Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 534

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

А. З. Авербух, Е. В. Веницианов

(Москва)

Для уравнений, допускающих существование волновых решений, разрабатывается метод «усредненного лагранжиана» получения дисперсионной системы, описывающей медленные изменения волновых параметров для квазистационарных волн. В первом, «адиабатическом» приближении дисперсионная система для уравнения Клейна — Гордона принадлежит гиперболическому типу квазилинейных систем и допускает разрывные решения. Исследуется структура скачков для консервативного и неконсервативного случаев и определяется число свободных параметров в скачке.

При исследовании нелинейных волн с дисперсией широко применяются различные асимптотические методы [1,2]. Для квазистационарных волн, т. е. волн, характеризующихся медленным изменением волновых параметров по сравнению с основными колебаниями, был предложен метод адиабатического приближения [3] получения дисперсионной системы уравнений. Этот метод основан на усреднении по быстрой переменной уравнений, эквивалентных исходным и записанных в дивергентной форме. Сначала для консервативных [4], а затем и для неконсервативных систем [5] было показано, что дисперсионная система может быть получена из соответствующим образом усредненного вариационного уравнения. Такого рода усреднения, представляющие интегрирование по части независимых переменных, применяются в теории оболочек, стержней при использовании метода Бубнова, а также в асимптотической теории нелинейных колебаний [6].

1. Получение дисперсионной системы из вариационного уравнения в усредненной форме. Рассмотрим следующее уравнение типа уравнения Эйлера:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)+\frac{\partial L}{\partial u}+Q_{(u)}=0 \tag{1.1}$$

для обобщенного вариационного уравнения [7]

$$\delta\int\limits_{V_0} L(u, u_t, u_x)\,dx\,dt+\delta W^*=0 \tag{1.2}$$

здесь δW^* — неголономная вариация функционала

$$\delta W^*=\int\limits_{V_0} Q_{(u)}(u, u_t, u_x, \varepsilon)\,\delta u\,dx\,dt, \qquad Q_{(u)}=\varepsilon Q_{(u)}^{(1)}+\varepsilon^2 Q_{(u)}^{(2)}+\ldots$$

ε — малый положительный параметр. В уравнении (1.2) вариации на границе области интегрирования V_0 приравнены нулю.

Допустим, что при $\varepsilon=0$ уравнение (1.1) имеет решения в виде бегущей стационарной волны с постоянными параметрами a, $w^{(0)}$, $k^{(0)}$

$$u=U^{(0)}(\vartheta, a), \qquad \vartheta=k^{(0)}x-\omega^{(0)}t$$

Квазистационарные волновые решения уравнения (1.1) характеризуются медленным изменением по x и t параметров a, ω, k. Предположим, что эти решения представимы разложениями по ε вида

$$u = \sum_{m=0} \varepsilon^m U^{(m)}(\vartheta, a, \ldots) \tag{1.3}$$

$$\vartheta_t \equiv -\omega = -\sum_{m=0} \varepsilon^m \omega^{(m)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \qquad \vartheta_x \equiv k = \sum_{m=0} \varepsilon^m k^m (\varepsilon x, \varepsilon t)$$

$$a_t = \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} A^{(m+1)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \qquad a_x = \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} B^{(m+1)}(\varepsilon x, \varepsilon t)$$

Применяя обычный метод нахождения $U^{(m)}$ после подстановки (1.3) в (1.1) и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях ε, из условий периодичности функций $U^{(0)}$, $U^{(1)}, \ldots$ можно получить дисперсионную систему в частных производных относительно a, ω, k [5, 8]. Вопросы сходимости по ε в работе не исследуются; рассматриваются решения, имеющие наперед заданную по ε точность.

Эта же дисперсионная система может быть получена из вариационного уравнения в усредненной форме при вариациях $\delta\vartheta$ и δa. Усредненный лагранжиан $\bar{L}$ вводится в виде

$$\bar{L}(\vartheta_t, \vartheta_x, a, a_t, a_x, H_t, H_x, H) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(U^{(0)}, \vartheta_t U_\vartheta^{(0)} + a_t U_a^{(0)} + H_t U_H^{(0)}, \ldots)\, d\vartheta \tag{1.4}$$

где $U_\vartheta^{(0)}$, $U_a^{(0)}$ — производные по явно входящим ϑ и a, а H включает в себя другие медленно меняющиеся, далее неварьируемые члены. Усредненная неголономная вариация $\overline{\delta W^*}$ задается в виде

$$\overline{\delta W^*} = \int_{V_0} [Q_{(\vartheta)}\delta\vartheta + Q_{(a)}\delta a]\, dx\, dt \tag{1.5}$$

$$Q_{(\vartheta)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{(u)}(u, u_t, u_x, \varepsilon)\, U_\vartheta^{(0)}\, d\vartheta, \qquad Q_{(a)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{(u)}(u, u_t, u_x, \varepsilon)\, U_a^{(0)}\, d\vartheta$$

Здесь $Q_{(\vartheta)}$, $Q_{(a)}$ — усредненные обобщенные силы, а функция u берется в виде (1.3).

