Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 531.31

# О НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. П. Маркеев**

(Москва)

Строится алгоритм отыскания вещественного канонического преобразования линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений к нормальной форме. В качестве примера рассматривается применение этого преобразования в ограниченной задаче трех тел.

1. Рассмотрим гамильтонову систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx / dt = \mathbf{IH}(t)\,\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \tag{1.1}$$

Переменные $x_k$ и $x_{n+k}$ — канонически сопряженные ($x_k$ — координаты, $x_{n+k}$ — импульсы) в соответствующей механической задаче. Симметрическая матрица $\mathbf{H}(t)$ порядка $2n$ предполагается вещественной, непрерывной, $2\pi$-периодической по $t$. Матрица $\mathbf{I}$ имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}' = -\mathbf{I}, \ \mathbf{I}^2 = -\mathbf{E}, \ \det \mathbf{I} = 1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка $n$.

При исследовании устойчивости, анализе нелинейных колебаний, построении приближенных решений нелинейных гамильтоновых систем в качестве порождающего решения берется обычно решение линейной системы. Поэтому желательно выбирать такие координаты, в которых решение линейной системы (1.1) записывалось бы наиболее просто.

Система (1.1), как и всякая линейная система с непрерывными периодическими коэффициентами, приводима [1]. Это означает, что существует линейная замена переменных с непрерывно дифференцируемой матрицей, имеющей ограниченную обратную для всех $t$ и такая, что система (1.1) преобразуется в систему с постоянными коэффициентами. Эта замена переменных определяется системой (1.1) неоднозначно.

Пусть характеристические показатели $\pm\, i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1.1) чисто мнимые, а все мультипликаторы $\rho_k = \exp\,(i 2\pi \lambda_k)$, $\rho_{n+k} = \bar{\rho}_k$ различны. Тогда наиболее удобными будут такие координаты, в которых функция Гамильтона преобразованной системы будет записываться в виде суммы гамильтонианов не связанных между собой осцилляторов

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(y_k^2 + y_{n+k}^2\right) \tag{1.2}$$

Будем говорить, что соответствующая система дифференциальных уравнений имеет нормальную форму.

Задача нормализации линейной гамильтоновой системы с постоянными коэффициентами исследована достаточно подробно [2–11]. В работах [9,10] получены методы нормализации, удобные для практического их использования. Нормализация канонических систем с периодическими коэффициентами изучалась в работах [2,12,13]. Установлено [2,12] существование $2\pi$-периодического по $t$ канонического преобразования, нормализующего систему (1.1). Показано [12], что такое преобразование может быть получено вещественным. Для $n = 1$ показано [13], как практически получить преобразование, нормализующее систему (1.1).

Ниже дается конструктивный метод построения линейного $2\pi$-периодического по $t$, канонического, вещественного преобразования системы (1.1) к нормальной форме для произвольного $n$. Результаты представлены так, что их удобно применять при решении конкретных механических задач.

2. Пусть $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица — решение системы (1.1), удовлетворяющая условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$. Нормализующее преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y}$ представим как последовательность двух замен переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{A}e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{z} \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{y} \qquad (2.2)$$

Здесь

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} i\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i\lambda_n & & & \\ & & & -i\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i\lambda_n \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} i\mathbf{E} & \mathbf{E} \\ -i\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{matrix} \right\|$$

Преобразование (2.1) приводит систему (1.1) к диагональному виду $d\mathbf{z} / dt = \mathbf{B}\mathbf{Z}$. После применения преобразования (2.2) последняя система уравнений приобретает нормальную форму с функцией Гамильтона (1.2). Матрицу $\mathbf{A}$ в формуле (2.1) подберем так, чтобы преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y}$ было вещественным, унивалентным, каноническим, $2\pi$-периодическим по $t$.

