Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ОБОЛОЧЕК [1]

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Целью работы является вывод соотношений теории упругих оболочек из вариационного уравнения механики сплошных сред в общем случае физически и геометрически нелинейных моделей. Рассмотрение этого вопроса представляет интерес в связи с тем, что при вариационном подходе все гипотезы приобретают наиболее компактную и ясную формулировку и появляется рациональная основа для сравнения и оценки различных моделей, предложенных в теории оболочек. Кроме того, модели оболочек дают интересный пример моделей сплошных сред, в которых, во-первых, имеются высшие производные, и, во-вторых, как будет видно из дальнейшего, возникают внутренние степени свободы.

Появление внутренних степеней свободы требует установления наряду с обычными уравнениями механики дополнительных уравнений для определения новых параметров, а повышение порядка дифференциальных уравнений — дополнительных краевых условий и условий на разрывах. Эти соотношения получены при помощи методов, развитых для произвольных моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы и с высшими производными в работах [1,2].

Отметим, что распространение теории на неупругие оболочки связано лишь с усложнением функционала δW^* в (1.1) и добавлением новых степеней свободы, обусловленных пластическими деформациями, вязкими деформациями и т. п.

Работа содержит только общую часть теории. Конкретные модели оболочек будут рассмотрены отдельно.

1. Вариационное уравнение в теории упругих тел. Основные соотношения теории упругих тел можно получить из вариационного уравнения [1–3]

$$\delta \iint\limits_{tV} \Lambda \, d\tau \, dt + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{1.1}$$

где задаваемыми величинами служат лагранжиан Λ и функционал δW^*, а δW представляется интегралом по границе четырехмерной области $V \times t$ от линейной комбинации вариаций перемещений и находится из (1.1). Если в качестве лагранжиана взять разность кинетической и внутренней энергий

$$\Lambda = \rho_0 \left(\frac{w^{\cdot 2}}{2} - U \right) \tag{1.2}$$

то для моделей упругих тел δW^* представляет собой сумму работы внешних массовых сил на возможных перемещениях и притока тепла

$$\delta W^* = \iint\limits_{tV} \rho_0 (T \delta S + F_i \delta w^i) \, d\tau \, dt \tag{1.3}$$

[1] Доложено на 8-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Ростов-на-Дону, 1971.

а δW — сумму работы внешних поверхностных сил на возможных перемещениях и работы импульсов в начальный и конечный моменты времени

$$\delta W = \int\limits_{t}\int\limits_{\partial V} p_i \delta w^i \, d\sigma \, dt - \left[\int\limits_{V} I_i \delta w^i \, d\tau\right]_{t_1}^{t_2} \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем V — произвольный сопутствующий объем, ∂V — его граница, ρ_0 — плотность среды в начальном состоянии, w^i, I_i, p^i, F^i — компоненты перемещений, импульсов и внешней поверхностной и массовой силы в декартовой системе отсчета наблюдателя x^i, S — энтропия, T — температура.

Внутренняя энергия U для моделей упругих тел является функцией энтропии S, некоторых заданных параметров среды K_B и компонент тензора деформации ε_{ij}

$$U = U(\varepsilon_{ij}, S, K^B), \qquad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2 (g_{\wedge ij} - g_{(0)ij}) \tag{1.5}$$

$$g_{\wedge ij} = g_{kl} \frac{\partial r^k}{\partial \zeta^i} \frac{\partial r^l}{\partial \zeta^j}, \quad g_{(0)ij} = g_{kl} \frac{\partial r_0^k}{\partial \zeta^i} \frac{\partial r_0^l}{\partial \zeta^j}, \quad w^i(\zeta^j, t) = r^i(\zeta^j, t) - r_0^i(\zeta^j)$$

Здесь ζ^i — лагранжевы координаты частиц, $x^i = r^i(\zeta^j, t)$ — закон движения частиц, $x^i = r_0^i(\zeta^j)$ — начальное положение частиц.

В дальнейшем для простоты будут рассматриваться адиабатические процессы. Энтропия S считается заданной и переходит, таким образом, в число параметров K^B. Поскольку $\delta S = 0$, то функционал δW^* приобретает вид

$$\delta W^* = \iint\limits_{tV} \rho_0 F_i \delta w^i \, d\tau \, dt \tag{1.6}$$

Задание краевых условий сводится к заданию δW, когда в качестве области V в (1.4) берется область, соответствующая всему объему, занятому средой.

2. Начальное состояние оболочки. Предположим, что в начальном состоянии рассматриваемого тела можно так выбрать лагранжеву систему координат $\zeta^0 = \zeta$, ζ^1, ζ^2, что функции $x^i = r_0^i(\zeta, \zeta^\alpha)$ примут вид [1]

$$r_0^i(\zeta, \zeta^\alpha) = x_0^i(\zeta^\alpha) + \zeta n_0^i(\zeta^\alpha) \tag{2.1}$$

где $x_0^i(\zeta^\alpha)$ — функции, задающие срединную поверхность Ω_0, n_0^i — вектор единичной нормали к Ω_0, $-h/2 \leqslant \zeta \leqslant h/2$, $h = h(\zeta^\alpha)$. Малые латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2; малые греческие индексы — значения 1, 2.

Из (2.1) можно получить выражения для ковариантных компонент метрического тензора в начальном состоянии

$$\begin{aligned} g_{(0)\alpha\beta} &= a_{0\alpha\beta} - 2\zeta b_{0\alpha\beta} + \zeta^2 c_{0\alpha\beta} \equiv (1 - K_0\zeta^2) a_{0\alpha\beta} - \\ &- 2\zeta(1 - H_0\zeta) b_{0\alpha\beta}; \qquad g_{(0)0\alpha} = 0, \qquad g_{(0)00} = 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1] Это предположение приводит к некоторым ограничениям на кривизну поверхности Ω_0 и толщину оболочки $h(\zeta^\alpha)$, в частности, на Ω_0 исключаются ребра. Подобные особые случаи нужно рассматривать отдельно.

Здесь $a_{0\alpha\beta}$, $b_{0\alpha\beta}$ и $c_{0\alpha\beta}$ — коэффициенты первой, второй и третьей квадратичных форм срединной поверхности Ω_0, H_0 и K_0 — соответственно средняя и полная кривизны Ω_0

$$H_0 = {}^1/_2 a_0^{\alpha\beta} b_{0\alpha\beta}, \qquad K_0 = det \| b_{0\alpha\beta} \| / det \| a_{0\alpha\beta} \|$$

Для вычисления интегралов по начальному объему требуется знать определитель метрического тензора $g_{(0)\alpha\beta}$. Из (2.2) находим

$$\varkappa = \frac{g_0}{a_0} = (1 - 2H_0\zeta + K_0\zeta^2)^2 \tag{2.3}$$

$$g_0 = det \| g_{(0)ij} \|, \qquad a_0 = det \| a_{0\alpha\beta} \|$$

3. Деформированное состояние оболочки. Радиус-вектор точки тела в деформированном состоянии можно всегда представить в виде

$$r^i(\zeta, \zeta^\alpha) = x^i(\zeta^\alpha) + fn^i + f^\alpha x_\alpha{}^i \tag{3.1}$$

где $x^i(\zeta^\alpha)$ — радиус-вектор точек срединной поверхности Ω в деформированном состоянии, $n^i(\zeta^\alpha)$ — вектор единичной нормали к Ω, $x_\alpha{}^i = \partial x^i(\zeta^\beta) / d\zeta^\alpha$ — касательные векторы к Ω. Вектор $fn^i + f^\alpha x_\alpha{}^i$ является радиус-вектором точек волокон (ζ, ζ^α) (ζ^α — фиксированы, ζ — параметр вдоль волокна) относительно точки с координатами $(0, \zeta^\alpha)$. В частности, если $f^\alpha = 0$, то волокно в деформированном состоянии остается перпендикулярным срединной поверхности.

