Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

А. С. Озиранер

(Москва)

Рассматривается твердое тело с односвязной полостью, содержащей жидкость. В случае, когда потенциальная энергия определенно-положительна по отношению к части обобщенных координат, даны достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия по отношению к части координат, обобщенным скоростям и кинетической энергии жидкости. Показано, что асимптотическая устойчивость равномерна по начальным возбуждениям из любого компактного множества некоторой окрестности положения равновесия.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, \quad z_1, \ldots, z_p)$ — вещественный n-вектор, причем $n = m + p$, $m > 0$, $p \geqslant 0$. Предположим, что

а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \quad 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < +\infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения;

б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы, т. е. каждое решение $\mathbf{x}(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$, при которых $\|\mathbf{y}(t)\| \leqslant H$.

Обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ решение системы (1.1), определенное начальным условием $\mathbf{x}(t_0;\ t_0,\ \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Здесь приняты обозначения обзорной статьи [1].

Теорема 1. Если существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая в области (1.2) условиям:

1) $V(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|)$, здесь $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $[0, H]$ функция, $a(0) = 0$;

2) $V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}) \leqslant -W(t, \mathbf{x})$, причем $W(t, \mathbf{x}) \geqslant b(\|\mathbf{y}\|)$ ($b(r)$ — функция типа $a(r)$);

3) для любого $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta'(t_0) > 0$ такое, что для каждой точки $\mathbf{x}_0$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta'$ существует постоянная $M(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, при которой $W^{\boldsymbol{\cdot}}$ ограничена вдоль каждого решения, начинающегося в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, т. е.

$$|W^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))| \leqslant M \quad \text{для } t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

то движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво.

Доказательство. В силу условий 1) и 2) движение $x = 0$ y-устойчиво [2], поэтому для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ существует $\delta(\varepsilon, t_0)$, $0 < \delta < \delta'$, такое, что из $\| x_0 \| < \delta$ следует $\| y(t;\ t_0, x_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что $\lim W(t, x(t;\ t_0, x_0)) = 0$ при $t \to \infty$, если только $\| x_0 \| < \delta$.

Допустим противное: пусть существуют число $l > 0$, точка x_* с $\| x_* \| < \delta$ и последовательность $t_k \to \infty$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $t_k - t_{k-1} \geqslant \alpha > 0$, для которых

$$W(t_k), x(t_k, t_0, x_*)) \geqslant l \tag{1.4}$$

На основании (1.3) и (1.4) из соотношения

$$W(t, x(t;\ t_0, x_*)) = W(t_k, x(t_k;\ t_0, x_*)) + \int\limits_{t_k}^{t} W^{\cdot}(\tau, x(\tau;\ t_0, x_*))\, d\tau$$

заключаем, что существует β, $0 < \beta < \alpha / 2$, для которого $W(t, x(t;\ t_0, x_*)) \geqslant l / 2$ при $t \in [t_k - \beta,\ t_k + \beta]$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно (см. условие 2) теоремы)

$$V^{\cdot}(\tau, x(\tau;\ t_0, x_*)) \leqslant -l/2 \quad \text{при } \tau \in [t_k - \beta, t_k + \beta], \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Далее имеем

$$0 \leqslant V(t_k + \beta, x(t_k + \beta;\ t_0, x_*)) = V(t_0, x_*) + \int\limits_{t_0}^{t_k+\beta} V^{\cdot}(\tau, x(\tau;\ t_0, x_*))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant V(t_0, x_*) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_i-\beta}^{t_i+\beta} V^{\cdot}(\tau, x(\tau;\ t_0, x_*))\, d\tau \leqslant V(t_0, x_*) - l\beta k$$

что при достаточно большом k невозможно. Теорема доказана.

