону

$$y = 0, \quad m_2 x'' + cx = 0, \quad x < 0 \quad (3.9)$$

Из порождаемых уравнениями (3.8) точечных отображений поверхности Π в себя имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_0, x_0, x_0', y_0') \equiv (x_0' + \mu^{-1} R y_0') \tau_0 - (\cos \lambda \tau_0 - 1) x_0 - \lambda^{-1} (x_0' + R y_0') \sin \lambda \tau_0 = 0 \\ \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \lambda = \frac{\omega}{1 + \mu}, \quad \omega^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

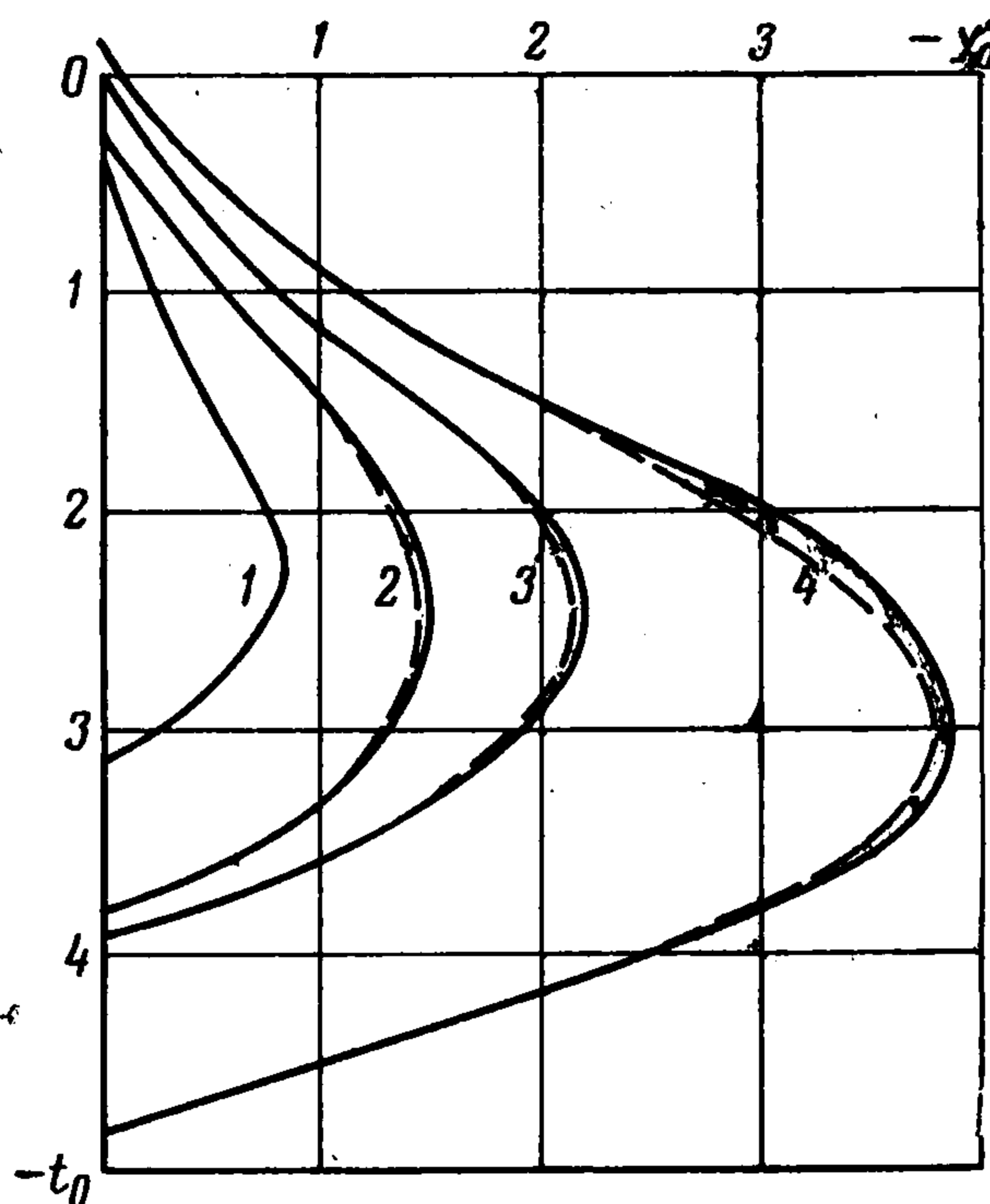
Используя идеализацию скользящего режима как движения по закону (3.9), получим следующее уравнение для отыскания h :

$$\Phi(h, x_0, x_0') \equiv \omega x_0 + x_0' \operatorname{tg} \omega h = 0 \quad (3.11)$$