Естественно предположить, что в пределе при толщине оболочки $h \to 0$ зависимость функций f и f^α от ζ во внутренней части оболочки определяется конечным числом параметров. В частности, в п. 8 будет показано, что статическая теория Кирхгоффа соответствует случаю, когда в разложении функции f в ряд Тейлора удерживаются два первых члена [1]

$$f = (1 + e)\zeta + {}^1/_2\chi\zeta^2 \tag{3.2}$$

а функции f^α считаются равными нулю.

Дальше примем, что f и f^α — известные функции ζ, содержащие ко-

---

[1] Если $x^i(\zeta^\alpha)$ — компоненты радиус-вектора точек срединной поверхности в деформированном состоянии, то функции f и f^α, как следует из (3.1), должны удовлетворять условиям

$$f(0, \zeta^\alpha) = 0, \qquad f^\alpha(0, \zeta^\alpha) = 0$$

Однако можно было бы определить $x^i(\zeta^\alpha)$ и другими способами. Например, можно положить

$$x^i(\zeta^\alpha) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} r^i(\zeta, \zeta^\alpha)\, d\zeta$$

Тогда при выборе зависимости функций f и f^α от ζ следует удовлетворить интегральным ограничениям

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(\zeta, \zeta^\alpha)\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} f^\alpha(\zeta, \zeta^\alpha)\, d\zeta = 0$$

нечное число свободных параметров — внутренних степеней свободы, которые обозначим через $\mu^A(\zeta^\alpha)$

$$f = f(\zeta, \mu^A), \qquad f^\alpha = f^\alpha(\zeta, \mu^A) \tag{3.3}$$

В случае (3.2) такими параметрами являются величины e и χ.

Зная зависимость f и f^α от ζ и параметров μ^A, можно по формулам (1.5) вычислить компоненты метрического тензора в деформированном состоянии

$$\begin{gathered} g_{\wedge\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2fb_{\alpha\beta} + f^2c_{\alpha\beta} + \frac{\partial f}{\partial\zeta^\alpha}\frac{\partial f}{\partial\zeta^\beta} + 2\nabla_{(\alpha}{}^\wedge f_{\beta)} + \\ + \nabla_\alpha{}^\wedge f^\gamma\nabla_\beta{}^\wedge f_\gamma - 2fb_{(\alpha}{}^\gamma\nabla_{\beta)}{}^\wedge f_\gamma + 2\frac{\partial f}{\partial\zeta}{}_{(\alpha}b_{\beta)\gamma}f^\gamma + b_{\alpha\gamma}b_{\beta\sigma}f^\gamma f^\sigma \\ g_{\wedge 0\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial\zeta} + \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial f}{\partial\zeta^\alpha} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial\zeta}\nabla_\alpha{}^\wedge f^\gamma + \left(-f\frac{\partial f^\gamma}{\partial\zeta} + \frac{\partial f}{\partial\zeta}f^\gamma\right)b_{\alpha\gamma} \\ g_{\wedge 00} = \left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)^2 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial\zeta}\frac{\partial f^\gamma}{\partial\zeta}, \qquad f_\alpha = a_{\alpha\beta}f^\beta \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой, второй и третьей квадратичных форм деформированной поверхности, $\nabla_\alpha^\wedge$ — ковариантная производная относительно связности на Ω.

Из формул (1.5), (3.3), (3.4) и (2.2) видно, что компоненты тензора деформации будут известными функциями первого, второго и третьего тензоров деформаций срединной поверхности[1]

$$A_{\alpha\beta} = {}^1/_2(a_{\alpha\beta} - a_{0\alpha\beta}), \qquad B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{0\alpha\beta}, \qquad C_{\alpha\beta} = {}^1/_2(c_{\alpha\beta} - c_{0\alpha\beta}) \tag{3.5}$$

а также ζ, μ^A и $\nabla_\alpha{}^\wedge\mu^A$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\zeta, A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, \mu^A, \nabla_\alpha{}^\wedge\mu^A) \tag{3.6}$$

Функции (3.6) легко выписать в общем виде, однако при построении конкретных моделей оболочек удобнее каждый раз получать их заново.

Определим от каких величин при предположениях (3.3) зависят компоненты вектора скорости частиц оболочки $w^{\cdot i}(\zeta, \zeta^\alpha, t)$. Дифференцируя (3.1) по времени (время во все предыдущие формулы п. 3 входило в качестве параметра), получим

$$w^{\cdot i} \equiv \left.\frac{\partial r^i}{\partial t}\right|_{\zeta^i=\mathrm{const}} = v^i + (f^\alpha\delta_k{}^i - fx^{i\alpha}n_k)\frac{\partial v^k}{\partial\zeta^\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\mu^A}\frac{\partial\mu^A}{\partial t}n^i + \frac{\partial f^\alpha}{\partial\mu^A}\frac{\partial\mu^A}{\partial t}x_\alpha{}^i \tag{3.7}$$

где $v^i = \partial x^i / \partial t$ — компоненты вектора скорости точек срединной поверхности. При выводе (3.7) использовано легко доказываемое соотношение

$$n_{,t}{}^i \equiv \frac{\partial n^i}{\partial t} = -x^{i\alpha}n_k\frac{\partial v^k}{\partial\zeta^\alpha}, \qquad x^{i\alpha} = a^{\alpha\beta}x_\beta{}^i \tag{3.8}$$

Таким образом, при заданных функциях f и f^α компоненты вектора скорости точек оболочки зависят известным образом от следующих па-

[1] Третий тензор деформации выражается через $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $a_{0\,\alpha\beta}$ и $b_{0\,\alpha\beta}$ алгебраическими соотношениями.

раметров: [1]

$$w^{\cdot i} = w^{\cdot i}\left(\zeta,\ v^k,\ \frac{\partial v^k}{\partial \zeta^\alpha},\ x_\alpha{}^k,\ \mu^A,\ \frac{\partial \mu^A}{\partial t}\right) \tag{3.9}$$

4. Осреднение вариационного уравнения. Вариационное уравнение (1.1) в теории упругости рассматривается в классе всех дважды дифференцируемых функций r^i $(\zeta^i,\ t)$ (или $w^i = r^i - r_0{}^i$). Для получения основных соотношений теории оболочек рассмотрим вариационное уравнение (1.1) на классе функций (3.1), (3.3) [2]. При этом интеграл действия

$$I = \int\limits_t \int\limits_V \Lambda\, d\tau\, dt$$

а также δW и δW^* станут функционалами, определенными на функциях x^i $(\zeta^\alpha,\ t)$, μ^A $(\zeta^\alpha,\ t)$ (или $u^i = x^i - x_0{}^i$, μ^A). Найдем вид этих функционалов. В качестве области V в (1.1) будем брать области, являющиеся прямыми произведениями $V = \Omega_0 \times \zeta$, где Ω_0 — любая часть срединной поверхности с кусочно-гладкой границей, $|\zeta| \leqslant h/2$

