

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, УСИЛЕННОГО УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян

(Ереван)

Контактные задачи для тел с упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины непосредственно связаны с важными для инженерной практики вопросами передачи нагрузок от накладок упругим телам. Различные плоские задачи исследовались во многих работах. Например, в работе [1] рассматриваются две основные задачи о передаче нагрузки от бесконечной в обоих направлениях накладки к полубесконечной и бесконечной пластине. В качестве основной физической модели принимается модель одномерного упругого континуума накладки.

Впоследствии в рамках физических допущений работы [1] был выполнен ряд работ, посвященных различным обобщениям и модификациям основных задач Мелана. Достаточно полная библиография этих работ содержится в статьях [2,3].

Обоснованию модели одномерного упругого континуума накладки и исследованию некоторых других контактных задач для полуплоскости с упругими накладками посвящены работы [4-7].

В то время как область плоских контактных задач для тел с упругими накладками малой толщины достаточно хорошо разработана, область пространственных контактных задач для тел с упругими накладками малого поперечного сечения почти не исследована, и авторам неизвестны работы в этом направлении, где приводилось бы строгое решение таких задач. В некотором смысле исключение составляет работа [8], которая относится к вопросам определения контактных напряжений на боковой поверхности цилиндрического стержня, вложенного в упругое пространство или полупространство.

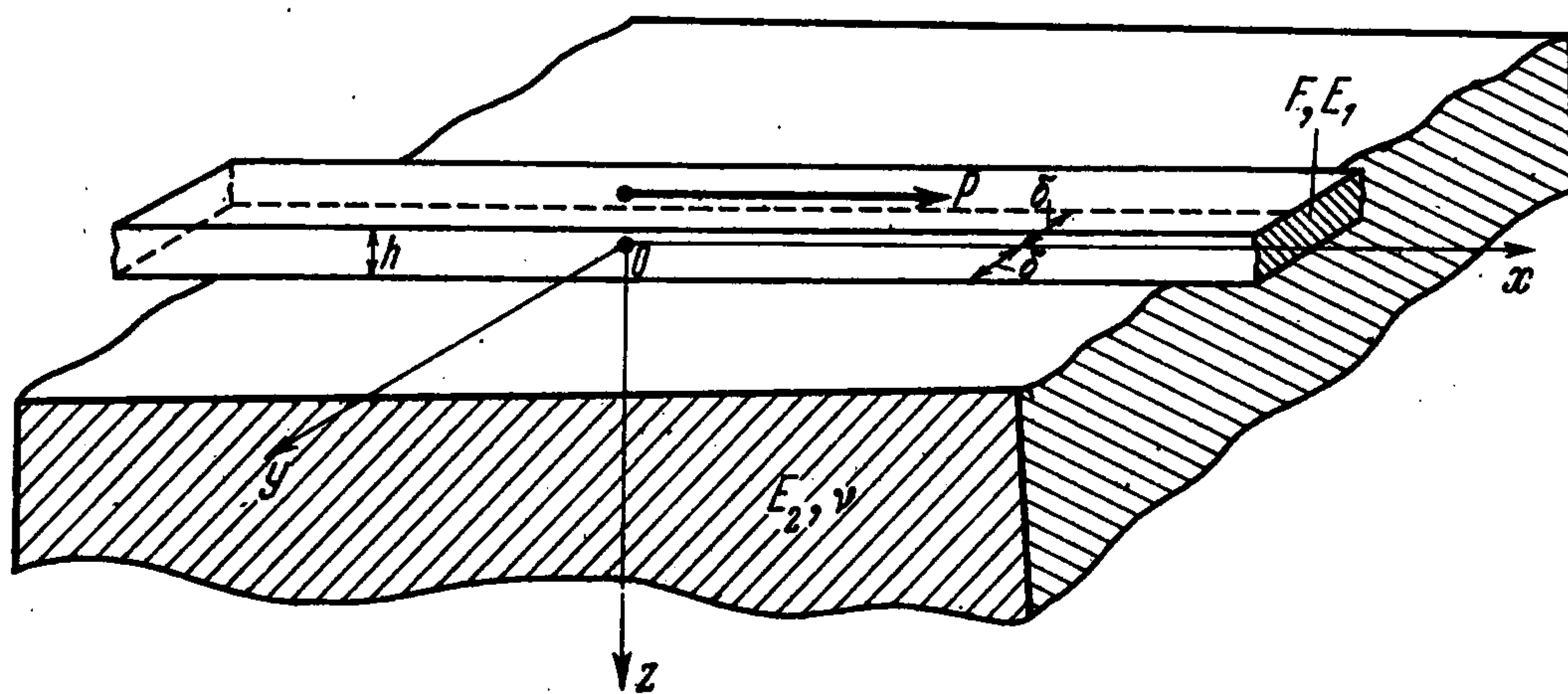
Такое положение вещей в области пространственных задач объясняется тем, что при их решении встречаются значительные математические трудности. Кроме того, при постановке пространственных контактных задач для тел с упругими накладками малого поперечного сечения модель одномерного упругого континуума накладки в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменима. Не вполне соответствует действительности также модель контакта по площади, когда предполагается, что напряжения в зоне контакта в поперечном направлении распределены равномерно.