Можно проверить, что преобразование (2.2) каноническое с валентностью $2i$. Кроме того, матрицы $\mathbf{X}(t)$ и $e^{-\mathbf{B}t}$ симплектические, так как они являются решениями гамильтоновых систем с начальными условиями, равными единичной матрице. Действительно, проверим, например, условие симплектичности матрицы $\mathbf{X}(t)$

$$\mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{I} \qquad (2.3)$$

Вычислим производную левой части равенства (2.3). Получим

$$\frac{d(\mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{X}'}{dt}\mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{X}'\mathbf{I}\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{X}'\mathbf{H}'\mathbf{I}'\mathbf{I}\mathbf{X} + \mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{I}\mathbf{H}\mathbf{X} \equiv 0$$

Следовательно, матрица $\mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X}$ постоянна, а так как при $t = 0$ она равна $\mathbf{I}$, то равенство (2.3) имеет место при всех $t$. Таким образом, чтобы преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y}$ было каноническим и унивалентным, необходимо и достаточно [14], чтобы матрица $\mathbf{A}$ была обобщенно-симплектической с валентностью $1 / 2i$, т. е. должно выполняться равенство

$$\mathbf{A}'\mathbf{I}\mathbf{A} = \frac{1}{2i}\mathbf{I} \tag{2.4}$$

Далее, из условия $2\pi$-периодичности нормализующего преобразования

$$\mathbf{X}(2\pi)\,\mathbf{A}e^{-2\pi\mathbf{B}}\mathbf{C} = \mathbf{X}(0)\,\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{C}$$

получаем матричное уравнение для определения $\mathbf{A}$

$$\mathbf{X}(2\pi)\,\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{2\pi\mathbf{B}}, \qquad e^{2\pi\mathbf{B}} = \begin{Vmatrix} \rho_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \rho_n & & & \\ & & & \bar{\rho}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bar{\rho}_n \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Матрица $e^{2\pi\mathbf{B}}$ является диагональной формой матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$. Матрица $\mathbf{A}$, приводящая, как это видно из уравнения (2.5), матрицу $\mathbf{X}(2\pi)$ к диагональной форме, строится следующим образом [15]. Ее столбцами должны быть собственные векторы матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$. Именно, j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$ есть собственный вектор $\mathbf{e}_j$ матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, соответствующий собственному числу (мультипликатору) $\rho_j$. Но так как собственные векторы определены с точностью до скалярного множителя, то матрица — решение уравнения (2.5) может быть записана в виде $\mathbf{A} = \mathbf{F}\mathbf{D}$, где $\mathbf{F}$ — какое-либо решение уравнения (2.5), а $\mathbf{D}$ — диагональная матрица порядка $2n$, элементы которой подберем так, чтобы удовлетворить условию (2.4).

Кроме того, будем считать, что элементы матрицы $\mathbf{D}$ — вещественные числа и $d_{n+k,\,n+k} = d_{k,k}$, а собственные векторы $e_{n+k}$ и $e_k$ — комплексно сопряженные. Это обеспечивает вещественность нормализующего преобразования.

3. Покажем, как найти матрицу $\mathbf{D}$. Подставляя $\mathbf{A} = \mathbf{F}\mathbf{D}$ в равенство (2.4) и учитывая, что $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, получаем

$$\mathbf{D}\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{F}\mathbf{D} = \frac{1}{2i}\mathbf{I} \tag{3.1}$$

Обозначим матрицу $\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{F}$ через $\mathbf{L}$. Элемент $l_{k,m}$ этой матрицы равен скалярному произведению векторов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{I}\mathbf{e}_m$

$$l_{k,m} = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_m)$$

Но можно проверить, что для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{I}\mathbf{v}) = -(\mathbf{I}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

Следовательно, матрица $\mathbf{L}$ кососимметрическая.

Исследуем дальше свойства матрицы $\mathbf{L}$. Докажем следующее утверждение.

*Лемма.* Если произведение собственных чисел $\rho_k$ и $\rho_m$ симплектической матрицы X не равно единице,то соответствующие собственные векторы $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_m$ удовлетворяют равенству $(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_m) = 0$.