Поскольку

$$I = \int\limits_t \int\limits_V \Lambda \sqrt{g_0}\, d\zeta\, d\zeta^1\, d\zeta^2\, dt = \int\limits_t \int\limits_{\Omega_0} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Lambda \sqrt{\varkappa}\, d\zeta\, d\sigma\, dt, \qquad d\sigma = \sqrt{a_0}\, d\zeta^1\, d\zeta^2 \tag{4.1}$$

то

$$I\,(u^i,\ \mu^A) = \int\limits_t \int\limits_{\Omega_0} L\, d\sigma\, dt$$

где L — лагранжиан, осредненный по толщине пластины

$$L = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Lambda \sqrt{\varkappa}\, d\zeta$$

В качестве лагранжиана возьмем разность кинетической и внутренней энергий (1.2). Тогда L представится в виде разности осредненной кинетической и внутренней энергий

$$L = K - \Phi, \qquad K = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \frac{w^{\cdot 2}}{2} \sqrt{\varkappa}\, d\zeta, \qquad \Phi = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho_0 U \sqrt{\varkappa}\, d\zeta \tag{4.2}$$

Формулы (3.6), (3.9), (4.2) и (1.5) показывают, что осредненная кинетическая энергия K — функция компонент вектора скорости срединной поверхности, их производных вдоль поверхности, касательных векторов

---

[1] Компоненты вектора нормали выражаются через $x_\alpha{}^i$ алгебраическими соотношениями.

[2] Такой метод получения уравнений теории оболочек — переход от общего класса функций к функциям специального вида — представляет собой, по существу, метод Ритца. Для построения одной уточненной модели линейной статической теории изгиба пластин он был применен Рейсснером. Однако Рейсснер использовал вариационный принцип, распространение которого на произвольные динамические физически и геометрически нелинейные модели вызывает затруднения.

$x_\alpha{}^i$, а также μ^A, $\partial\mu^A/\partial t$ и характеристик оболочки ρ_0, h

$$K = K\left(v^i, \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^\alpha}, x_\alpha{}^i, \mu^A, \frac{\partial \mu^A}{\partial t}, \rho_0, h\right) \tag{4.3}$$

а осредненная внутренняя энергия — функция первого и второго тензоров деформаций срединной поверхности, параметров μ^A и их производных $\nabla_\alpha\hat{}\ \mu^A$, и характеристик оболочки K^B (ρ_0 и h для сокращения записи включим в число параметров K^B)

$$\Phi = \Phi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, \mu^A, \nabla_\alpha\hat{}\ \mu^A, K^B) \tag{4.4}$$

Существенно, что лагранжиан зависит от вторых производных вектора перемещений срединной поверхности (аргумент $\partial v^i / \partial \zeta^\alpha$ у кинетической энергии и аргумент $B_{\alpha\beta}$ у внутренней энергии), а также от внутренних степеней свободы μ^A и их первых производных.

Подставляя в (1.4) формулы (3.1) и (3.3) (с учетом равенств $\delta r^i = \delta w^i$, $\delta n^i = -x^{i\alpha} n_k (\partial \delta u^k / \partial \zeta^\alpha)$) и интегрируя по ζ, получим следующее осредненное выражение для δW:

$$\begin{aligned}\delta W = &\int_t\int_{\Omega_0}\left(P_i\delta u^i + P_i{}^\alpha \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + P_A \delta\mu^A\right) d\sigma\, dt + \\ &+ \int_t\int_{\partial\Omega_0}\left(Q_i\delta u^i + M_i{}^\alpha \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + S_A\delta\mu^A\right) ds\, dt - \\ &- \left[\int_{\Omega_0}\left(\langle I_i\rangle\, \delta u^i + I_i{}^\alpha \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + I_A\delta\mu^A\right) d\sigma\right]_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\partial\Omega_0$ — граница поверхности Ω_0, а коэффициенты при вариациях определены формулами

$$P_i = \{p_i \sqrt{\varkappa_1}\} \qquad P_i{}^\alpha = \{p_k(-n_i x^{k\alpha} f + \delta_i{}^k f^\alpha)\sqrt{\varkappa_1}\}$$

$$P_A = \left\{p_i\left(n^i \frac{\partial f}{\partial \mu^A} + x_\alpha{}^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mu^A}\right)\sqrt{\varkappa_1}\right\}$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} p_i\sqrt{\varkappa_2}\, d\zeta, \qquad M_i{}^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} p_k(-n_i x^{k\alpha} f + \delta_i{}^k f^\alpha)\sqrt{\varkappa_2}\, d\zeta \tag{4.6}$$

$$S_A = \int_{-h/2}^{h/2} p_i\left(n^i \frac{\partial f}{\partial \mu^A} + x_\alpha{}^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mu^A}\right)\sqrt{\varkappa_2}\, d\zeta$$

$$\langle I_i\rangle = \int_{-h/2}^{h/2} I_i\sqrt{\varkappa}\, d\zeta, \qquad I_i{}^\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} I_k(-n_i x^{k\alpha} f + \delta_i{}^k f^\alpha)\sqrt{\varkappa}\, d\zeta$$

$$I_A = \int_{-h/2}^{h/2} I_k\left(n^k \frac{\partial f}{\partial \mu^A} + x_\alpha{}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mu^A}\right)\sqrt{\varkappa}\, d\zeta$$

$$\sqrt{\varkappa_1} = \sqrt{\frac{g_1}{a_0}}, \quad g_1 = \det\|g_{(1)\alpha\beta}\|, \quad g_{(1)\alpha\beta} = g_{(0)\alpha\beta} + \frac{\partial h}{\partial \zeta^\alpha}\frac{\partial h}{\partial \zeta^\beta}$$

$$\sqrt{\varkappa_2} = \sqrt{\frac{a_2}{a_{(0)2}}(1 - 2b_{0\,\alpha\beta}\tau^\alpha\tau^\beta\zeta + c_{0\,\alpha\beta}\zeta^2)}$$

Здесь через $\{A\}$ обозначена сумма $A|_{\zeta=h/2} + A|_{\zeta=-h/2}$, a_2 — детерминант метрического тензора на поверхности $\partial\Omega \times \zeta$ в деформированном состоянии ($\partial\Omega$ — граница Ω), $a_{(0)2}$ — детерминант метрического тензора на поверхности $\partial\Omega_0 \times \zeta$ в начальном состоянии, τ_α — компоненты единичного касательного вектора к $\partial\Omega_0$. В случае оболочки постоянной толщины $\varkappa_1$ совпадает с величиной $\varkappa$, определенной формулой (2.3).

Рассмотрим смысл величин (4.6) в частном случае линеаризованной теории и в предположении, что волокна при деформации остаются перпендикулярными срединной поверхности, т. е. $f^\alpha = 0$. В рамках линеаризованной теории в произведениях fp_i следует оставить из разложения f в ряд Тейлора только первый член $f \approx \zeta$. Поэтому $fp_i \approx \zeta p_i$. Очевидно, что $P_i d\sigma$ представляет собой сумму сил, действующих на элемент оболочки $d\sigma \times \zeta$ и приложенных на боковых поверхностях $\zeta = \pm h/2$, $P_i^\alpha d\sigma$ — умноженный на вектор нормали к срединной поверхности n_i момент касательных сил, действующих на боковых поверхностях, относительно срединной плоскости, Q_i — перерезывающую силу, а M_i^α — умноженный на n_i момент внешних сил относительно оси $\zeta = 0$, действующих на поверхности $\partial\Omega \times \zeta$, $\langle I_i\rangle$ — осредненный по толщине импульс элемента оболочки, I_i^α — умноженный на n_i момент количества движения элемента оболочки.