В данной работе предлагается новый подход, в отличие от случая плоских задач, к постановке пространственных контактных задач для полупространства, усиленного упругими накладками малого поперечного сечения. Затем рассматриваются три типа контактных задач, а именно, задачи, когда упругое полупространство на некоторой части своей границы усилено бесконечно длинной накладкой, полубесконечной накладкой и накладкой конечной длины. В предложенной постановке решение этих задач сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, выражающимися полными эллиптическими интегралами первого и второго родов, при определенных граничных условиях. Предлагается эффективный способ решения этих уравнений.

1. Постановка задач и вывод определяющих уравнений. Пусть упругое полупространство на некоторой части своей граничной плоскости усилено упругой накладкой прямоугольного поперечного сечения бесконеч-

ной длины (фиг. 1). Будем считать, что площадь F поперечного сечения накладки достаточно мала, т. е. толщина h и полуширина δ накладки достаточно малы. Требуется определить закон распределения контактных напряжений в полоске соединения накладки с полупространством, когда в некоторой точке верхней грани накладки действует сосредоточенная сила P , направленная по оси накладки.

Как и в работах [1,4], будем предполагать, что вследствие малости толщины h накладка изгибается пренебрежимо мало, т. е. в области контакта нормальным давлением накладки на полупространство можно пренебречь. Достаточно полное обоснование этого предположения в случае плоских задач приводится в работе [7].



Фиг. 1

Далее будем предполагать, что полуширина δ настолько мала, что в зоне контакта можно пренебречь тангенциальными напряжениями τ_{yz} .

Из этих предположений следует, что в полоске соединения накладки с полупространством действуют только тангенциальные контактные напряжения $\tau_{xz}(x, y)$. Если принять модель контакта по линии и предположить, что эти напряжения сосредоточены вдоль средней линии полоски контакта, т. е. вдоль оси абсцисс, и приложены к полупространству, то можно прийти к следующему выводу. Как известно [9], перемещения вдоль оси Ox граничной точки полупространства с координатами (x, y) от сосредоточенной в начале координат силы Q , направленной по той же оси, даются формулой

$$u(x, y) = \frac{(1 - \nu^2) Q}{\pi E_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (1.1)$$

где E_2 — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона материала полупространства. В частности, для точек, расположенных на оси абсцисс, будем иметь

$$u(x, 0) = \frac{(1 + \nu) Q}{\pi E_2} \frac{1}{|x|}$$

В случае распределенной по некоторому отрезку $[a, b]$ оси Ox нагрузки интенсивности $q(x)$ получим

$$u(x, 0) = \frac{1 + \nu}{\pi E_2} \int_a^b \frac{q(s) ds}{|x - s|}$$

Однако этот интеграл в точке $s = x$ не сходится ни в обычном смысле сходимости несобственных интегралов, ни в смысле главного значения по Коши.

Затруднение со сходимостью интеграла, вызванное принятием модели контакта по линии, показывает, что в случае обсуждаемой задачи эта модель неприменима.