Отметим, что для консервативных систем, когда $\delta W^* = 0$, дисперсионная система в любом по ε приближении определяется лишь стационарным решением $U^{(0)}$.

Дисперсионная система в первом после стационарного приближении может быть получена, если в (1.4) положить нулю a_t и a_x, т. е. усредненный лагранжиан взять в виде

$$\bar{L} = \bar{L}^{(0)}(\vartheta_t, \vartheta_x, a)$$

а в (1.5) взять $u = U^{(0)}$. Получаемая система квазилинейных уравнений описывает адиабатическое приближение Уитема [3, 9].

В ряде важных случаев эта квазилинейная система является гиперболической и допускает существование разрывных решений. Эти скачки, введенные в рассмотрение Уитемом [3], в отличие от ударных волн в сплошных средах не связаны с необратимыми трансформациями энергии, а схематизируют в первом приближении области быстрых изменений волновых параметров. Дисперсионная система в этом приближении неверна для этих узких зон, но может быть использована для записи условий на скачках. Эти условия можно получить как из дисперсионной системы, представленной в дивергентной форме, так и из усредненного вариационного уравнения [10], и имеют вид

$$\left[\overline{L}^{(0)} - k\frac{\partial \overline{L}^{(0)}}{\partial k}\right] = v\left[k\frac{\partial \overline{L}^{(0)}}{\partial \omega}\right]$$

$$\left[\omega\frac{\partial \overline{L}^{(0)}}{\partial k}\right] = v\left[\overline{L}^{(0)} - \omega\frac{\partial \overline{L}^{(0)}}{\partial \omega}\right] \tag{1.6}$$

где v — скорость разрыва, $[\varphi]$ — разность значений функции φ до и после скачка.

Подчеркнем, что условия (1.6) получены для первого, адиабатического приближения.

Дисперсионная система в более высоком приближении позволяет исследовать структуру и эволюционность этих скачков.

2. Консервативные системы. Рассмотрим в качестве примера уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0 \tag{2.1}$$

для которого в вариационном уравнении (1.2)

$$L = -\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + V(u), \qquad \delta W^* = 0$$

а $V'(u)$ — вообще нелинейная функция. Стационарная волна $u^{(0)}(\vartheta, a)$ определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\omega^{(0)^2} - k^{(0)^2})\, U^{(0)}_{\vartheta\vartheta} + V'(U^{(0)}) = 0$$

первый интеграл которого имеет вид

$$\frac{\omega^{(0)^2} - k^{(0)^2}}{2}\, U_\vartheta^{(0)^2} + V(U^{(0)}) = \frac{a^2}{2}$$

и дается обращением интеграла

$$\vartheta = \pm\sqrt{\omega^{(0)^2} - k^{(0)^2}} \int\limits_{a_1}^{U^{(0)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - 2V(y)}} \tag{2.2}$$

Здесь a_1, a_2 — два последовательных корня уравнения

$$s(y) \equiv a^2 - 2V(y) = 0$$

таких, что при $a_1 < y < a_2$ имеет место $s(y) > 0$ и в окрестности a_i модуль $s(y)$ порядка $|y - a_i|^{\alpha_i}$, причем $\alpha_i < 2$. Как видно из (2.2), $U^{(0)}$ — четная по ϑ функция; далее рассматривается ветвь, соответствующая $\vartheta > 0$.

Запишем усредненный лагранжиан (1.4) для уравнения (2.1)

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\vartheta_t^2+\vartheta_x^2}{2}U_\vartheta^{(0)2} + \frac{-a_t^2+a_x^2}{2}U_a^{(0)2} + V(U^{(0)})\right]d\vartheta \equiv$$

$$\equiv \frac{-a_t^2+a_x^2}{2}\varphi_1 + \frac{-\vartheta_t^2+\vartheta_x^2}{2}\varphi_2 + \varphi_3$$