Теорема 2. Если существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 1, причем $W^{\cdot} \leqslant 0$, то движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво. Если, кроме того, система (1.1) и функция W ω-периодичны по t (или не зависят от времени), то асимптотическая y-устойчивость равномерна по $\{t_0,\ x_0\}$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что

$$W(t, x(t;\ t_0, x_0)) \downarrow 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.5}$$

В противном случае $W(t, x(t;\ t_0, x_0)) \geqslant l > 0$ при $t \geqslant t_0$. Но тогда $V^{\cdot}(t, x(t;\ t_0, x_0)) \leqslant -l$ при $t \geqslant t_0$, и из соотношения

$$V(t, x(t;\ t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} V^{\cdot}(\tau, x(\tau;\ t_0, x_0))\, d\tau$$

следует

$$V(t, x(t;\ t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) - l(t - t_0)$$

что при достаточно большом t невозможно.

Из (1.5) заключаем, что движение $x = 0$ асимптотически y-устойчиво. В случае, когда система (1.1) и функция W ω-периодичны по t, требуемая равномерность вытекает из теоремы 1 работы [3].

Замечание. Доказанные теоремы обобщают соответственно теоремы 3, 4 работы [3].

2. Движение голономной механической системы с обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ и не зависящими от времени связями, которая находится под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, описывается системой уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}q_j^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} \quad (i = 1, \ldots, n), \; g_{ij} = -g_{ji} \qquad (2.1)$$

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим [2]

$$H^{\cdot} = -2f \qquad (2.2)$$

Пример 1 работы [3] допускает следующее обобщение.

Предположим, что

1) система (2.1) допускает частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{0}$ (положение равновесия);

2) потенциальная энергия $U = U(q_1, \ldots, q_n)$ определенно-положительна по отношению к $q_1, \ldots, q_m$ $(m < n)$, а диссипативная функция $f = f(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — определенно-положительная относительно всех скоростей квадратичная форма; при этом в силу (2.2) положение равновесия устойчиво по $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ [2];

3) из каких-либо механических соображений известно, что каждое решение системы (2.1), начинающееся в некоторой окрестности точки $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{0}$, ограничено [1];

4) в множестве $U(\mathbf{q}) > 0$ нет положений равновесия.

Повторяя рассуждения примера 1 работы [3] с очевидной заменой множества $q_1^2 + \ldots + q_m^2 > 0$ множеством $U(\mathbf{q}) > 0$, убеждаемся, что $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}^{\cdot}(t)) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, если $\|\mathbf{q}(0)\| + \|\mathbf{q}^{\cdot}(0)\|$ достаточно мала. По теореме 1 работы [3] отсюда следует, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots$ $\ldots, q_n^{\cdot}$ равномерно по $\{t_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}, \mathbf{q}_0^{\cdot}\}$.

В таком виде этот пример может быть распространен на задачу устойчивости положения равновесия твердого тела с жидким наполнением.

3. Рассмотрим твердое тело, имеющее односвязную полость, которая частично или целиком заполнена однородной несжимаемой вязкой (или идеальной) жидкостью. Предположим, что наложенные связи не зависят от времени и на систему действуют потенциальные силы, а также внешние диссипативные силы с полной диссипацией; силой поверхностного натяжения пренебрегаем. Уравнения движения примем в виде [4]

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j - \frac{\partial f}{\partial q_j^{\cdot}} \qquad (j = 1, \ldots, n \leqslant 6) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\end{gathered} \qquad (3.1)$$

---

[1] Это условие можно считать выполненным, и все последующие выводы остаются в силе, например в том случае, когда координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ угловые (mod 2π), и все величины, входящие в систему (2.1), и функция H 2π-периодичны по $q_{m+1}, \ldots, q_n$ [3].

К этим уравнениям следует добавить соответствующие граничные и начальные условия; здесь $f(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — определенно-положительная квадратичная форма, $\nu > 0$ для вязкой жидкости и $\nu = 0$ для идеальной жидкости.

В силу предположения о потенциальности действующих сил, имеем [4]

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi_j q_j^{\cdot} + \rho \int_{\tau} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\tau = -U^{\cdot}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости.