Смысл величин P_A, S_A и I_A связан со смыслом параметров μ^A.

Аналогично (4.5) получается выражение для δW^*

$$\delta W^* = \int_t \int_{\Omega_0} \left(P_i^* \delta u^i + P_i^{*\alpha} \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + P_A^* \delta\mu^A\right) d\sigma\, dt \tag{4.7}$$

где

$$P_i^* = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 F_i \sqrt{\varkappa}\, d\zeta$$

$$P_i^{*\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 F_k \left(-n_i x^{k\alpha} f + \delta_i^k f^\alpha\right) \sqrt{\varkappa}\, d\zeta \tag{4.8}$$

$$P_A^* = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 F_k \left(n^k \frac{\partial f}{\partial \mu^A} + x_\alpha^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mu^A}\right) \sqrt{\varkappa}\, d\zeta$$

Величина $P_i^* d\sigma$ имеет смысл суммарной массовой силы, действующей на элемент $d\sigma \times \zeta$, $P_i^{*\alpha}$ (в линеаризованной теории при $f^\alpha = 0$) — момент внешних объемных сил относительно срединной поверхности, умноженной на единичный вектор нормали n_i.

Осредненное вариационное уравнение (1.1), согласно (4.1), (4.2), (4.5) и (4.7), принимает вид

$$\begin{gathered}\delta \int_t \int_{\Omega_0} (K - \Phi)\, d\sigma\, dt + \int_t \int_{\Omega_0} \Big[(P_i + P_i^*)\, \delta u^i + (P_i^\alpha + P_i^{*\alpha}) \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + \\ + (P_A + P_A^*)\delta\mu^A \Big] d\sigma\, dt + \int_t \int_{\partial\Omega_0} \left(Q_i \delta u^i + M_i^\alpha \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + S_A \delta\mu^A\right) ds\, dt - \\ - \left[\int_{\Omega_0} \left(\langle I_i\rangle\, \delta u^i + I_i^\alpha \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + I_A \delta\mu^A\right) d\sigma\right]_{t_1}^{t_2} = 0\end{gathered} \tag{4.9}$$

5. Система уравнений теории оболочек. Вычислим вариацию первого члена в (4.9), считая, что в области изменения ζ^α, t функции μ^A дважды, а u^i — четыре раза дифференцируемы

$$\delta \int_t \int_{\Omega_0} K\, d\sigma\, dt = \int_t \int_{\Omega_0} \left(\frac{\delta K}{\delta u^i} \delta u^i + \frac{\delta K}{\delta \mu^A} \delta \mu^A \right) d\sigma\, dt + \tag{5.1}$$

$$+ \int_t \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} \right) \delta u^i \nu_\alpha\, ds\, dt + \left[\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial K}{\partial v^i} \delta u^i + \frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot\mu^A} \delta \mu^A \right) d\sigma \right]_{t_1}^{t_2}$$

Здесь

$$\frac{\delta K}{\delta u^i} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v^i} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\alpha{}^\circ \frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} - \nabla_\alpha{}^\circ \frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i}, \quad v_\alpha{}^i \equiv \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^\alpha} \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta K}{\delta \mu^A} = \frac{\partial K}{\partial \mu^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial \dot\mu^A}, \qquad \dot\mu^A \equiv \frac{\partial \mu^A}{\partial t}$$

ν_α — компоненты вектора единичной нормали к кривой $\partial\Omega_0$, касательного к поверхности Ω_0 и направленного в сторону, внешнюю к Ω_0, $\nabla_\alpha{}^\circ$,— ковариантная производная относительно связности на поверхности Ω_0.

Для вариации внутренней энергии, используя формулы [1]

$$\delta A_{\alpha\beta} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial \zeta^{(\alpha}} x_{\beta)}{}^i, \qquad \delta B_{\alpha\beta} = n_i \nabla_\alpha{}^\wedge \nabla_\beta{}^\wedge \delta u^i$$

$$\nabla_\alpha{}^\wedge \varphi^\alpha = \frac{1}{\gamma} \nabla_\alpha{}^\circ \gamma \varphi^\alpha, \quad \nabla_\alpha{}^\circ \varphi^\alpha = \gamma \nabla_\alpha{}^\wedge \frac{1}{\gamma} \varphi^\alpha, \quad \gamma = \sqrt{\frac{a}{a_0}}, \quad a = \det \| a_{\alpha\beta} \| \tag{5.3}$$

из (4.4) получим

$$\delta \int_t \int_{\Omega_0} \Phi\, d\sigma\, dt = \int_t \int_{\Omega_0} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta u^i} \delta u^i + \frac{\delta \Phi}{\delta \mu^A} \delta \mu^A \right) d\sigma\, dt + \tag{5.4}$$

$$+ \int_t \int_{\partial\Omega_0} \gamma \left(n^{\alpha\beta} \delta u_\alpha - q^\beta \delta u_n + m^{\alpha\beta} n_i \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + \frac{\partial \Phi / \gamma}{\partial \mu_\beta{}^A} \delta \mu^A \right) \nu_\beta\, ds\, dt$$

Здесь

$$\frac{\delta \Phi}{\delta u^i} = n_i \gamma \left(\nabla_\beta{}^\wedge q^\beta - n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \right) - x_{i\alpha} \gamma \left(\nabla_\beta{}^\wedge n^{\alpha\beta} + q^\beta b_\beta{}^\alpha \right)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \mu^A} = \gamma \left(\frac{\partial \Phi / \gamma}{\partial \mu^A} - \nabla_\alpha{}^\wedge \frac{\partial \Phi / \gamma}{\partial \mu_\alpha{}^A} \right)$$

$$n^{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial A_{\alpha\beta}} + m^{\gamma\beta} b_\gamma{}^\alpha, \qquad m^{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial B_{\alpha\beta}} \tag{5.5}$$

$$q^\alpha = \nabla_\beta{}^\wedge m^{\alpha\beta} \tag{5.6}$$

Через $\mu_\alpha{}^A$ обозначена производная $\nabla_\alpha{}^\wedge \mu^A$, δu_α и δu_n — проекции вариации перемещений на касательную и нормаль к Ω:

$$\delta u_\alpha = x_\alpha{}^i \delta u_i, \quad \delta u_n = n^i \delta u_i.$$

[1] Круглые скобки в индексах означают операцию симметрирования; φ^α в формулах (5.3) — контрвариантные компоненты любого двумерного вектора в системе координат ζ^α.