(функции φ_1, φ_2, φ_3 определяются как интегралы от $U_a^{(0)2}$, $U_\vartheta^{(0)2}$ и $V(U^{(0)})$ соответственно). Дисперсионную систему составят тогда уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial x}(k\varphi_2) = 0 \tag{2.3}$$

$$a_{tt} - a_{xx} - \frac{a_t^2 - a_x^2}{2}\frac{\varphi_{1a}}{\varphi_1} - \frac{\omega^2 - k^2}{2}\frac{\varphi_{2a}}{\varphi_1} + \frac{\varphi_{3a}}{\varphi_1} = 0 \tag{2.4}$$

$$\omega_x + k_t = 0 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3), (2.4) могут быть записаны в виде законов сохранения, следующих из теоремы Нётер [11] об инвариантности лагранжиана $\bar{L}$ относительно группы трансляций по t и x

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T_{21}}{\partial t} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

Здесь

$$T_{11} = a_t\bar{L}_{a_t} + \vartheta_t\bar{L}_{\vartheta_t} - \bar{L} = -\frac{a_t^2+a_x^2}{2}\varphi_1 - \frac{\vartheta_t^2+\vartheta_x^2}{2}\varphi_2 - \varphi_3$$

$$T_{12} = a_t\bar{L}_{a_x} + \vartheta_t\bar{L}_{\vartheta_x} = a_t a_x\varphi_1 + \vartheta_t\vartheta_x\varphi_2$$

$$T_{21} = a_x\bar{L}_{a_t} + \vartheta_x\bar{L}_{\vartheta_t} = -T_{12}$$

$$T_{22} = a_x\bar{L}_{a_x} + \vartheta_x\bar{L}_{\vartheta_x} - \bar{L} = \frac{a_t^2+a_x^2}{2}\varphi_1 + \frac{\vartheta_t^2+\vartheta_x^2}{2}\varphi_2 - \varphi_3$$

В адиабатическом приближении в дисперсионной системе следует пренебречь членами второго порядка по ε. Тогда из (2.5) находится дисперсионное соотношение между ω, k, a

$$\omega^2 - k^2 = \frac{2\varphi_{3a}}{\varphi_{2a}} \equiv \Phi(a) \tag{2.7}$$

из которого можно определить $\omega(k, a)$, и вся дисперсионная система примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{k^2+\Phi(a)}\,\varphi_2(a)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[k\varphi_2(a)\right] = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{k^2+\Phi(a)}\right] = 0$$

Дисперсионная система (2.8) принадлежит гиперболическому типу квазилинейных приводимых систем и допускает два семейства характеристик [3]. Она приводит к многозначным решениям, поэтому были рассмотрены разрывные решения этой системы [3] с условиями на разрыве (1.6). Необходимое условие эволюционности скачка [12] для системы (2.8) состоит в том, что число приходящих на скачок характеристик равно трем. Эти условия — система трех неравенств, следствия из них были рассмотрены Уитемом [3].

Отметим, что в адиабатическом приближении условия на скачке оставляют свободными три параметра.

В линейном случае $V = u^2 / 2$ уравнение (2.1) совпадает с телеграфным, а дисперсионное соотношение (2.7) не зависит от амплитуды, $\Phi(a) = 1$. Характеристические направления в этом случае совпадают и равны групповой скорости $d\omega / dk$, поэтому число приходящих на скачок характеристик не более двух, и скачок неэволюционен. Этот результат очевиден вследствие принципа суперпозиции решений.

Для выяснения структуры и условий эволюционности скачка рассмотрим полную дисперсионную систему (2.3) — (2.5). Будем искать ее решения в виде функции переменной $\xi = x - vt$. Из (2.3), (2.5), (2.6) получим систему обыкновенных уравнений, первые интегралы которой имеют вид

$$
\begin{gathered}
-2v\varphi_3 + v(1-v^2)\left(\frac{da}{d\xi}\right)^2 \varphi_1 - \omega k(1-v^2)\varphi_2 = v(1-v^2)c_3 \\
\omega - vk = c_2, \qquad -v\omega\varphi_2 + k\varphi_2 = c_1
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Исключая k и ω и вводя полную энергию $E = a^2 / 2$, получим уравнение для $E = E(\xi)$, решаемое в квадратурах

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{dE}{d\xi}\right)^2 = \frac{2E}{\varphi_1\varphi_2(1-v^2)^2}\Big\{-\varphi_2^2c_2^2 + 2(1-v^2)\varphi_2\varphi_3 + \\
+ \varphi_2\left[c_3(1-v^2)^2 - c_1c_2\left(v + \frac{1}{v}\right)\right] - c_1^2\Big\} \equiv F(E)
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Для линейного уравнения ($V' = u$) функции φ_i легко вычисляются ($U^{(0)} = a\cos\vartheta$)

$$
\varphi_1 = {}^1/_2, \quad \varphi_2 = E, \quad \varphi_3 = {}^1/_2E
$$

Тогда в (2.10) $F(E)$ — квадратный трехчлен

$$
F(E) = \frac{4}{(1-v^2)^2}\left\{E^2[-c_2^2 + (1-v^2)] + E\left[c_3(1-v^2)^2 - c_1c_2\left(v+\frac{1}{v}\right)\right] - c_1^2\right\}
$$