Система соотношений (3.10), (3.11), (2.12) определяет в первом приближении искомую границу Γ_s . Для рассмотренного в [5] частого случая $x_0 = 0$ из (3.11) имеем $h = \pi/\omega$ и уравнения кривой Γ_s в виде

$$\begin{aligned} x_0' (v - \sin v) - y_0' R (v \mu^{-1} + \sin v) = 0 \\ v - \pi (1 - R) (1 - 0.4R) (1 + \mu)^{0.5} = 0, \quad v = \lambda \tau_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

В пространстве параметров R, μ расположение границы C_s зависит от отношения скоростей $k = x_0'/y_0'$. На фиг. 4 приведены сплошными линиями границы областей существования скользящего режима, построенные при помощи (3.12).



Фиг. 3

При специфических начальных условиях $x_0 = 0$ величина h является существенно немалой, поэтому полученные результаты подлежат уточнению.

Рассмотрим второе приближение.

В этом случае за начало скользящего режима принимается точка $M_1(x_1, y = 0, x_1', y')$, отвечающая второму соударению системы с преградой. Координаты точки M_1 получим, проинтегрировав (3.8) с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = 0, x'(t_0) = x_0', y'(t_0) = -Ry_0'$

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_0' - \mu R y_0') \tau_0 + x_0, & x_1' &= (1 + \mu)^{-1} (x_0' - \mu R y_0' + \mu \sigma) \\ y_1' &= (1 + \mu)^{-1} (x_0' - \mu R y_0' - \sigma), & \sigma &= (x_0' + R y_0') \cos \lambda \tau_0 - \lambda x_0 \sin \lambda \tau_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Интервал времени $\tau_1 = t_2 - t_1$ и длительность h определяются из уравнений

$$\begin{aligned} (x_1' - \mu R y_1') \tau_1 - x_1 (\cos \lambda \tau_1 - 1) - \lambda^{-1} (x_1' + R y_1') \sin \lambda \tau_1 &= 0 \\ \omega x_1 + x_1' \operatorname{tg} \omega h &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