Предположим теперь, что напряжения $\tau_{xz}(x, y)$ во всей полоске контакта $-\infty < x < \infty$, $-\delta < y < \delta$ распределены по поперечному направлению равномерно, т. е. предположим, что имеет место модель контакта по площади. Тогда $\tau_{xz}(x, y) = \tau_{xz}(x)$ и на основании (1.1) будем иметь

$$u(x, 0) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-s) \tau_{xz}(s) ds \quad (1.2)$$

$$h(x) = \ln \frac{1}{|x|} + \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 + x^2}) + \\ + \frac{\nu}{1-\nu} \left[1 - \frac{x^2}{\sqrt{\delta^2 + x^2}(\delta + \sqrt{\delta^2 + x^2})} \right] \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.3)$$

Последние формулы показывают, что если ввести предположение о равномерности распределения контактных тангенциальных напряжений в поперечном направлении, то тогда перемещения точек средней линии полоски контакта по той же линии будут вполне определенными величинами. Это предположение будет иметь место в том случае, когда накладка в поперечном направлении частично скреплена с полупространством. А именно, когда основание накладки скреплено с полупространством лишь по полоске $|y| < \delta_1$ ($\delta_1 < \delta$), так что части $\delta_1 < |y| < \delta$ основания накладки свободны от контактных напряжений; величины $\tau_{xz}(x, y)$ являются конечными. Вследствие непрерывности изменения этих величин и малости ширины области контакта можно считать, что контактные напряжения $\tau_{xz}(x, y)$ в поперечном направлении распределены равномерно.

Это предположение не будет иметь места в том случае, когда основание накладки полностью скреплено с полупространством, поскольку контактные напряжения $\tau_{xz}(x, y)$ при $y = \pm \delta$ обращаются в бесконечность. Иными словами, линии $y = \pm \delta$ являются особыми линиями для напряжений $\tau_{xz}(x, y)$. Чтобы выявить точный вид особенностей этих напряжений на линиях $y = \pm \delta$, поступим следующим образом. Перемещения граничных точек упругого полупространства вдоль оси Ox от распределенных по области контакта $-\infty < x < \infty$, $-\delta < y < \delta$ напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ даются согласно (1.1), формулой

$$u(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E_2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} \right\} \tau_{xz}(\xi, \eta) d\eta$$

Применив преобразование Фурье по переменной x к обеим частям этого равенства, получим

$$\bar{u}(\lambda, y) = \frac{2(1+\nu)}{\pi E_2} \int_{-\delta}^{\delta} K_0(\lambda|y-\eta|) - \nu\lambda|y-\eta| K_1(\lambda|y-\eta|) \bar{\tau}_{xz}(\lambda, \eta) d\eta \quad (1.4)$$

$$\bar{u}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\lambda x} dx, \quad \bar{\tau}_{xz}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xz}(x, y) e^{i\lambda x} dx$$

а $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — известные функции Макдональда. Приняв во внимание выражения последних функций в виде рядов, можем записать

$$K_0(\lambda|y-\eta|) - \nu\lambda|y-\eta| K_1(\lambda|y-\eta|) = \\ = \ln|y-\eta|^{-1} + R(|y-\eta|)$$

где $R(x)$ ($-\infty < x < \infty$) — определенная непрерывная функция.

Такое представление ядра, фигурирующего в соотношении (1.4), позволяет утверждать, что особенности функции $\tau_{xz}(x, y)$ на линиях $y = \pm \delta$ будут типа квадратного корня, как и в случае классической контактной задачи о вдавливании штампа в упругую полуплоскость без учета сил трения.

Этот факт можно доказать непосредственно, опираясь, как это сделано в работах [6,7], на результаты из [10] о поведении интеграла типа Коши на концах линии интегрирования.

Приведенные рассуждения наводят на мысль, что в полоске соединения накладки с упругим полупространством распределение контактных напряжений в поперечном направлении можно считать таким же, какое получается на основании решения указанной плоской контактной задачи. Это допущение принимается также в задаче о вдавливании узкой балки в упругое полупространство [11]. Оно аналогично предположению, на котором построена теория узкого крыла конечного размаха.