Рассмотрим $F(E)$ для этого случая на плоскости F, E (фигура, кривая *1*). Ограниченное решение возможно в случае, если выполнены два условия

$$
\begin{gathered}
c_2^2 > (1-v^2) \\
\left[c_3(1-v^2) - \frac{c_1c_2}{v}(1-v^2)\right]^2 > -4c_1^2(1-v^2) - 4c_1c_2c_3(v^2-2)
\end{gathered}
$$

Оно описывает синусоидальные модуляции амплитуды, а также ω и k. Этот результат соответствует выводу о невозможности скачков в линейном уравнении, сделанном для дисперсионной системы в адиабатическом приближении.

Рассмотрим теперь нелинейный случай и изобразим возможные виды функции $F(E)$, определяемой (2.10), приводящие к ограниченным решениям уравнения (2.10).

1) Уравнение

$$
F(E) = 0 \tag{2.11}
$$

допускает два простых корня $E_1 < E_2$ таких, что $F(E) > 0$ для $E_1 < E < E_2$. Этот случай аналогичен рассмотренному выше для линейного уравнения и представляет модуляции a, ω, k.

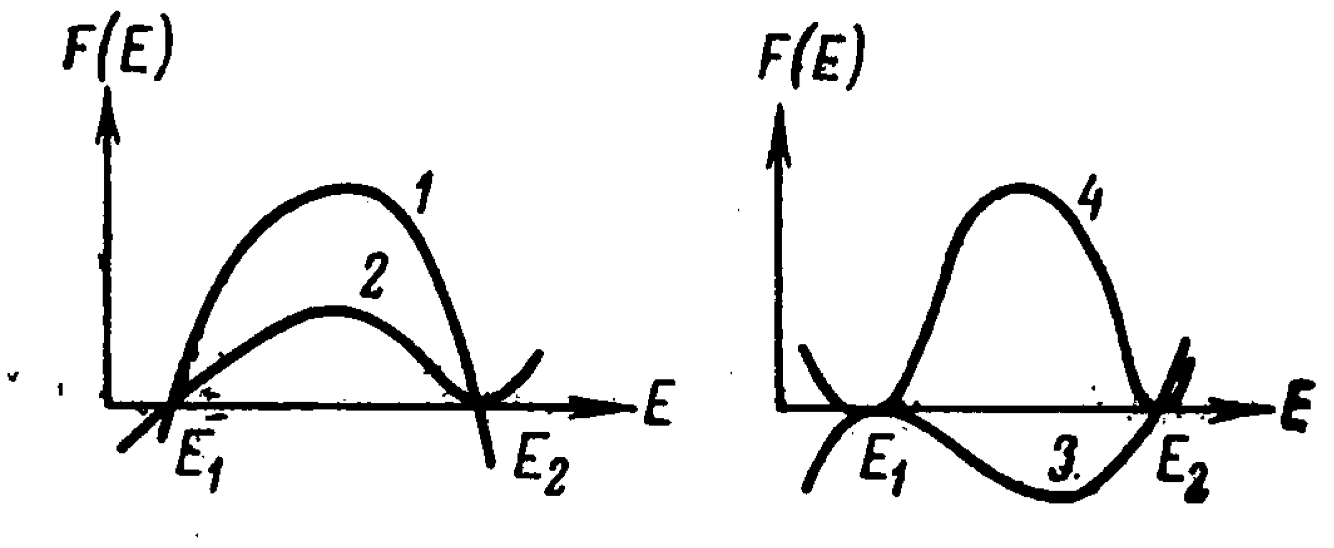
2) В уравнении (2.11) E_1 — простой корень, а E_2 — кратности два (фигура, кривая *2*). Тогда решение $E = E(\xi)$ имеет вид уединенной волны (солитона) [1]; амплитуда волны равна $E_2 - E_1$, значение на бес-

конечности E_2 (солитон разрежения). В этом случае, кроме условий (2.9), имеем также дополнительное

$$F'(E_2) = 0$$

поэтому свободными остаются три параметра из семи (E_i, ω_i, k_i, v, $i = 1, 2$).

Решение типа солитона реализуется и в случае, если E_1 — простой корень, а E_2 — кратности n ($n \leqslant 5$). Тогда дополнительными условиями будут $F'(E_2) = \ldots = F^{(n)}(E_2) = 0$, и характер стремления E к E_2 при $\xi \to \pm\infty$ является алгебраическим. Поскольку накладываетя n дополнительных ограничений, число свободных параметров равно $5 - n$.