Второе слагаемое в (4.9) интегрированием по частям приводится к следующей форме:

$$\int\limits_t\int\limits_{\Omega_0}\left[(P_i+P_i^*)\,\delta u^i+(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha})\,\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^{\alpha}}+(P_A+P_A^*)\,\delta\mu^A\right]d\sigma\,dt=$$

$$=\int\limits_t\int\limits_{\Omega_0}[(P_i+P_i^*-\nabla_{\alpha}{}^{\circ}(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha}))\,\delta u^i+(P_A+P_A^*)\delta\mu^A]\,d\sigma\,dt+$$

$$+\int\limits_t\int\limits_{\partial\Omega_0}(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha})\,\delta u^i\nu_{\alpha}\,ds\,dt \qquad (5.7)$$

Подставляя выражения (5.1), (5.4) и (5.7) в (4.9) и полагая сначала вариации δu^i и $\delta\mu^A$ на границе трехмерной области $\Omega_0\times t$ равными нулю, получим уравнения теории оболочек

$$\frac{\delta K}{\delta u^i}-\frac{\delta\Phi}{\partial u^i}+P_i+P_i^*-\nabla_{\alpha}{}^{\circ}\,(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha})=0 \qquad (5.8)$$

$$\frac{\delta K}{\delta\mu^A}-\frac{\delta\Phi}{\delta\mu^A}+P_A+P_A^*=0 \qquad (5.9)$$

Величины, входящие в эти уравнения, определены формулами (4.6), (4.8), (5.2) и (5.5). Уравнения (5.8) представляют собой уравнения движения оболочки, уравнения (5.9) служат для определения внутренних степеней свободы μ^A.

Уравнения движения приобретают особенно простую форму в статическом случае (кинетическая энергия $K=0$). Проектируя уравнения (5.8) на нормаль и на касательную плоскость к Ω и используя (5.5), получим

$$\nabla_{\beta}{}^{\wedge}q^{\beta}-n^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}=\gamma^{-1}n^i\,[P_i+P_i^*-\nabla_{\alpha}{}^{\circ}\,(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha})] \qquad (5.10)$$

$$\nabla_{\beta}{}^{\wedge}n^{\alpha\beta}+q^{\beta}b_{\beta}{}^{\alpha}=\gamma^{-1}x^{i\alpha}\,[P_i+P_i^*-\nabla_{\alpha}{}^{\circ}\,(P_i^{\alpha}+P_i^{*\alpha})] \qquad (5.11)$$

Слагаемые в левых частях уравнений (5.10), (5.11) по форме совпадают с соответствующими членами в обычно используемых уравнениях равновесия теории оболочек. В правых частях уравнений (5.10), (5.11) подробно расшифровано, что следует понимать под внешними силами, действующими на элемент оболочки.

Подчеркнем, что касательные силы на поверхности $\zeta=\pm\, h\,/\,2$ дают вклад в уравнение (5.10), представляющее собой проекцию уравнений равновесия на направление нормали к срединной поверхности. Этот вклад описывается тензором P_i^{α} (см. формулу (4.6)).

Тензор растягивающих усилий $n^{\alpha\beta}$ и тензор изгибающих моментов $m^{\alpha\beta}$ задаются уравнениями состояния (5.5). Уравнения моментов, обычно добавляемые к системе уравнений равновесия (5.10), (5.11), в рассматриваемой теории представляют собой определение величин q^{α} (5.6).

В динамическом случае (кинетическая энергия $K\neq 0$) к правым частям уравнений (5.10), (5.11) следует прибавить проекции вариационной производной $\gamma^{-1}\ \delta K\,/\,\delta u^i$ на нормаль и на касательную плоскость к Ω : $\gamma^{-1}n^i\delta K\,/\,\delta u^i$ и $-\ \gamma^{-1}x_{\alpha}{}^i\delta K/\delta u^i$. Динамические уравнения упрощаются для моделей оболочек, в которых принимается, что нормаль к срединной поверхности при деформации переходит в нормаль (функции f^α в формулах (3.1) равны нулю). При этом, как видно из (3.7) и (4.2), кинетическая энергия зависит от $x_\alpha{}^i$ и градиентов скорости $\partial v^i / \partial \zeta^\alpha$ лишь через комбинации

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} x_\alpha{}^i x_\beta{}^j, \qquad n,_t{}^i \equiv \frac{\partial n^i}{\partial t} = - x^{i\alpha} n_k \frac{\partial v^k}{\partial \zeta^\alpha}$$

Вариационная производная от K принимает вид

$$\frac{\delta K}{\partial u^i} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v^i} - \gamma \nabla_\beta{}^\wedge \frac{1}{\gamma} \left(x^{k\beta} n_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial n,_t{}^k} + 2 x_{i\alpha} \frac{\partial K}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.8) и вводя обозначение

$$N^\beta = \nabla_\gamma{}^\wedge m^{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma} x^{k\beta} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial n,_t{}^k} \tag{5.13}$$

запишем динамические уравнения в следующей форме:

$$\begin{gathered}
\nabla_\beta{}^\wedge N^\beta - \left(n^{\alpha\beta} - \frac{2}{\gamma} \frac{\partial K}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) b_{\alpha\beta} + \frac{1}{\gamma} n^i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v^i} = \\
= \frac{1}{\gamma} n^i \left[P_i + P_i{}^* - \nabla_\alpha{}^\circ (P_i{}^\alpha + P_i{}^{*\alpha}) \right]
\end{gathered} \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered}
\nabla_\beta{}^\wedge \left(n^{\alpha\beta} - \frac{2}{\gamma} \frac{\partial K}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) + N^\beta b_\beta{}^\alpha - \frac{1}{\gamma} x^{k\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v^k} = \\
= - \frac{1}{\gamma} x^{i\alpha} \left[P_i + P_i{}^* - \nabla_\alpha{}^\circ (P_i{}^\alpha + P_i{}^{*\alpha}) \right]
\end{gathered} \tag{5.15}$$

Соотношение (5.13), представляющее определение N^β, можно по-прежнему рассматривать как уравнение, которое заменяет уравнение момента количества движения. В уравнениях движения (5.14) — (5.15) появились проекции производной по времени от импульса на нормаль и касательную, а также динамическая добавка к $n^{\alpha\beta}$ (второе слагаемое в круглых скобках в левой части; этот член может быть существенным только в нелинейных теориях).

Рассмотрим дополнительные соотношения, которые можно извлечь из вариационного уравнения (4.9). При произвольных вариациях δu^i и $\delta \mu^A$ на границе области $V \times t$ (4.9) сводится к следующему равенству:

$$\begin{gathered}
\int\limits_t \int\limits_{\partial \Omega_0} \left\{ \left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} - \gamma n^{\beta\alpha} x_{i\beta} + \gamma q^\alpha n_i + P_i{}^\alpha + P_i{}^{*\alpha} \right) \nu_\alpha + Q_i \right] \delta u^i + \right. \\
\left. + (M_i{}^\alpha - \gamma m^{\alpha\beta} \nu_\beta n_i) \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + \left(S_A - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_\alpha{}^A} \nu^\alpha \right) \delta \mu^A \right\} ds\, dt + \\
+ \left[\int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial K}{\partial v^i} - \langle I_i \rangle \right) \delta u^i + \left(\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} - I_i{}^\alpha \right) \frac{\partial \delta u^i}{\partial \zeta^\alpha} + \left(\frac{\partial K}{\partial \dot\mu^A} - I_A \right) \delta \mu^A \right\} d\sigma \right]_{t_1}^{t_2} = 0
\end{gathered} \tag{5.16}$$

Этому равенству можно удовлетворить, если положить

$$Q_i = \left(\gamma n^{\beta\alpha} x_{i\beta} - \gamma q^{\alpha} n_i - P_i^{\alpha} - P_i^{*\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial v_{\alpha}{}^{i}} - \frac{\partial K}{\partial x_{\alpha}^{;i}}\right)\nu_\alpha$$

$$M_i^{\alpha} = \gamma m^{\alpha\beta}\nu_\beta n_i, \qquad S_A = \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_{\alpha}{}^{A}}\nu_\alpha \tag{5.17}$$

$$\langle I_i\rangle = \frac{\partial K}{\partial v^i}, \qquad I_i^{\alpha} = \frac{\partial K}{\partial v_{\alpha}{}^{i}}, \qquad I_A = \frac{\partial K}{\partial \mu^{\cdot A}}$$

Равенство (5.16) выполняется и при других значениях Q_i, $M_i^\alpha, \ldots$ (этот вопрос для произвольных моделей сплошных сред с высшими производными рассматривался в работе [2]). Однако во все используемые дальше соотношения величины Q_i, $M_i^\alpha, \ldots$ входят в комбинациях, для которых имеющийся произвол несуществен. Формулы (5.17) можно рассматривать как определения величин $Q_i, \ldots, I_A$.