Итак, вместо предположения о равномерности распределения контактных напряжений $\tau_{xz}(x, y)$ в поперечном направлении примем, что закон распределения этих напряжений дается формулой

$$\tau_{xz}(x, y) = \tau(x) / (\pi \sqrt{\delta^2 - y^2}) \quad (1.5)$$

где $\tau(x)$ — напряжение на единицу длины накладки, подлежащее определению.

Далее будем предполагать, что в любом поперечном сечении накладки осевые напряжения $\sigma_x^{(1)}$ распределены по площади сечения равномерно. Кроме того, будем считать, что контактные напряжения под накладкой сосредоточены вдоль средней линии полоски контакта.

Таким образом, предположения сводятся к тому, что имеет место модель одномерного упругого континуума накладки в сочетании с моделью контакта по площади для полупространства, когда закон распределения контактных напряжений дается формулой (1.5).

Приступим теперь к выводу основных разрешающих уравнений. С этой целью рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента накладки, заключенного между плоскостями x и $x + dx$. На основании сделанных предположений можем записать

$$F \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} - \int_{-\delta}^{\delta} \tau_{xz}(x, y) dy + P\delta(x) = 0$$

где $\tau_{xz}(x, y)$ — неизвестные контактные напряжения, действующие в полоске соединения накладки с полупространством и приложенные к накладке, а $\delta(x)$ — известная функция Дирака. Приняв во внимание формулу (1.5) и закон Гука, будем иметь

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} = \frac{\tau(x) - P\delta(x)}{FE_1} \quad (1.6)$$

где E_1 — модуль упругости материала накладки, $u^{(1)}(x)$ — перемещения точек средней линии основания накладки вдоль той же оси.

С другой стороны, перемещения $u^{(2)}(x, 0)$ граничных точек упругого полупространства, лежащих на средней линии области контакта, происходящие вдоль той же линии от контактных напряжений $\tau_{xz}(x, y)$, приложенных к полупространству, согласно (1.1), будут

$$u^{(2)}(x, 0) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E_2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}} \left[1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{(x - \xi)^2}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \right] \tau_{xz}(\xi, \eta) d\eta$$

Учитывая (1.5), после некоторых преобразований получим

$$u^{(2)}(x, 0) = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi^2 E_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k_1(x - s) + \frac{\nu}{1 - \nu} l_1(x - s) \right] \tau(s) ds \quad (1.7)$$

$$k_1(x) = \int_0^{\delta} \frac{d\eta}{\sqrt{(x^2 + \eta^2)(\delta^2 - \eta^2)}} = \frac{1}{|x|} K\left(\frac{i\delta}{|x|}\right)$$

$$l_1(x) = x^2 \int_0^{\delta} \frac{d\eta}{(x^2 + \eta^2)^{3/2} \sqrt{\delta^2 - \eta^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода от модуля k . Очевидно, что

$$l_1(x) = -x \frac{dk_1(x)}{dx} \quad (1.8)$$

то после элементарных выкладок найдем

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} K\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}\right)$$

При помощи (1.8) по формуле дифференцирования функции $K(k)$ [12] получим

$$l_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} E\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}\right), \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx \quad (1.9)$$

где $E_{(k)}$ — полный эллиптический интеграл второго рода от модуля k .

На средней линии области контакта должно выполняться условие

$$u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x, 0)$$

которое в сочетании с (1.6) сводит задачу определения неизвестного контактного напряжения $\tau(x)$ к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k(x-s) + \frac{\nu}{1-\nu} l(x-s) \right] \tau(s) ds = \mu^2 [\tau(x) - P\delta(x)] \quad (1.10)$$

$$\mu^2 = \pi^2 E_2 [4(1-\nu^2)hE_1]^{-1}$$

$$k(x) = \delta k_1(x), \quad l(x) = \delta l_1(x)$$

причем, согласно (1.8) и (1.9)

$$k(x) = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} K\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}\right), \quad l(x) = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} E\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}\right) \quad (1.11)$$

Далее, из условия равновесия накладки находим, что решение интегро-дифференциального уравнения (1.10) должно удовлетворять соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) dx = P$$

Таким образом, решение контактной задачи для полупространства, усиленного упругой бесконечной накладкой малого поперечного сечения, при сделанных выше физических и геометрических предположениях сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.10) с ядром, выражающимся формулами (1.11). Очевидно, что это интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k(x-s) + \frac{\nu}{1-\nu} l(x-s) \right] \varphi'(s) ds = \mu^2 \varphi(x) - \mu^2 P H(x) \quad (1.12)$$

где $H(x)$ — известная функция Хевисайда

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \tau(s) ds$$

Последняя запись интегро-дифференциального уравнения (1.10) роднит его по виду с аналогичными уравнениями, встречающимися в плоских контактных задачах для тел с упругими накладками, в частности с уравнениями основных задач Мелана.