*Доказательство.* По определению симметрической матрицы для любых векторов u и v имеет место равенство

$$(\mathbf{IXu}\cdot\mathbf{Xv}) = (\mathbf{X'IXu}\cdot\mathbf{v})$$

Используя симплектичность матрицы X, получаем $(\mathbf{IXu}\cdot\mathbf{Xv}) = (\mathbf{Iu}\cdot\mathbf{v})$. Полагая в последнем равенстве $\mathbf{u} = \mathbf{e}_m$, а $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$ получаем

$$(\mathbf{IXe}_m\cdot\mathbf{Xe}_k) = (\mathbf{Ie}_m\cdot\mathbf{e}_k) \tag{3.2}$$

Но $\mathbf{Xe}_j = \rho_j\mathbf{e}_j$, поэтому равенство (3.2) можно переписать так:

$$(\rho_k\rho_m - 1)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{Ie}_m) = 0$$

Из последнего равенства следует утверждение леммы.

Проведенные рассмотрения показывают, что матрица L имеет вид

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & 0 \end{Vmatrix}$$

где M — диагональная матрица порядка $n$ с элементами $m_{kk} = (\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{Ie}_{n+k})$. Ни один из элементов $m_{kk}$ не может равняться нулю, так как в противном случае определитель матрицы L равнялся бы нулю. Но

$$\det\mathbf{L} = \det\mathbf{F}'\det\mathbf{I}\det\mathbf{F} = (\det\mathbf{F})^2 \neq 0$$

так как матрица F составлена из собственных векторов, соответствующих различным собственным числам матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$.

Пусть $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{s}_k$ — действительная и мнимая части собственного вектора матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, соответствующего собственному числу $\rho_k$. Тогда, учитывая комплексную сопряженность векторов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_{n+k}$, после простых преобразований можно получить для элементов матрицы M выражение

$$m_{kk} = -2i(\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{Is}_k) \tag{3.3}$$

Из (2.4) и (3.3) получаем уравнение для нахождения $d_{kk}$

$$4d_{kk}^2(\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{Is}_k) = 1 \tag{3.4}$$

Последнее уравнение имеет действительное решение, если величина $(\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{Is}_k)$ положительна, чего всегда можно добиться соответствующим выбором знака $\lambda_k$ в функции Гамильтона (1.2). В самом деле, приравнивая в уравнении $\mathbf{Xe}_k = \rho_k\mathbf{e}_k$ действительную и мнимую части, получим систему уравнений относительно $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{s}_k$

$$\begin{gathered}(\mathbf{X} - \cos 2\pi\lambda_k\mathbf{E})\mathbf{r}_k + \sin 2\pi\lambda_k\mathbf{s}_k = 0 \\ -\sin 2\pi\lambda_k\mathbf{r}_k + (\mathbf{X} - \cos 2\pi\lambda_k\mathbf{E})\mathbf{s}_k = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Система уравнений (3.5) не изменяется при одновременном изменении знака $\lambda_k$ и знака компонент вектора $\mathbf{r}_k$. Знак же скалярного произведения $(\mathbf{r}_k\cdot\mathbf{Is}_k)$ изменяется при этом на противоположный.

Таким образом, матрица $\mathbf{D}$ найдена. Матрица нормализующего преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{y}$ имеет вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{F}\mathbf{D}e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{C}$$

После некоторых преобразований ее можно представить в виде произведения трех вещественных матриц

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{Q}(t) \tag{3.6}$$

В формуле (3.6) через $\mathbf{P}$ обозначена постоянная матрица, у которой $k$-й столбец есть вектор $-2d_{kk}\mathbf{s}_k$, а $(n+k)$-й столбец — вектор $2d_{kk}\mathbf{r}_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Матрица $\mathbf{Q}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Vmatrix} \cos \Lambda t & -\sin \Lambda t \\ \sin \Lambda t & \cos \Lambda t \end{Vmatrix}$$

$$\sin \Lambda t = \begin{Vmatrix} \sin\lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \sin\lambda_n t \end{Vmatrix}, \qquad \cos \Lambda t = \begin{Vmatrix} \cos\lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos\lambda_n t \end{Vmatrix}$$

4. В качестве примера найдем преобразование, нормализующее систему линейных уравнений, описывающих движение в окрестности треугольной точки либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. В координатах Нехвила с истинной аномалией $\nu$ в качестве независимой переменной и при соответствующем выборе единицы длины движение описывается при помощи функции Гамильтона [16]

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1 + \frac{1 + 4e\cos\nu}{8(1 + e\cos\nu)}q_1^2 -$$
$$- \frac{5 - 4e\cos\nu}{8(1 + e\cos\nu)}q_2^2 - \frac{3\sqrt{3}(1 - 2\mu)}{4(1 + e\cos\nu)}q_1q_2$$

Параметры $e$ и $\mu$ возьмем для случая системы Солнце — Юпитер $e = 0.04825382$, $\mu = 0.00095388$.