6. Краевые условия. Как и в общей теории моделей сплошных сред, будем задавать краевые условия, задавая функционал

$$\delta A^{(e)} = \int_t\int_{\partial\Omega_0}\left(Q_i\delta u^i + M_i^{\alpha}\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha} + S_A\delta\mu^A\right)ds\,dt \tag{6.1}$$

представляющий работу внешних сил на границе оболочки на возможных перемещениях δu^i и $\delta\mu^A$. Внешние силы совершают работу не только на перемещениях δu^i края оболочки, но и на градиентах перемещений $\partial\delta u^i / \partial\zeta^\alpha$. Работа на градиентах перемещений, согласно (5.17), совершается изгибающими моментами

$$\int_t\int_{\partial\Omega_0} M_i^{\alpha}\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}ds\,dt = \int_t\int_{\partial\Omega_0}\gamma m^{\alpha\beta}\nu_\beta n_i\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}ds\,dt \tag{6.2}$$

Градиент перемещений $\partial\delta u^i / \partial\zeta^\alpha$ в (6.2) удобно разложить на производную по нормали к $\partial\Omega_0$ и на производную вдоль $\partial\Omega_0$

$$\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha} = \nu_\alpha\left(\nu^\beta\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\beta}\right) + \tau_\alpha\left(\tau^\beta\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\beta}\right) = \nu_\alpha\frac{\partial\delta u^i}{\partial\nu} + \tau_\alpha\frac{d\delta u^i}{ds}$$

Тогда работа изгибающих моментов представится в виде

$$\int_t\int_{\partial\Omega_0} M_i^{\alpha}\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}ds\,dt = \int_t\int_{\partial\Omega_0}\gamma\left(m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta n_i\frac{\partial\delta u^i}{\partial\nu} + m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i\frac{d\delta u^i}{ds}\right)ds\,dt \tag{6.3}$$

Первое слагаемое представляет собой работу изгибающих моментов, второе — крутящих моментов.

Полную работу внешних сил на возможных перемещениях, используя (6.3) и интегрируя по частям, представим в виде

$$\delta A^{(e)} = \int_t\int_{\partial\Omega_0}\left\{\left(Q_i - \frac{d}{ds}\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i\right)\delta u^i + \gamma m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta n_i\frac{\partial\delta u^i}{\partial\nu} + S_A\delta\mu^A\right\}ds\,dt +$$

$$+\int_t\int_{\partial\Omega_0}\frac{d}{ds}(\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i\delta u^i)\,ds\,dt \tag{6.4}$$

Последний интеграл в (6.4) равен нулю, если на контуре $\partial\Omega_0$ нет точек разрыва величины $\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i \delta u^i$. Процедура интегрирования по частям представляет собой замену системы крутящих моментов эквивалентной перерезывающей силой.

Выражение (6.4) для $\delta A^{(e)}$ обладает тем преимуществом, что вариации δu^i и $\partial\delta u^i / \partial\nu$ независимы.

Зададим работу внешних сил на границе оболочки

$$\delta A^{(e)} = \int\limits_t \int\limits_{\partial\Omega_0} \left(\mathrm{Q}_i \delta u^i + \mathrm{M} n_i \frac{\partial \delta u^i}{\partial \nu} + \mathrm{S}_A \delta\mu^A \right) ds\, dt \tag{6.5}$$

Здесь Q_i представляет собой внешнюю силу, приложенную к краю оболочки, M — внешний изгибающий момент. Из (6.4) и (6.5) можно получить различные краевые условия в зависимости от конструкции класса функций. Например, если на границе заданы перемещения, то $\delta u^i = 0$ и в силу произвольности $n_i \partial\delta u^i / \partial\nu$ и $\delta\mu^A$

$$m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = \mathrm{M}, \qquad S_A = \mathrm{S}_A \tag{6.6}$$

В случае, когда на границе нет ограничений на перемещения, то дополнительно к (6.6) из (6.4) и (6.5) в силу независимости δu^i и $\partial\delta u^i / \partial\nu$ получим

$$Q_i - \frac{d}{ds}\left(\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i\right) = \mathrm{Q}_i \tag{6.7}$$

Если Q_i и $m^{\alpha\beta}$ определены через внутреннюю и кинетическую энергии формулами (5.6), (5.17), то левую часть равенства (6.7) можно рассматривать как внутренние усилия, возникающие для уравновешивания внешней силы Q_i. Существенно, что эти внутренние усилия зависят от кривизны срединной поверхности и кривизны ее границы.

Последний интеграл в (6.4), как видно из сравнения (6.4) с (6.5), обращается в нуль и при наличии на границе точек разрыва M_s величин $\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i$. Из равенства нулю этого интеграла для непрерывных на $\partial\Omega_0$ вариациях δu_i получим следующие соотношения в точках M_s:

$$(\gamma m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta n_i)_+ = (\gamma m^{\alpha\beta}\nu_\alpha\tau_\beta n_i)_- \tag{6.8}$$

Здесь символами плюс и минус отмечаются предельные значения величины при подходе к M_s справа и слева вдоль $\partial\Omega_0$.

Равенство (6.8) означает, что если вектор нормали к срединной поверхности в деформированном состоянии непрерывен, то должна быть непрерывной величина крутящего момента (в линеаризованных теориях $\gamma = 1$).

Равенство (6.8) имеет смысл только тогда, когда определены соответствующие пределы $(\gamma m^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta n_i)_\pm$. Условия в особых точках, в которых имеются сингулярности, также можно получить вариационными методами, и даже определить характер сингулярности, однако это тема отдельного исследования.

7. Условия на линиях разрыва. Пусть на поверхности Ω_0 имеется линия Γ, на которой могут рваться производные от перемещений и параметры μ^A. Линия Γ вообще движется по Ω_0. Установим условия, которые должны выполняться на линиях разрыва.

В трехмерном пространстве переменных ζ^1, ζ^2, t движущаяся линия Γ заметает двумерную поверхность

$$\zeta^\alpha = F^\alpha(s, t) \tag{7.1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что эта поверхность разбивает область $\Omega_0 \times t$ на две части.

Величины в одной из них будем отмечать индексом 1, в другой — 2. Количество условий на разрыве зависит от конструкции класса функций в окрестности поверхности разрыва $\Gamma \times t$. Допустимые функции u^i и μ^A в каждой из областей 1 и 2 по предположению имеют соответственно четвертые и вторые производные. На $\Gamma \times t$ компоненты вектора перемещений u^i будем считать непрерывными. Предположения относительно μ^A и производных от u^i будут сделаны ниже.