Обращаясь к случаю полубесконечной накладки (фиг. 2), совершенно аналогичным образом найдем, что решение соответствующей контактной задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} \left[k(x-s) + \frac{\nu}{1-\nu} l(x-s) \right] \tau(s) ds = \mu^2 \tau(x) \quad (1.13)$$

при условии

$$\int_0^{\infty} \tau(x) dx = P \quad (1.14)$$

Уравнение (1.13) вместе с условием (1.14) эквивалентно интегродифференциальному уравнению

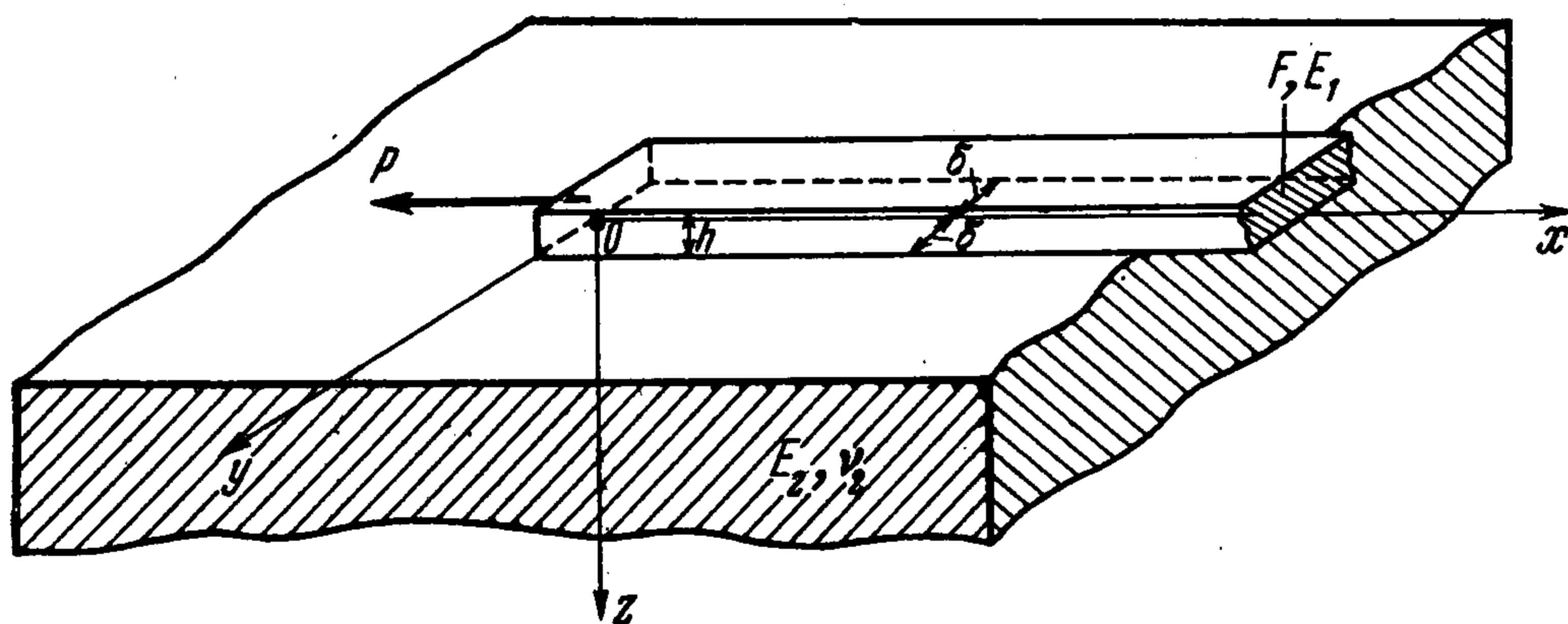
$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \left[k(x-s) + \frac{\nu}{1-\nu} l(x-s) \right] \varphi'(s) ds = \mu^2 \varphi(x) \quad (1.15)$$

при граничных условиях

$$\varphi(0) = P, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (1.16)$$

$$\varphi(x) = P - \int_0^x \tau(s) ds$$

где $\tau(x)$ — неизвестное контактное напряжение, действующее в полоске соединения полубесконечной накладки с упругим полупространством.