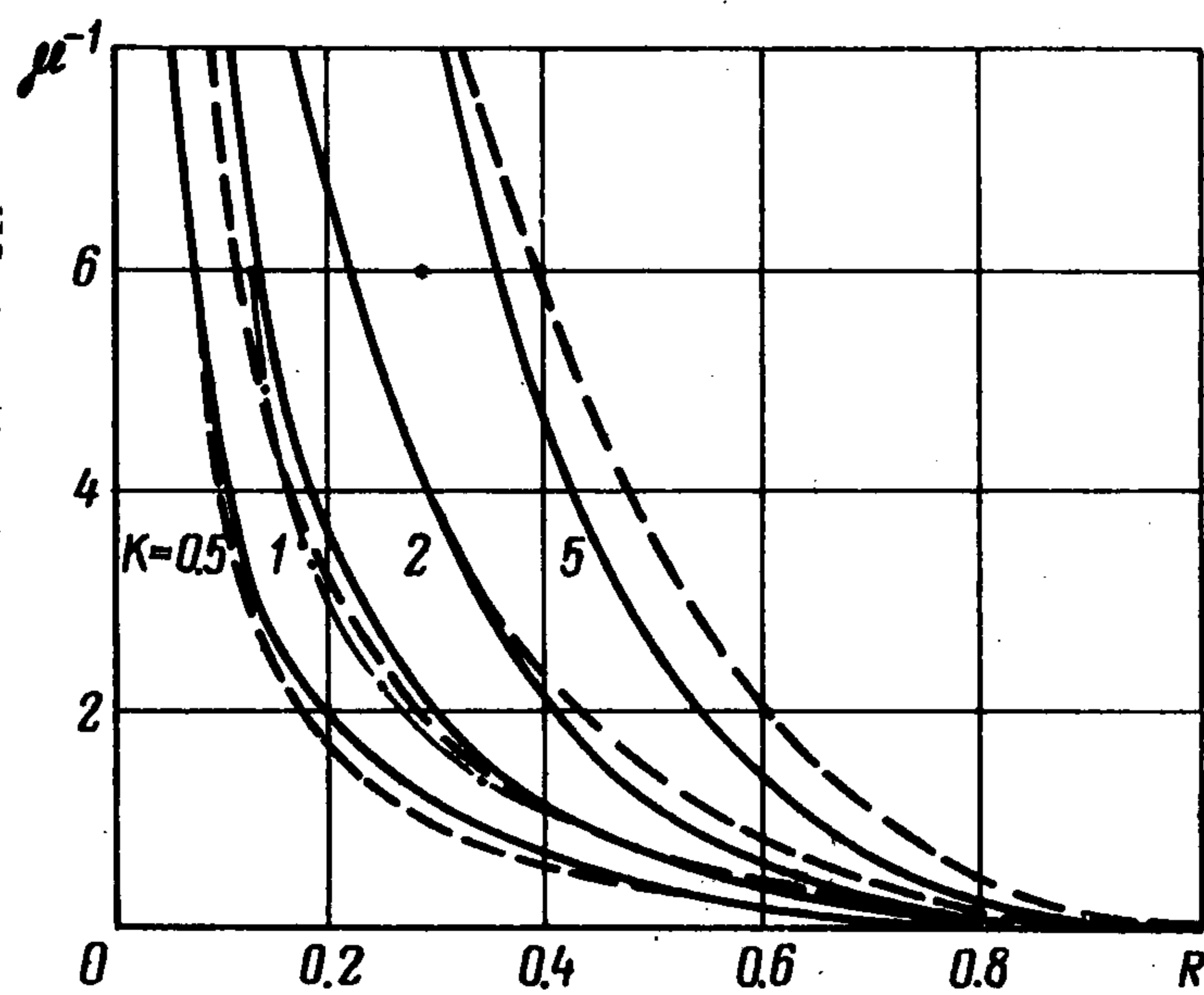
аналогичных соответственно условиям (3.10) и (3.11).

В результате преобразований из соотношений (3.10), (3.11), (3.14) получим три трансцендентных уравнения

$$\begin{aligned} [\mu(k + R)(1 + R) \cos \lambda \tau_0 + (k - \mu R)(1 - \mu R)] \tau_1 - (1 + \mu)(k - \mu R) (\cos \lambda \tau_1 - 1) \tau_0 - \lambda^{-1} [(k + R)(\mu - R) \cos \lambda \tau_0 + (k - \mu R)(1 + R)] \sin \lambda \tau_1 &= 0 \\ \lambda(k - \mu R) \tau_0 - (k + R) \sin \lambda \tau_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\operatorname{tg} \omega h = \frac{\mu(k + R) \cos \lambda \tau_0 + k - \mu R}{\omega \tau_0 (1 + \mu) (\mu R - k)}$$

которые совместно с (2.12) определяют уточненные границы $C_s(k)$.



Фиг. 4

Граничные кривые областей скользящих режимов, рассчитанные по формулам (3.15), (2.12), изображены на фиг. 4 пунктирными линиями. Здесь же штрих-пунктирной линией воспроизведена граница C_s для $k = 1$, полученная в работе [5]. Некоторое различие в расположении граничных кривых объясняется тем, что рассмотрение ограничилось вторым приближением, а также особенностями применения в [5] метода [4].

Пример 4. Рассмотрим в заключение скользящий режим в неавтономной системе с двумя степенями свободы, представляющей, в частности, модель ударного демпфера. В резонансном слу-

чае безразмерные уравнения движения имеют вид [7]

$$\begin{aligned} x'' + x &= \sin t, & y'' &= -x'', & |y| &< d \\ y' &= -Ry', & x' &= x' + \mu(1 + \mu)^{-1}(1 + R)y', & |y| &= d \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнения точечных отображений поверхностей $y = \pm d$ в себя, порождаемых соотношениями (3.16), позволяют получить зависимость $\varphi(\tau_0, x_0, x_0', y_0', t_0)$ в форме

$$\begin{aligned} x_0(1 - \cos \tau_0) + \tau_0 [x_0' + v^2(\mu - R)y_0' + 1/2 \cos(t_0 + \tau_0)] - [x_0' + \mu v^2(1 + R)y_0' + 1/2 \cos t_0] \sin \tau_0 &= 0, & v^{-2} &= 1 + \mu \end{aligned} \quad (3.17)$$