Для функций (7.1) имеется две возможности: 1) функции (7.1) заданы, движение линии разрыва известно и допустимые функции терпят разрыв на заранее фиксированной поверхности и 2) движение линии разрыва подлежит определению, допустимые функции могут рваться на любой (уже не фиксируемой) поверхности $\Gamma \times t$, поэтому подвергается варьированию наряду с u^i и μ^A также и сама поверхность $\Gamma \times t$ (функции (7.1)).

Рассмотрим сначала первый случай: движение линии разрыва известно.

Формула Стокса, которая использовалась для вычисления вариации

$$\delta \int_t \int_\Omega (K - \Phi)\, d\sigma\, dt \tag{7.2}$$

при интегрировании по частям, для функций, имеющих разрыв, усложнится и запишется в виде

$$\begin{gathered}\int_t \int_\Omega \left(\nabla_\alpha{}^\circ \Phi^\alpha + \frac{\partial A}{\partial t}\right) d\sigma\, dt = \int_t \int_{\partial\Omega_0} \Phi^\alpha \nu_\alpha\, ds\, dt + \\ + \left[\int_{\Omega_0} A\, d\sigma\right]_{t_1}^{t_2} + \int_t \int_\Gamma (c\,[A] + [\Phi^\alpha]\,\nu_\alpha)\, ds\, dt \end{gathered} \tag{7.3}$$

$$[A] = A_2 - A_1, \qquad c = -\nu_\alpha \frac{\partial F^\alpha}{\partial t}$$

где A и Φ_α — произвольные функции, терпящие разрыв на $\Gamma \times t$, c — скорость движения линии разрыва по нормали к себе, единичный вектор ν_α нормали к Γ по условию направлен со стороны 2 на сторону 1.

В выражении для вариации (7.2) в соответствии с (7.3) появится добавок

$$\iint\limits_{t\,\Gamma}\left\{\left[\frac{\partial K}{\partial v^i}\delta u^i+\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}+\frac{\partial K}{\partial\mu^{\cdot A}}\delta\mu^A\right]c+\left[\left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right)\delta u^i\right]\nu_\alpha-\right.$$

$$\left.-\left[\gamma\left(n^{\alpha\beta}x_{i\alpha}-q^\beta n_i\right)\delta u^i+\gamma m^{\alpha\beta}n_i\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\delta\mu^A\right]\nu_\alpha\right\}ds\,dt=0 \quad (7.4)$$

Равенство этого добавка нулю следует из вариационного уравнения (4.9) и независимости вариаций на $\partial\Omega_0$ и Г.

Пусть наряду с функциями u^i непрерывны также $\partial u^i/\partial\zeta^\alpha$, μ^A. Тогда

$$[\delta u^i]=0,\qquad \left[\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}\right]=0\quad [\delta\mu^A]=0$$

Поэтому равенство (7.4) сводится к соотношению

$$\iint\limits_{t\,\Gamma}\left\{\left(\left[\frac{\partial K}{\partial v^i}\right]c+\left[\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right]\nu_\alpha-\left[\gamma n^{\alpha\beta}x_{i\alpha}-\gamma q^\beta n_i\right]\nu_\beta\right)\delta u^i+\right.$$

$$\left.+\left(\left[\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right]c-\left[\gamma m^{\alpha\beta}n_i\right]\nu_\beta\right)\frac{\partial\delta u^i}{\partial\zeta^\alpha}+\left(\left[\frac{\partial K}{\partial\mu^{\cdot A}}\right]c-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\right]\nu_\alpha\right)\delta\mu^A\right\}ds\,dt=0$$

Выделяя интегрированием по частям независимые вариации (аналогично п.6) из этого соотношения получим следующие условия на разрыве:

$$\left[\frac{\partial K}{\partial v^i}\right]c+\left[\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{dv_\alpha{}^i}\right]\nu_\alpha-\left[\gamma n^{\alpha\beta}x_{i\alpha}-\gamma q^\beta n_i\right]\nu_\beta- \quad (7.5)$$

$$-\frac{d}{ds}\tau_\alpha\left(\left[\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right]c-\left[\gamma m^{\alpha\beta}n_i\right]\nu_\beta\right)=0$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right]c\nu_\alpha-\left[\gamma m^{\alpha\beta}n_i\right]\nu_\alpha\nu_\beta=0 \quad (7.6)$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial\mu^{\cdot A}}\right]c-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\right]\nu_\alpha=0 \quad (7.7)$$

Если допускается разрыв производных по нормали от перемещений $u_\nu{}^i=\nu^\alpha(\partial u^i\,/\,\partial\zeta^\alpha)$, то вариации $\delta u_\nu{}^i$ с двух сторон поверхности $\Gamma\times t$ становятся независимыми, и вместо (7.6) из (7.4) получим, что комбинация

$$\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\nu_\alpha c-\gamma m^{\alpha\beta}n_i\nu_\alpha\nu_\beta=0 \quad (7.8)$$

обращается в нуль на каждой из сторон $\Gamma\times t$.

Аналогично, в случае разрыва μ^A на $\Gamma\times t$, вместо (7.7) из (7.4) следует обращение в нуль на каждой из сторон поверхности $\Gamma\times t$ величин

$$\frac{\partial K}{\partial\mu^{\cdot A}}c-\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\nu_\alpha=0 \quad (7.9)$$

Пусть теперь движение линии разрыва неизвестно, и его требуется найти в результате решения задачи. Для этого необходимы дополнительные условия. Соответствующие условия получим из вариационного уравнения (4.9), рассматривая его на классе всех функций, терпящих разрыв на некоторой (уже не фиксируемой) поверхности $\Gamma \times t$. Варьированию при этом наряду с функциями u^i и μ^A подвергается и сама поверхность $\Gamma \times t$.

Видно, что вариационное уравнение (4.9) сводится к равенству (7.3), в котором к левой части добавляется слагаемое

$$\int\limits_t\int\limits_\Gamma [K - \Phi]\, \nu_\alpha \delta\zeta^\alpha \, ds\, dt$$

где $\delta\zeta^\alpha$ — вариация функций (7.1), а δu^i и $\delta\mu^A$ означают вариацию вида функций u^i и μ^A.

Будем считать, что на $\Gamma\times t$ непрерывны u^i, $u_{,\alpha}{}^i \equiv \partial u^i / \partial\zeta^\alpha$, μ^A. В этом случае полные вариации

$$\delta_\Pi u^i = \delta u^i + u^i_{,\alpha}\delta\zeta^\alpha, \quad \delta_\Pi u^i_{,\alpha} = \delta u^i_{,\alpha} + \nabla_\beta {}^\circ u^i_{,\alpha}\delta\zeta^\beta, \quad \delta_\Pi\mu^A = \delta\mu^A + \nabla_\alpha {}^\circ\mu^A\delta\zeta^\alpha$$

непрерывны на $\Gamma \times t$

$$[\delta_\Pi u^i] = 0, \qquad [\delta_\Pi u^i_{,\alpha}] = 0, \qquad [\delta_\Pi\mu^A] = 0$$

Полагая сначала $\delta\zeta^\alpha = 0$ (при этом $\delta_\Pi = \delta$), из (7.3) получим равенства (7.5) — (7.7). Для произвольных $\delta\zeta^\alpha$ из (7.3) следуют соотношения, которые при использовании кинематических условий совместности сводятся к следующему энергетическому условию:

$$[\Phi - K] + \left(\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\nu^\alpha c - \gamma m^{\alpha\beta} n_i \nu_\alpha \nu_\beta\right)\omega^i + \left(\frac{\partial K}{\partial \mu^{\cdot A}} c - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\nu^\alpha\right)\omega^A = 0 \qquad (7.10)$$

$$(\omega^i = [\nabla_\beta {}^\circ u^i_{,\alpha}]\,\nu^\alpha\nu^\beta, \; \omega^A = [\nabla_\alpha {}^\circ\mu^A]\,\nu^\alpha)$$