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим [4]

$$H^{\cdot} = -2f - \int_{\tau} E d\tau \tag{3.2}$$

здесь [4]

$$E = \mu \left\{ 2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\}$$

а $x_1 x_2 x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом.

Обозначим через $e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ компоненты тензора скоростей деформаций.

Далее, как и в работе [5], будут сделаны некоторые предположения о характере возмущенного движения.

Следуя [5], сделаем непрерывную замену переменных

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3), \quad \nu = \nu(x_1, x_2, x_3), \quad \tau = W(x_1, x_2, x_3)$$

и пусть уравнение боковой стенки $\nu(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 = \text{const}$, а уравнение свободной поверхности жидкости представимо в виде $\tau - \alpha_0 = \varkappa(t, \lambda, \nu)$, $\alpha_0 = \text{const}$.

Считается, что заданием в начальный момент $t = t_0$ значений

$$\mathbf{q}_0, \ \mathbf{q}_0^{\cdot}, \ u_i(t_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$\varkappa(t_0, \lambda, \nu)$$

причем $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, последующее движение системы определено однозначно.

Предположим, что (ср. с п.2)

1) уравнения движения (3.1) допускают частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (положение равновесия);

2) потенциальная энергия U определенно-положительна относительно $q_1, \ldots, q_m$ $(m < n)$; при этом в силу (3.2) положение равновесия устойчиво по отношению к $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$, T_2 (T_2 — кинетическая энергия жидкости);

3) координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ угловые (mod 2π), и все величины, входящие в систему (3.1), и функция H 2π-периодичны по $q_{m+1}, \ldots, q_n$; при этом можно считать [3], что в возмущенном движении $q_{m+1}(t), \ldots, q_n(t)$ ограничены;

4) в множестве $U > 0$ нет положений равновесия.

Пусть при всяком $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ в возмущенном движении уклонение ∇ удовлетворяет условию [4] $\nabla > \varepsilon l$.

Примем следующее предположение А:

А) Вдоль каждого возмущенного движения вектор относительной скорости жидкости $\mathbf{u}$ и его полная производная по времени $\mathbf{u}^{\cdot}$ остаются равномерно ограниченными во все время движения во всей жидкости

$$\|\mathbf{u}\| \leqslant M, \quad \|\mathbf{u}^{\cdot}\| \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0$$

В таком случае производная $f^{\cdot}$ в силу разрешенной относительно $q_j^{\cdot\cdot}$ $(j = 1, \ldots, n)$ первой группы уравнений (3.1) будет ограниченной вдоль любого возмущенного движения. Отсюда, учитывая (3.2), на основании теоремы 1 заключаем, что положение равновесия асимптотически устойчиво относительно $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ [1]. Этот вывод справедлив как для вязкой, так и для идеальной жидкости.

Далее предполагается, что жидкость вязкая.

Наряду с предположением А примем следующие предположения Б, В и Г.

Б) Вдоль любого возмущенного движения компоненты тензора скоростей деформаций и их полные производные по времени и частные производные по координатам x_s, а также частные производные $\partial u_i / \partial x_j$ остаются равномерно ограниченными во все время движения во всей жидкости

$$|e_{ij}| \leqslant M, \quad |e_{ij}^{\cdot}| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_s}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \leqslant M \quad (i, j, s = 1, 2, 3) \qquad (3.3)$$

В) [5] Функция $\varkappa(t, \lambda, \nu)$ непрерывна по λ, ν равномерно по $t \geqslant 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из $|\lambda' - \lambda''| < \delta$, $|\nu' - \nu''| < \delta$ следует $|\varkappa(t, \lambda', \nu') - \varkappa(t, \lambda'', \nu'')| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Г) [5] Функция H непрерывно зависит от начальных условий, т. е. для любых $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \theta) > 0$ такое, что из

$$\|\mathbf{q}_0' - \mathbf{q}_0''\| < \delta, \ \|\mathbf{q}_0'^{\cdot} - \mathbf{q}_0''^{\cdot}\| < \delta, \ |\varphi_i'(x_1, x_2, x_3) - \varphi_i''(x_1, x_2, x_3)| < \delta$$
$$|\varkappa'(0, \lambda, \nu) - \varkappa''(0, \lambda, \nu)| < \delta$$