3) Пусть в уравнении (2.11) E_1— двойной корень, а E_2 — простой (фигура, кривая 3), тогда возможно решение типа гидравлического удара, т. е. скачок между E_1 и E_2. Однако интегральная кривая $E = E_2$ особая, поэтому устойчивым будет гидравлический удар, если $E = E_2$ — также двойной корень. В этом случае свободными являются два параметра (см. ниже).

4) Если E_1 и E_2 — двойные корни (фигура, кривая 4) и $F(E) > 0$ для $E_1 < E < E_2$, т. е. выполнены условия

$$F(E_i) = 0, \qquad F'(E_i) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

то реализуется решение в виде плавно меняющейся амплитуды между E_1 и E_2, причем при $\xi \to \pm\infty$ производные от E, k, ω стремятся к нулю. Первые интегралы (2.9) образуют три условия на скачках, а из уравнения (2.4) дисперсионной системы находим еще два

$$\omega_i^2 - k_i^2 = \frac{\varphi_3'(E_i)}{\varphi_2'(E_i)} \qquad (i = 1, 2) \tag{2.12}$$

Можно показать, что требование $F'(E_i) = 0$ эквивалентно (2.12). Таким образом, имеем пять условий на семь параметров, следовательно, свободными являются два параметра.

Отметим, что необходимые условия существования скачка в адиабатическом приближении не будут достаточными, если рассмотреть решения типа скачков в полной дисперсионной системе.

3. Неконсервативные системы. Рассмотрим линейное уравнение Клейна — Гордона с правой частью, отличной от нуля, положив

$$L = -\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + \frac{u^2}{2}, \qquad \delta W^* = \varepsilon \int\limits_{V_0} Q(u, u_t, u_x, \varepsilon)\, \delta u\, dx\, dt$$

Дисперсионная система в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\omega a^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k a^2}{2}\right) - \varepsilon Q_{(\theta)} = 0 \\ a_{tt} - a_{xx} + (k^2 - \omega^2 + 1)\, a + 2\varepsilon Q_{(a)} = 0 \\ \omega_x + k_t = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $Q_{(\theta)}$ и $Q_{(a)}$ определяются в соответствии с выражениями (1.5).

Запишем эквивалентную систему в виде законов сохранения аналогично (2.4)

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x}=\varepsilon Q_{(a)}a_t+\varepsilon Q_{(\theta)}\omega,\qquad \frac{\partial T_{21}}{\partial t}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x}=\varepsilon Q_{(a)}a_x+\varepsilon Q_{(\theta)}k \quad (3.2)$$

где T_{ij} даются формулами (2.6), а $\bar{L}$ имеет вид

$$\bar{L}=\frac{-a_t^2+a_x^2}{4}+\frac{-\omega^2+k^2}{4}a^2+\frac{a^2}{4}$$

Сначала ограничимся членами не выше первого порядка по ε, тогда из (3.1) следует дисперсионное соотношение, эквивалентное (2.5)

$$\omega^2=1+k^2+\varepsilon\frac{2}{a}Q_{(a)}^0(a,k) \quad (3.3)$$

В этом же приближении первое уравнение (3.1) представим в виде

$$E_t+c(k)E_x+Ec'(k)k_x-\frac{\varepsilon}{\omega}Q_{(\theta)}^0=0,\qquad c(k)=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \quad (3.4)$$

Рассмотрим частное решение системы (3.2) — (3.4), соответствующее режиму автоколебаний для стационарной монохроматической волны

$$\omega=\omega_0=\mathrm{const},\qquad k=k_0=\mathrm{const},\qquad E=E_0=\mathrm{const},$$

причем необходимо выполнение условия $Q_{(\theta)}^0=0$, т. е. существует частотно-амплитудная зависимость для режима автоколебаний. Поставим вопрос об устойчивости такого решения. Система в вариациях с точностью до членов порядка ε включительно имеет вид

$$\frac{\partial(\delta E)}{\partial t}+c(k_0)\frac{\partial(\delta E)}{\partial x}+E_0c'(k_0)\frac{\partial(\delta k)}{\partial x}-\varepsilon\left[\frac{\partial q}{\partial E}\delta E+\frac{\partial q}{\partial k}\delta k\right]=0$$

$$\frac{\partial(\delta k)}{\partial t}+c(k_0)\frac{\partial(\delta k)}{\partial x}=0,\qquad q\equiv\frac{1}{\omega(k_0)}Q_{(\theta)}^0(k_0,E_0)$$

Тогда решение второго уравнения

$$\delta k=\psi(x-c(k_0)\,t)$$

где ψ — произвольная функция. Если искать решение δE в виде функции от $x-c(k_0)t$, то оно имеет вид

$$\delta E=D\exp\varepsilon\frac{\partial q}{\partial E}\xi-\int_{\xi_0}^{\xi}\left[c'E_0\frac{\partial\psi(\eta)}{\partial\eta}-\varepsilon\frac{\partial q}{\partial k}\psi(\eta)\right]\exp\left[\varepsilon\frac{\partial q}{\partial E}(\xi-\eta)\right]d\eta$$

т. е. устойчивость автоколебательного режима определяется знаком $\partial q\,/\,\partial E$.