Фиг. 2

Наконец, решение контактной задачи для полупространства, усиленного на своей границе упругой накладкой конечной длины и малого поперечного сечения (фиг. 3), сводится к решению интегродифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \int_{-a}^a \left[k(x-s) + \frac{\nu}{1-\nu} l(x-s) \right] \varphi'(s) ds = \mu^2 \varphi(x) \quad (1.17)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \quad \varphi(a) = P \quad (1.18)$$

$$\varphi(x) = \int_{-a}^x \tau(s) ds$$

где $\tau(x)$ — неизвестное контактное напряжение под упругой накладкой.

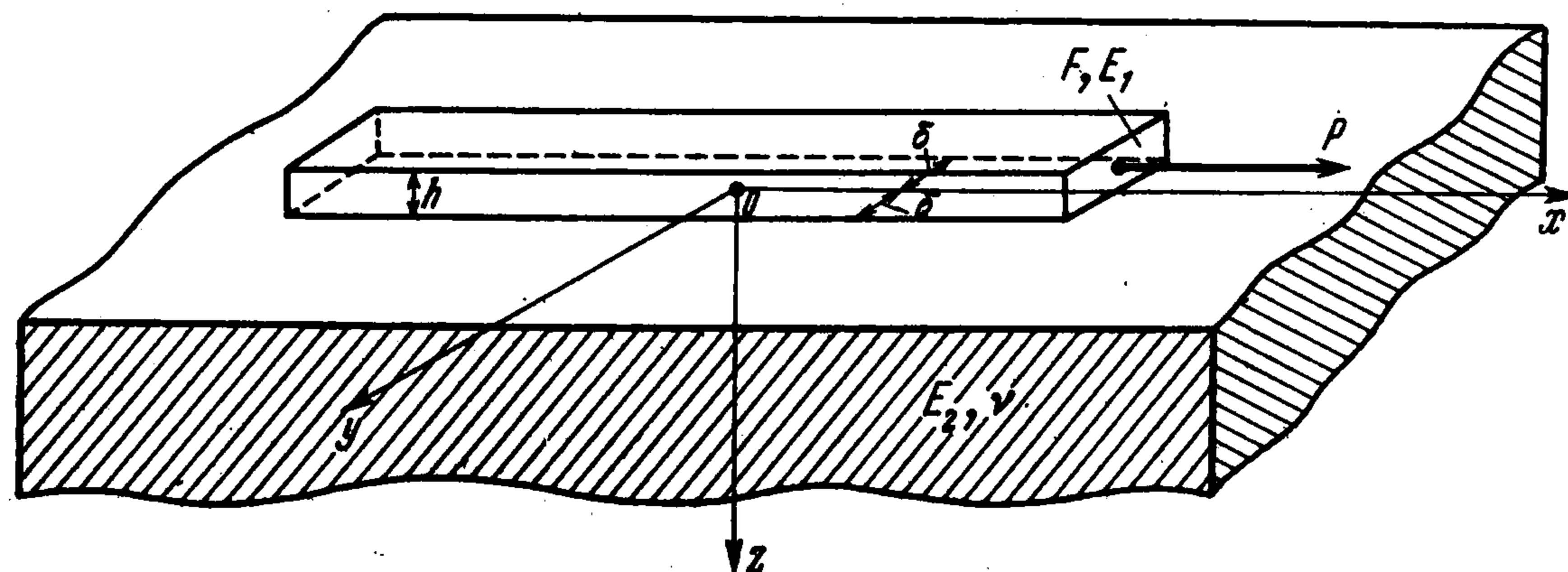
Очевидно, что решение поставленных задач при предположении о равномерности распределения контактных напряжений в поперечном направлении накладки сводится, на основании (1.2), к тем же самым уравнениям, но только с ядрами в виде функции $h(x)$ из (1.3). Однако на этих уравнениях в данной работе останавливаться не будем.