следует

$$|H(\mathbf{q}'(\theta), \ \mathbf{q}'^{\cdot}(\theta), \ \mathbf{u}'(\theta, x_1, x_2, x_3), \varkappa'(\theta, \lambda, \nu)) -$$
$$- H(\mathbf{q}''(\theta), \ \mathbf{q}''^{\cdot}(\theta), \ \mathbf{u}''(\theta, x_1, x_2, x_3) \ \varkappa''(\theta, \lambda, \nu))| < \varepsilon$$

В силу (3.3) в возмущенном движении $E^{\cdot}$ и

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} E d\tau$$

ограничены. Поэтому в возмущенном движении $e_{ij} \to 0$ при $t \to \infty$ во всей жидкости (это доказывается с использованием (3.2) так же, как и теорема 1). Кроме того, как было установлено, $\mathbf{q}^{\cdot}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, кинетическая энергия $T \to 0$ при $t \to \infty$.

Покажем, что $H \to 0$ при $t \to \infty$.

---

[1] Рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы. Однако доказательство теоремы 1 в данном случае полностью сохраняется.

Допустим противное; тогда $H \to H^* > 0$, причем

$$H \geqslant H^* \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \tag{3.4}$$

Для любой последовательности $t_s \to \infty$ последовательность функций $\{\varkappa(t_s, \lambda, \nu)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (см. В)), поэтому в силу теоремы Арцела из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, для некоторой последовательности $t_k \to \infty$

$$\mathbf{q}(t_k) \to \mathbf{q}_*, \quad \mathbf{q}^{\cdot}(t_k) \to 0, \quad \mathbf{u}(t_k, x_1, x_2, x_3) \to 0, \varkappa(t_k, \lambda, \nu) \to \varkappa_*(\lambda, \nu)$$

Заметим, что

$$H\,|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_*, \mathbf{q}^{\cdot}=0, \mathbf{u}=0, \varkappa=\varkappa_*} = H^*$$

следовательно, $U(\mathbf{q}_*, \varkappa_*) = H^* > 0$. Приняв предельную «точку» ($\mathbf{q}_*$, $\mathbf{q}_*^{\cdot} = 0$, $\mathbf{u} = 0$, $\varkappa_*$) за начало нового возмущенного движения ($\mathbf{q}^*(t)$, $\mathbf{q}^{*\cdot}(t)$, $\mathbf{u}^*(t, x_1, x_2, x_3)$, $\varkappa^*(t, \lambda, \nu)$), получим в силу предположения 4), что при некотором $\theta > 0$

$$H(\mathbf{q}^*(\theta), \mathbf{q}^{*\cdot}(\theta), \mathbf{u}^*(\theta, x_1, x_2, x_3), \varkappa^*(\theta, \lambda, \nu)) < H^*$$

Используя непрерывную зависимость (условие Г) и групповое свойство автономных систем, так же как и в примере 1 работы [3], получим, что в исходном возмущенном движении при всех k, больших некоторого N, будет

$$H(\mathbf{q}(t_k + \theta), \mathbf{q}^{\cdot}(t_k + \theta), \mathbf{u}(t_k + \theta, x_1, x_2, x_3)\, \varkappa(t_k + \theta, \lambda, \nu)) < H^*$$

что противоречит неравенству (3.4).