Для режимов устойчивых автоколебаний рассмотрим разрывные решения, понимая скачок в указанном выше смысле. Для выяснения вопроса об устойчивости скачка следует рассмотреть следующее после адиабатического приближение, для чего достаточно дисперсионную систему взять в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a^2\omega}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^2k}{2}\right)+\varepsilon Q_{(\vartheta)}=0$$

$$\omega^2-k^2=1-\varepsilon\frac{2}{a}Q_{(a)}(a,\omega,k),\qquad \omega_x+k_t=0 \tag{3.5}$$

$$Q_{(a)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\vartheta,\omega a\sin\vartheta,-ka\sin\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta$$

$$Q_{(\vartheta)}=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\vartheta+\varepsilon U^{(1)},\omega a\sin\vartheta+a_t\cos\vartheta-\varepsilon\omega U_\vartheta^{(1)},$$

$$-ka\sin\vartheta+a_x\cos\vartheta+\varepsilon kU_\vartheta^{(1)})\sin\vartheta d\vartheta$$

где в $Q_{(a)}$ учтены члены порядка ε^0, а в $Q_{(\vartheta)}$ — порядка ε^0 и ε^1 и в пределах выбранной точности можно считать $Q_{(a)}=Q_{(a)}(a,k)$. При вычислении $U^{(1)}$ можно выразить в терминах a, ω, k, не прибегая к функциям, участвующим в асимптотических представлениях (1.3). Поэтому во втором приближении в общем случае имеем

$$Q_{(\vartheta)}=Q_{(\vartheta)}(\varepsilon,a,a_t,a_x,\omega,k)$$

и в рамках рассматриваемой точности $Q_{(\vartheta)}$ можно представить в виде

$$Q_{(\vartheta)}=Q_{(\vartheta)}^{(0)}(a,\omega,k)+a_tQ_{(\vartheta)}^{(1)}(a,\omega,k)+a_xQ_{(\vartheta)}^{(2)}(a,\omega,k)$$

Очевидно, что необходимым условием существования разрывных решений служит следующее равенство:

$$Q_{(\vartheta)}^{(0)}=0 \tag{3.6}$$

которое должно выполняться для допустимых значений a, ω, k до и после скачка.

Решая совместно (3.5) и (3.6), получим выражение для $Q_{(a)}$, зависящее только от a. В результате дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2=k^2+\Phi(a),\qquad \Phi(a)=1-2a^{-1}\varepsilon Q_{(a)}(a) \tag{3.7}$$

Это уравнение — частный случай дисперсионного соотношения для нелинейного уравнения Клейна — Гордона.

Если выписать дисперсионную систему в форме законов сохранения (3.2), то с учетом (3.6) и (3.7) правые части ее уравнений будут иметь вид

$$\varepsilon Q_{(a)}a_t-\varepsilon Q_{(\vartheta)}\omega=\varepsilon F'(a)a_t-\varepsilon\omega(a)\times$$
$$\times[a_tQ_{(\vartheta)}^{(1)}(a,\omega(a),k(a))+a_xQ_{(\vartheta)}^{(2)}(a,\omega(a),k(a))]$$

$$\varepsilon Q_{(a)}a_x+\varepsilon Q_{(\vartheta)}k=\varepsilon F'(a)a_x+\varepsilon k(a)\times$$
$$\times[a_tQ_{(\vartheta)}^{(1)}(a,\omega(a),k(a))+a_xQ_{(\vartheta)}^{(2)}(a,\omega(a),k(a))]$$

где $F(a)$ — первообразная для $Q_{(a)}(a)$. Вводя первообразные для остальных слагаемых $\Phi^{ij}(a)$, представим дисперсионную систему в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\omega^2+k^2)\,a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\varepsilon F(a)-\varepsilon\Phi^{11}(a)\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\omega k a^2}{2}-\varepsilon\Phi^{12}(a)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\omega k a^2}{2}-\varepsilon\Phi^{22}(a)\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(\omega^2+k^2)\,a^2}{4}-\frac{a^2}{4}-\varepsilon F(a)-\varepsilon\Phi^{21}(a)\right\}=0$$

Отсюда следуют очевидные условия на скачке, которые можно рассматривать как обобщение условий (1.6). Отметим, что в этом случае в отличие от консервативных систем свободным остается один параметр (за счет необходимости удовлетворить двум дополнительным условиям (3.6) для значений до и после скачка).