Интегрируя с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0' + \mu v^2 y_0'$ уравнения движения системы в состоянии кинематической связи между соударяющимися элементами

$$(1 + \mu) x'' = \sin t - x; \quad y = +d, \quad y'' > 0 \quad (y = -d, \quad y'' < 0)$$

получим для определения длительности h следующее условие:

$$v(\sin t_0 + \mu x_0') \cos vh + (\cos t_0 + \mu x_0' + \mu^2 v^2 y_0') \sin vh + v^{-1} \sin(t_0 + h) = 0 \quad (3.18)$$

Соотношения (3.17), (3.18), (2.12), очевидно, определяют в замкнутом виде на поверхностях $y = +d$, $y = -d$ границы соответственно Γ_s^+ и Γ_s^- областей скользящих движений Π_s^+ и Π_s^- .

Для выделения в пространстве параметров областей существования периодических движений с участком скользящего режима необходимо рассмотреть точечное преобразование поверхности Π_s^+ в поверхность Π_s^- . Обычным образом находятся координаты неподвижных точек, соответствующих периодическому движению с абсолютно неупругим соударением элементов системы [7]. При этом одна из неподвижных точек всегда принадлежит многообразию выхода M_s^+ (M_s^-) из области Π_s^+ (Π_s^-). Координаты другой неподвижной точки в случае простейших периодических движений с одним участком скользящего режима за полупериод определяются системой уравнений

$$x_0 + \sin(t_0 + h) + (\pi - h)(x_0' + y_0') + 2d = 0$$

$$x_0 \cos h + \frac{1}{\mu} \sin(t_0 + h) + \left(x_0' + \frac{1}{2} \cos t_0\right) \sin h + \frac{1}{2} (\pi - t_0) \cos(t_0 + h) - \left(x_0 + \frac{1}{\mu} \sin t_0\right) \cos vh - [x_0' + \mu v(x_0' + y_0') + \frac{1}{\mu v} \cos t_0] \sin vh = 0 \quad (3.19)$$