Займемся теперь исследованием структуры ядра указанных интегро-дифференциальных уравнений. Легко видеть, что при $k = 1$ полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ обращается в бесконечность и, следовательно, функция $k(x)$ из (1.11) при $x = 0$ имеет особенность. Выясним вид этой особенности. Согласно (1.8) и (1.11), функция $k(x)$ при $x = 0$ имеет логарифмическую особенность. Представим эту функцию в виде

$$k(x) = \ln \frac{1}{|x|} + r(x) \tag{1.19}$$

$$r(x) = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} K\left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}\right) - \ln \frac{1}{|x|} \tag{1.20}$$

где функция $r(x)$ на основании только что сказанного, непрерывна и имеет непрерывные производные, по крайней мере, до второго порядка включительно на всей вещественной оси.



Фиг. 3

Что касается функции $l(x)$, выражающейся второй из формул (1.11), то она непрерывна на всей вещественной оси и ее значения заполняют отрезок $[0, 1]$.

Далее имеем

$$k(x) + \frac{\nu}{1 - \nu} l(x) = k(x) \left[1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{l(x)}{k(x)} \right]$$

Очевидно, что $l(0)/k(0) = 0$ и что при любом $x \neq 0$ можно выбрать δ настолько малым и притом не зависящим от данного x , чтобы функция $l(x)/k(x)$ при всех $x \neq 0$ была сколь угодно близка к единице. Тогда со сколь угодно большой точностью можно положить

$$k(x) + \frac{\nu}{1 - \nu} l(x) = k(x) \chi(x)$$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 1 / 1 - \nu & (x \neq 0) \end{cases}$$

если только δ достаточно мало. Иными словами, для достаточно узкой накладки это равенство сколь угодно мало отличается от истинного.

Отметим, что этот результат можно получить сразу, если в выражении функции влияния (1.1) для достаточно малых δ положить

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

Изложенное исследование ядра позволяет интегро-дифференциальные уравнения (1.10), (1.13) при условии (1.14), и (1.17) при граничных условиях (1.18), полученные для определения контактных напряжений под бесконечной, полубесконечной и конечной накладками достаточно малой ширины, заменить соответственно интегро-дифференциальными урав-

нениями

$$1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s) \tau(s) ds = c^2 [\tau(x) - P\delta(x)] \quad (1.10')$$

$$2) \quad \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} k(x-s) \tau(s) ds = c^2 \tau(x) \quad (1.13')$$

при условии

$$\int_0^{\infty} \tau(x) dx = P \quad (1.14')$$

$$3) \quad \frac{d}{dx} \int_{-a}^a k(x-s) \varphi'(s) ds = c^2 \varphi(x) \quad (1.17')$$

при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \quad \varphi(a) = P \quad (1.18')$$

Здесь

$$c^2 = \mu^2(1-\nu) = \pi^2 E_2 [4(1+\nu) h E_1]^{-1}$$

Могут быть получены также аналогичные уравнения, соответствующие в указанном смысле интегро-дифференциальным уравнениям (1.12) и (1.15) при граничных условиях (1.16). Если в этих последних уравнениях и в уравнении (1.17') знак производной ввести под знак интеграла и принять во внимание вид функции $k(x)$, то получатся интегро-дифференциальные уравнения аналогичной структуры с соответствующими уравнениями для плоских контактных задач. Различие состоит только в том, что в рассматриваемых нами случаях ядро уравнений состоит из ядра Коши и некоторой непрерывной функции, учитывающей эффект пространственности рассматриваемых задач.

Отметим, что ядро $k(x-s)$, порожденное функцией $k(x)$, при $-a < x, s < a$ является сингулярным ядром. Исследование этого ядра содержится в [11].

Отметим еще, что граничные условия (1.18), а также условие (1.14) выражают тот факт, что приложенные к накладкам нагрузки полностью передаются основанию без сосредоточенных компонентов. Это можно доказать способом, совершенно аналогичным указанному в работе [3].