Если производные $\partial u^i / \partial\zeta^\alpha$ на $\Gamma \times t$ разрывны, то вместо (7.6) из (7.3) получим (7.8), а вместо (7.10) — соотношение

$$[\Phi - K] + \left\{\frac{\partial K}{\partial v^i} c + \left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha{}^i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i}\right)\nu_\alpha - \gamma n^{\alpha\beta} x_{i\alpha}\nu_\beta + \gamma q^\beta \nu_\beta n_i - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial K}{\partial v_\alpha{}^i} c - \gamma m^{\alpha\beta}\nu_\beta n_i\right)\tau_\alpha\right\}\theta^i + \left(\frac{\partial K}{\partial\mu^{\cdot A}} c - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_\alpha{}^A}\nu^\alpha\right)\omega^A = 0 \qquad (7.11)$$

$$(\theta^i = [u^i_{,\alpha}]\,\nu^\alpha)$$

Если параметры μ^A также разрывны на $\Gamma \times t$, то условие (7.7) заменится на (7.9), а дополнительное энергетическое соотношение имеет вид (7.10) или (7.11) (для $\theta^i = 0$ или $\theta^i \neq 0$). При этом в силу (7.9) последнее слагаемое в (7.10) обращается в нуль.

8. **Пример. Линейная статика изотропных пластин.** Рассмотрим физически и геометрически линейные модели изотропных пластин, для которых внутренняя энергия ρU имеет вид

$$2\rho U = \lambda\,(\varepsilon_i{}^i)^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} \qquad (8.1)$$

В силу геометрической линейности теории формулы (1.5) и (3.4) упрощаются (в формуле (3.4) малыми следует считать $f - \zeta$, f^α, $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$) и приводят к следующим соотношениям:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \zeta B_{\alpha\beta} + \nabla_{(\alpha} f_{\beta)} \tag{8.2}$$

$$\varepsilon_{0\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta^\alpha}\right), \qquad \varepsilon_{00} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} - 1$$

Соответствующие линеаризованные выражения $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ находятся из (3.5)

$$A_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha} u_{\beta)}, \quad B_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta u_n, \quad u_\alpha = \frac{\partial r_0{}^i}{\partial \zeta^\alpha} u_i, \quad u_n = n_0{}^i u_i \tag{8.3}$$

Примем гипотезу о том, что нормаль к срединной поверхности при деформировании остается нормалью

$$f^\alpha = 0 \tag{8.4}$$

а функция f имеет вид [1]

$$f = (1 + e)\,\zeta + {}^1\!/_2\, \chi \zeta^2 \tag{8.5}$$

Тогда

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \zeta B_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{0\alpha} = \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{\partial e}{\partial \zeta^\alpha} + \frac{1}{2}\zeta \frac{\partial \chi}{\partial \zeta^\alpha}\right), \qquad \varepsilon_{00} = e + \chi\zeta \tag{8.6}$$

Таким образом, параметр e имеет смысл деформации волокна, нормального к срединной поверхности, а χ — градиента деформации волокна.

Для осредненной внутренней энергии получим (толщина пластинки считается постоянной)

$$\begin{aligned} 2\Phi = 2\int_{-h/2}^{h/2} \rho U\, d\zeta = h\{\lambda (A_\alpha{}^\alpha)^2 + 2\mu A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} - 2\lambda A_\alpha{}^\alpha e + (\lambda + 2\mu)\, e^2\} + \\ + \frac{h^3}{12}\{\lambda (B_\alpha{}^\alpha)^2 + 2\mu B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} - 2\lambda B_\alpha{}^\alpha \chi + (\lambda + 2\mu)\,\chi^2\} + \\ + \mu \frac{h^3}{12} a^{\alpha\beta} \frac{\partial e}{\partial \zeta^\alpha}\frac{\partial e}{\partial \zeta^\beta} + \mu \frac{h^5}{90} a^{\alpha\beta}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta^\alpha}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta^\beta} \end{aligned} \tag{8.7}$$

Последние два члена могут быть существенны только на краю пластинки, а вдали от края они имеют порядок h^2 / L^2 по сравнению с $h\,(\lambda + 2\mu)\, e^2$ и $h^3\,(\lambda + 2\mu)\,\chi^2$ соответственно и ими можно пренебречь (L — расстояние, на котором e и χ изменяются на характерное значение).

Растягивающие усилия и моменты определены формулами (5.5)

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= h\,(\lambda A_\sigma{}^\sigma a^{\alpha\beta} + 2\mu A^{\alpha\beta} - \lambda e a^{\alpha\beta}) \\ m^{\alpha\beta} &= \frac{h^3}{12}(\lambda B_\sigma{}^\sigma a^{\alpha\beta} + 2\mu B^{\alpha\beta} - \lambda\chi a^{\alpha\beta}) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Уравнения (5.10), (5.11) принимают вид

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta m^{\alpha\beta} = p_+ + p_- + \frac{h}{2}\nabla_\alpha (p_+{}^\alpha - p_-{}^\alpha) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho F\, d\zeta + \nabla_\alpha \int_{-h/2}^{h/2} \rho F^\alpha \zeta\, d\zeta$$

$$\nabla_\beta n^{\alpha\beta} = -\left(p_+{}^\alpha + p_-{}^\alpha + \int_{-h/2}^{h/2} \rho F^\alpha\, d\zeta\right) \tag{8.9}$$

[1] Следует отметить, что во многих монографиях и статьях гипотезы, приводящие к модели Кирхгоффа, формулируются неверно. А именно, наряду с условием (8.4) принимается предположение, что поперечные волокна не деформируются. В действительности, в случае изгиба пластинки ($A_{\alpha\beta} = 0$, $e = 0$), деформация поперечного волокна, описываемая параметром χ, дает в упругую энергию вклад того же порядка малости, что и деформация срединной поверхности.

Здесь индексами плюс и минус отмечены величины на поверхности $\zeta = h/2$ и $\zeta = -h/2$ соответственно, p — проекция силы, действующей на поверхностях $\zeta = \pm h/2$ на направление нормали к пластинке, p^α — проекция этой же силы на срединную плоскость пластинки, аналогичны обозначения для внешних массовых сил F и F^α.

Уравнения Эйлера (5.9) для параметров e и χ приводят к уравнениям

$$h\left[(\lambda + 2\mu)\, e - \lambda A_\alpha{}^\alpha\right] = \frac{h}{2}(p_+ + p_-) + \int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho F \zeta \, d\zeta$$

$$\frac{h^3}{12}\left[(\lambda + 2\mu)\, \chi - \lambda B_\alpha{}^\alpha\right] = \frac{h^2}{8}(p_+ + p_-) + \frac{1}{2}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \rho F \zeta^2 \, d\zeta \qquad (8.10)$$

Исключая параметры e и χ из системы уравнений (8.8) — (8.10), придем к уравнениям теории пластинок.

Автор благодарит Л. И. Седова за обсуждение работы.

Поступила 20 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
2. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
3. Седов Л. И., Бердичевский В. Л. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.