В связи с выводом п. 2 представляется важным рассмотреть следующее (третье) приближение, позволяющее раскрыть структуру скачка.

Будем искать решения системы (3.1) в функции переменной $\xi = x - vt$, где v — скорость скачка — постоянная величина, имея в виду, что в $Q_{(a)}$ следует учесть члены порядка ε, а в $Q_{(\vartheta)}$ — порядка ε^2 включительно

$$Q_{(a)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\vartheta+\varepsilon U^{(1)},\omega a\sin\vartheta+a_t\cos\vartheta-\varepsilon\omega U_\vartheta^{(1)},-ka\sin\vartheta+$$

$$+a_x\cos\vartheta+\varepsilon k U_\vartheta^{(1)})\cos\vartheta d\vartheta$$

$$Q_{(\vartheta)}=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\vartheta+\varepsilon U^{(1)}+\varepsilon^2U^{(2)},\omega a\sin\vartheta+\ldots-\varepsilon^2\omega U_\vartheta^{(2)},-$$

$$-ka\sin\vartheta+\ldots+\varepsilon^2 k U_\vartheta^{(2)})\sin\vartheta d\vartheta$$

Отметим, что для линейного случая функции $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ можно выразить в терминах a, ω, k, так что

$$Q_{(\vartheta)}=Q_{(\vartheta)}(\varepsilon,a,\omega,k,a_t,a_x,\omega_t,\omega_x,k_t,k_x)$$
$$Q_{(a)}=Q_{(a)}(\varepsilon,a,\omega,k,a_t,a_x)$$

При решении должны быть выполнены следующие условия:

1) при $\xi\to+\infty$ до скачка a, k, ω стремятся к постоянным a_1, k_1, ω_1;

2) при $\xi\to-\infty$ после скачка a, k, ω стремятся к постоянным a_2, k_2, ω_2;

3) при $\xi\to\pm\infty$ производные любого порядка по ξ стремятся к нулю.

Если такие решения существуют, они имеют характер скачка. Тогда из первых двух уравнений (3.1) следуют четыре условия ($i=1, 2$)

$$Q_{(\vartheta)}(a_i,k_i,\omega_i,0,\ldots,0)=0 \tag{3.8}$$
$$a_i(k_i^2-\omega_i^2+1)+2\varepsilon Q_{(a)}(a_i,k_i,\omega_i,0,0)=0$$

Наконец, из последнего уравнения (3.1) следует первый интеграл

$$\omega - vk = c_2 \tag{3.9}$$

Из (3.1) и (3.2) получим дисперсионную систему относительно E и k

$$\frac{d}{d\xi}(kE)-v\frac{d}{d\xi}[E(vk+c_2)]-\varepsilon Q_{(\vartheta)}\left(a,k,vk+c_2,-v\frac{dE}{d\xi},\frac{dE}{d\xi},\ldots\right)=0$$

$$-v\frac{dE}{d\xi}+(1-v^2)\frac{d}{d\xi}[(vk+c_2)kE]+\frac{d}{d\xi}\left[v(v^2-1)\frac{1}{4E}\left(\frac{dE}{d\xi}\right)^2\right]+ \tag{3.10}$$

$$+2\varepsilon v\frac{Q_{(a)}}{\sqrt{2E}}\frac{dE}{d\xi}+\varepsilon(c_2+2vk)Q_{(\vartheta)}=0$$

Введя замену $dE / d\xi = p$, приведем эту систему к нормальному виду

$$dk/d\xi = k' = f_1(k, E, p), \qquad p' = f_2(k, E, p), \qquad E' = p$$

Последняя система автономная; решая первые два уравнения в функции E, можно найти решение при следующих начальных данных:

$$k = k_1 \qquad p = p_1 = 0 \qquad \text{при } E = E_1$$

Таким образом, получим уравнение для $dE / d\xi$

$$\frac{dE}{d\xi} = p(E, E_1, k_1, \varepsilon)$$

которая является функцией начальных значений. Константы E_1 и k_1 можно переопределить, пользуясь первыми интегралами системы уравнений (3.8) и (3.9)

$$(1 - v^2) kE - vc_2E - \varepsilon \int_{E_1}^{E} Q_{(\theta)}(\varepsilon, E, vk + c_2, k, -vp, p, \ldots, f_1) \frac{dE}{p} = c_1.$$

$$vE + (v^2 - 1)(c_2 + vk) Ek + \frac{v(v^2 - 1)}{4E} E'^2 + 2\varepsilon v \int_{E_1}^{E} Q_{(E)} dE +$$

$$+ \varepsilon c_2 \int_{E_1}^{E} \frac{Q_{(\theta)} dE}{p} + 2v\varepsilon \int_{E_1}^{E} \frac{Q_{(\theta)} k}{p} dE = c_3, \qquad Q_{(E)} \equiv \frac{Q_{(a)}}{\sqrt{2E}}$$