Итак, в возмущенном движении $H \to 0$, $\mathbf{q}^{\cdot} \to 0$, $q_i \to 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\mathbf{u} \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть $\alpha > 0$ таково, что из

$$\begin{gathered} \|\sigma_0\| \leqslant \alpha, \ \|\mathbf{q}_0^{\cdot}\| \leqslant \alpha, \ |\varphi_i(x_1, x_2, x_3)| \leqslant \alpha \quad (i = 1, 2, 3) \\ |\varkappa(0, \lambda, \nu) - \varkappa^\circ(\lambda, \nu)| \leqslant \alpha \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\tau - \alpha_0 = \varkappa^\circ(\lambda, \nu)$ — уравнение свободной поверхности в невозмущенном движении, следует $H \to 0$ при $t \to \infty$. Среди функций φ_i и $\varkappa(0, \lambda, \nu)$, удовлетворяющих условию (3.5), выберем класс K равностепенно непрерывных (в силу (3.5) эти функции равномерно ограничены).

Покажем, что соотношение $H \to 0$ при $t \to \infty$ выполняется равномерно по начальным возмущениям из «области»

$$\|\mathbf{q}_0\| \leqslant \alpha, \ \|\mathbf{q}_0^{\cdot}\| \leqslant \alpha, \ (\varphi_i, \varkappa) \in K \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.6}$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\theta(\varepsilon) > 0$ такое, что если начальные возмущения при $t = 0$ лежат в области (3.6), то $H < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$.

Действительно, для любой точки $\mu_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varkappa)$ из области (3.6) существует $\theta(\varepsilon, \mu_0) > 0$ такое, что

$$H(\mu(\theta, \mu_0)) < \varepsilon \tag{3.7}$$

Здесь $\mu(t, \mu_0)$ означает решение ($\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{q}^{\cdot}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\varkappa(t, \lambda, \nu)$), выходящее при $t = 0$ из точки μ_0.

По непрерывности (условие Г) существует окрестность $O(\mu_0)$ точки μ_0 такая, что для любой точки $\mu_0' \in O(\mu_0)$

$$H(\mu(\theta, \mu_0')) < \varepsilon \tag{3.8}$$

Вдоль движения H монотонно убывает, поэтому из (3.8) следует, что

$$H(\mu(t, \mu_0')) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant \theta, \; \mu_0' \in O(\mu_0) \tag{3.9}$$

В класс K входят равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные функции, поэтому область (3.6) компактна, и, следовательно, из системы покрывающих ее окрестностей $\{O(\mu_0)\}$ можно выделить конечное подпокрытие $O_1, \ldots, O_s$. Пусть этому подпокрытию соответствуют числа $\theta_1, \ldots, \theta_s$. Положим $\theta(\varepsilon) = \max\{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$ ($\theta(\varepsilon)$ зависит только от ε). Из (3.9) следует, что

$$H(\mu(t, \mu_0)) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant \theta(\varepsilon)$$

если μ_0 лежит в области (3.6), что и требовалось доказать.

Следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, T_2$ равномерно по начальным условиям из области (3.6).

Замечание. Аналогично [5] легко показать, что если в рассматриваемом здесь случае диссипативные силы обладают частичной диссипацией или вовсе отсутствуют ($f \equiv 0$), а в множестве $H > 0$ нет движений всей системы как одного твердого тела [1], то в возмущенном движении $H \to 0$ при $t \to \infty$, и притом равномерно в области (3.6), что доказывается аналогично изложенному выше. Следовательно, вывод об асимптотической устойчивости относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, T_2$, равномерной по начальным условиям из области (3.6), при указанных условиях остается в силе. В частном случае, когда в положении равновесия потенциальная энергия U имеет минимум, отсюда для теоремы 1.1 работы [5] вытекает дополнение о равномерности по начальным условиям из области (3.6).

Автор благодарит В. В. Румянцева за руководство работой и постоянное внимание.

Поступила 5 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Озиранер А. С., Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4.
3. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1972, № 1.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. Пожарицкий Г. К. О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.

[1] Необходимые и достаточные условия наличия такого движения даются теоремой Жуковского (см. [4], стр. 67).