Расчеты на ЭВМ показывают, что матрица решений $\mathbf{X}(\nu)$ соответствующей системы дифференциальных уравнений при $\nu = 2\pi$ будет такой:

$$\mathbf{X}(2\pi) = \begin{Vmatrix} 10.246067 & 15.765014 & -16.830551 & 9.400540 \\ -5.435207 & -8.372406 & 9.934193 & -5.646301 \\ 5.056440 & 8.591016 & -8.181647 & 5.105433 \\ 8.833277 & 15.135589 & -16.094789 & 10.055308 \end{Vmatrix}$$

Величины $\lambda_1$, $\lambda_2$ вычисляются по формулам [13]

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 + \Delta}{4}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{a_1 - \Delta}{4}$$
$$\Delta = (a_1^2 - 4a_2 + 8)^{1/2}$$

где $a_1$ — след матрицы $X(2\pi)$, $a_2$ — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

Получаем числовые значения $\lambda_1 = 0.996758$, $\lambda_2 = -0.080802$. Теперь надо найти какое-либо решение системы уравнений (3.5). Положим для определенности четвертые компоненты вектора $e_k$ вещественными и равными единице. Тогда действительные и мнимые части собственных векторов получаются такими:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Vmatrix} 1.256976 \\ -1.371205 \\ -0.036985 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{s}_1 = \begin{Vmatrix} 1.389429 \\ 0.273188 \\ 1.020730 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$
\mathbf{r}_2 = \left\| \begin{array}{r} 1.052220 \\ -0.607786 \\ 0.576385 \\ 1 \end{array} \right\|, \qquad \mathbf{s}_2 = \left\| \begin{array}{r} -0.042113 \\ -0.040441 \\ -0.030937 \\ 0 \end{array} \right\|
$$

Для скалярных произведений $(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{I}\mathbf{s}_k)$ получаем $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}\mathbf{s}_1) = 1.061233$, $(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{I}\mathbf{s}_2) = -0.032162$. Далее, из уравнений (3.4) находим элементы матрицы $\mathbf{D}$

$$
d_{11} = 0.485361, \qquad d_{22} = 2.788069
$$

Теперь можно выписать нормализующую матрицу (3.6), в которой

$$
\mathbf{P} = \left\| \begin{array}{rrrr} -1.348748 & 0.234825 & 1.220173 & 5.867325 \\ -0.265189 & 0.225503 & -1.331058 & -3.389100 \\ -0.990844 & 0.172509 & -0.035902 & 3.214000 \\ 0 & 0 & 0.970721 & 5.576138 \end{array} \right\|
$$

Нормализованная система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$
d\mathbf{y} / dv = \mathbf{I}\mathbf{K}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{K} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_2 \end{array} \right\|
$$

Поступила 31 III 1972

ЛИТЕРАТУРА


1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. Cherry T. M. On the transformation of hamiltonian systems of linear differential equations with constant or periodic coefficients. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1927, vol. 26, pt 3, p. 211.
3. Lanczos Cf. C. Eine neue Transformationtheorie linearer kanonischer gleichungen. Ann. Physik, 1934, 5 Folge, Bd 20, S. 653.
4. Wintner A. On the linear conservative dynamical systems. Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4, 1935, t. 13, p. 105.
5. Williamson J. On algebraic problem concerning the normal form of linear dinamical systems. Amer. J. Math., 1936, vol. 58, No. 1, p. 141.
6. Kampen E. R., Wintner A. On the canonical transformations of hamiltonian systems. Amer. J. Math., 1936, vol. 58, No. 4, p. 851.
7. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937.
8. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
9. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
10. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
11. Louterman G., Roels J. Normalisation des systémes linéaires canoniques et application au probléme restreint des trois corps. Celestial Mechanics, 1970, vol. 3, No 1, p. 129.
12. Moser J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
13. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
14. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
16. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.