Положим

$$c_1 = (1 - v^2) k_1E_1 - vc_2E_1, \qquad c_3 = vE_1 + (v^2 - 1)(c_2 + vk_1) E_1k_1$$

что позволит выразить k_1 и E_1 через c_1, c_2, c_3. Кроме того, требование $p_1 = dE / d\xi|_{\xi=+\infty} = 0$ выполняется в данном случае автоматически.

Положим

$$I(E) = \int_{E_1}^{E} Q_{(\theta)} \frac{dE}{p}$$

найдем из (3.9) k и подставим в (3.10). После преобразований получим

$$\frac{v(v^2 - 1)}{4} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)^2 \equiv \frac{v(v^2 - 1)}{4} F(E) = c_3E - vE^2 + \frac{(c_1 + c_2vE)(vc_1 + c_2E)}{1 - v^2} -$$

$$- 2\varepsilon Ev \int_{E_1}^{E} Q_{(E)} dE + \frac{2vEc_1\varepsilon}{v^2 - 1} \int_{E_1}^{E} \frac{I}{E^2} dE - \frac{vE\varepsilon^2}{1 - v^2} \int_{E_1}^{E} \frac{I^2}{E^2} dE$$

Для того, чтобы исходная дисперсионная система имела решения типа скачка, необходимо выполнение условий

$$F(E_i) = 0, \qquad F'(E_i) = 0 \qquad (i = 1,2)$$

Выше было показано, что $F(E_1) = 0$. Если выполнены следующие из (3.9) и (3.10) равенства

$$(1 - v^2)k_2E_2 - vc_2E_2 - \varepsilon I(E_2) = c_1$$

$$vE_2 + (v^2 - 1)(c_2 + vk_2) E_2k_2 + 2\varepsilon v \int_{E_1}^{E_2} Q_{(E)} dE + \varepsilon C_2 I(E_2) + 2v\varepsilon \int_{E_1}^{E_2} \frac{Q_{(\theta)} k dE}{p} = c_3$$

то последнее эквивалентно $F(E_2) = 0$. Можно показать, что

$$\frac{v(v^2-1)}{4}(F - \varepsilon F') = E^2 v \{1 + k^2 - \omega^2 + 2\varepsilon Q_{(E)}\}$$

Если положить $E = E_i$, то вследствие (3.6) и того, что $F(E_i) = 0$, получим, что в данном случае $F'(E_i) = 0$.

Таким образом, на семь параметров V, ω_i, k_i, a_i наложено семь условий

$$Q_{(\theta)}(k_i, \omega_i, E_i, 0, \ldots, 0) = 0$$

$$k_i^2 - \omega_i^2 + 1 + 2\varepsilon Q_{(E)}(k_i, \omega_i, E_i, 0, 0) = 0$$

$$[\omega] = v[k], \qquad [kE] - v[\omega E] = \varepsilon \int_{E_1}^{E} Q_{(\theta)} \frac{dE}{E'}$$

$$v[E] + (v^2 - 1)[\omega k E] = -2\varepsilon v \int_{E_1}^{E_2} Q_{(E)} dE - \varepsilon \int_{E_1}^{E_2} \omega Q_{(\theta)} \frac{dE}{E'}$$

Если эта система допускает решения, то скачок может быть реализован с этими значениями. Следовательно, дисперсионная система допускает дискретное множество скачков.

Подчеркнем, что и в случае, если исходная система неконсервативна, допускаются решения типа скачков, но с меньшим произволом в задании параметров скачка.

Поступила 14 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Тр. Новосиб. ун-та, 1968.
2. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
3. Whitham G. B. Non-linear dispersive waves. Proc. Roy. Soc. A, 1965, vol. 283, No 1393, p. 238—261.
4. Whitham G. B. A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No 2, p. 273—283.
5. Веницианов Е. В. Асимптотический характер усредненного вариационного принципа в теории нелинейных волн с дисперсией и малой диссипацией. Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 3.
6. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., «Наука», 1964.
7. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
8. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
9. Whitham G. B. Variational methods and applications to water waves. Proc. Roy. Soc. A, 1967, vol. 299, No. 1456, p. 6—25.
10. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
11. Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. Königl. Gessell. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Klasse, 1918, S. 235—257.
12. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2.