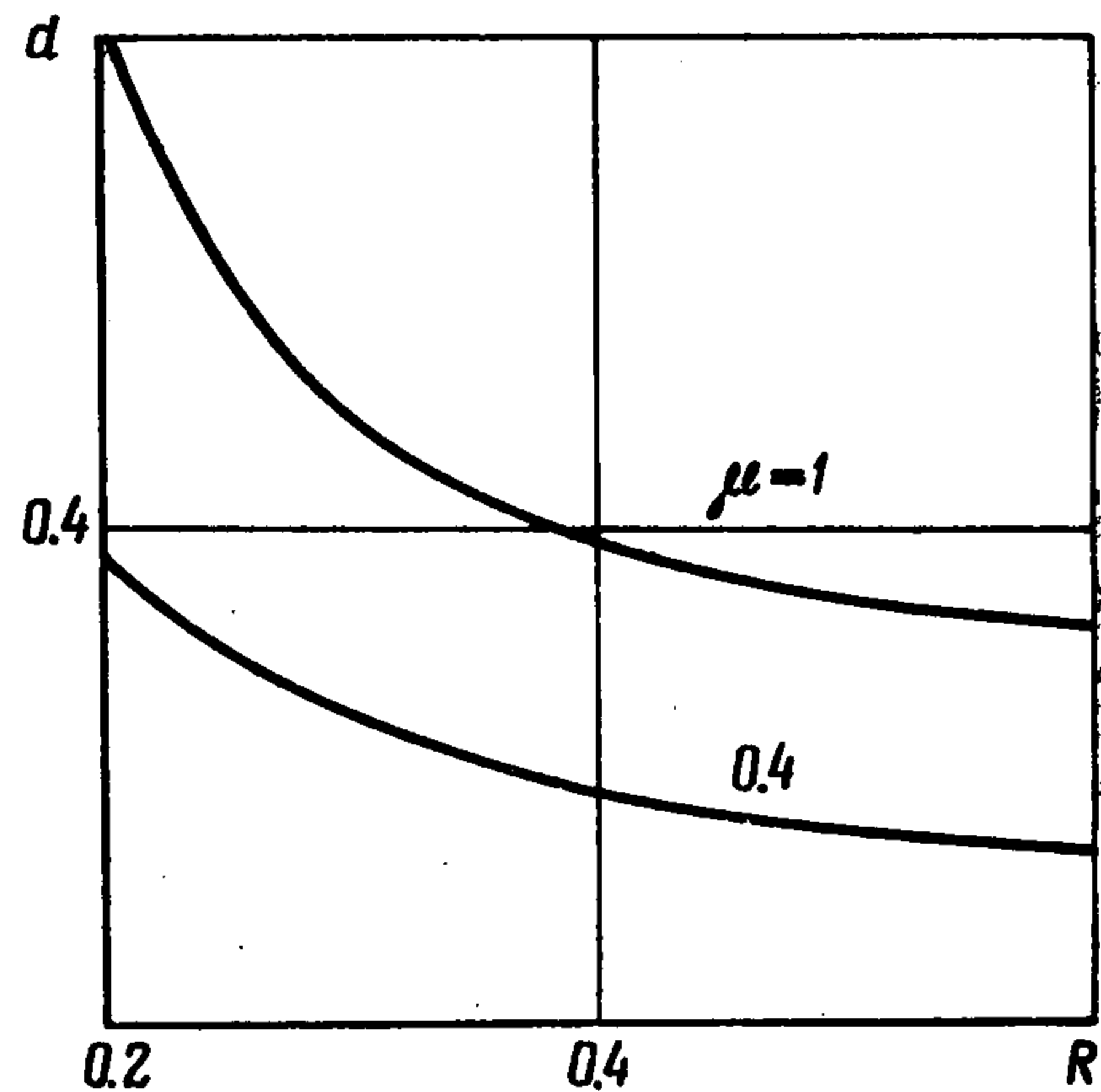
$$\begin{aligned} & (1/2 \sin t_0 - x_0) \sin h + x_0' [\cos h + v^2 (\cos vh - \sin vh) + 1] - 1/2 (\pi - t_0) \sin(t_0 + h) = 0 \\ & v(\mu x_0 + \sin t_0) \operatorname{tg} vh + [\cos(t_0 + h) - \mu x_0'] \operatorname{sec} vh - \mu x_0' - \mu^2 v^2 y_0' - \cos t_0 = 0 \end{aligned}$$

Соотношения (3.17) — (3.19) [совместно с (2.12)] накладывают связь на параметры μ , d , R рассматриваемой системы, определяя границу существования периодического движения с участком скользящего режима. Так как координаты x_0 , x_0' , y_0' входят в (3.19) линейно, граничная поверхность C_s может быть выражена в параметрическом виде тремя трансцендентными уравнениями. На фиг. 5 представлены результаты расчета сечений поверхности C_s плоскостями $\mu = \text{const}$ на интервале $0.2 \leq R \leq 0.6$.

Поступила 23 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М. И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
2. Фейгин М. И. Особенности динамики систем с ударными взаимодействиями, связанные с существованием скользящих движений. В сб. Механика машин, М., «Наука», 1972, вып. 33—34.
3. Федосенко Ю. С., Фейгин М. И. Периодические движения виброударника, включающие участок скользящего режима. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.



Фиг. 5

4. Нагаев Р. Ф. Общая задача о квазипластическом ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
 5. Нагаев Р. Ф., Якимова К. С. Об ударном взаимодействии двухмассовой упругой системы с неподвижной плоскостью. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
 6. Ксендзов А. А., Нагаев Р. Ф. Бесконечноударные периодические режимы в задаче о вибротранспортировке с подбрасыванием. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.
 7. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Инж. ж., МТТ, 1966, № 1.
 8. Баутин Н. Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамической системы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
 9. Бруштейн Р. Е., Кобринский А. Е. Периодические движения системы, содержащей шарик в полости. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
 10. Беспалова Л. В. К теории виброударного механизма. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 5.
-