2. Случай бесконечной накладки. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10') легко получить при помощи преобразования Фурье. Выполнив это преобразование, придем к алгебраическому уравнению

$$[c^2 + \lambda^2 K(\lambda)] T(\lambda) = -c^2 P$$

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{i\lambda x} dx, \quad T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{i\lambda x} dx \quad (2.1)$$

Отсюда

$$\tau(x) = -\frac{c^2 P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x d\lambda}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)} \quad (2.2)$$

Пользуясь известными соотношениями ([12], стр. 443, формула 3.773.6; стр. 716, формула 6.592.7), находим

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \pi I_0(1/2\lambda\delta) K_0(1/2\lambda\delta) \quad (\lambda > 0) \\ K(-\lambda) &= K(\lambda) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. Для функций $I_0(x)$ и $K_0(x)$ при больших положительных значениях аргумента x справедливы следующие асимптотические формулы [12]:

$$I_0(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x, \quad K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (2.4)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f(\lambda) = c^2 + \lambda^2 K(\lambda)$$

Очевидно, что эта функция непрерывна на всей вещественной оси и строго положительна и притом $f(0) = c^2$. Кроме того, согласно формулам (2.3)

$$f(\lambda) \approx c^2 + \pi\lambda/\delta \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (2.5)$$

Введем функцию $H(\lambda)$, связанную с $f(\lambda)$ соотношением

$$H(\lambda) = \frac{c^2 + \pi\lambda/\delta}{f(\lambda)} - 1 = \frac{c^2 + \pi\lambda/\delta}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)} - 1$$

причем

$$H(0) = H(\infty) = 0 \quad (2.6)$$

Обращаясь теперь к формуле (2.2), представим ее в виде

$$\tau(x) = -\frac{c^2 P}{\pi} \int_0^\infty \frac{H(\lambda) \cos \lambda x}{c^2 + \pi\lambda/\delta} d\lambda - \frac{c^2 P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x d\lambda}{c^2 + \pi\lambda/\delta}$$

Второй интеграл, входящий в последнее равенство, выражается формулой

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x d\lambda}{c^2 + \pi\lambda/\delta} = -(\cos qx \operatorname{Ci} qx + \sin qx \operatorname{Si} qx)$$

$$(q = \delta c^2 / \pi)$$

где $\operatorname{Si}(x)$, $\operatorname{Ci}(x)$ — интегральные синус и косинус функции x . Тогда будем иметь

$$\tau(x) = -\frac{c^2 P}{\pi} \int_0^\infty \frac{H(\lambda) \cos \lambda x}{c^2 + \pi\lambda/\delta} d\lambda + \frac{c^2 \delta P}{\pi} (\cos qx \operatorname{Ci} qx + \sin qx \operatorname{Si} qx) \quad (2.7)$$

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что при $x \rightarrow \infty$ интеграл в (2.7) довольно быстро стремится к нулю и, следовательно, поведение контактных напряжений под накладкой при больших x полностью определяется вто-

рым членом этой формулы. Этот член, т. е. функция

$$p(x) = \frac{c^2 \delta P}{\pi^2} (\cos qx \operatorname{Ci} qx + \sin qx \operatorname{Si} qx) \quad (2.8)$$

является с точностью до множителя q известным решением Мелана [1].

Таким образом, контактные напряжения под бесконечной накладкой при больших x убывают по закону функции Мелана (2.8).

С другой стороны, очевидно, что $\tau(0) = \infty$.

3. Случай полубесконечной накладки. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.13') при условии (1.14') можно построить известным методом, развитым в [13, 14]. Следуя этому методу, положим $\tau(x) \equiv 0$ при $-\infty < x < 0$ и введем в рассмотрение функцию

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s) \tau(s) ds \quad (3.1)$$

Далее, используя известное свойство свертки, придадим интегро-дифференциальному уравнению (1.13') при условии (1.14') вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{c^2 P + i\lambda u(0) - [c^2 + \lambda^2 K(\lambda)] T(\lambda)\} e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

где $K(\lambda)$ определяется формулой (2.3).

$$T(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{i\lambda x} dx \quad (3.2)$$

Условие же $\tau(x) = 0$ при $-\infty < x < 0$ можем записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = 0 \quad (-\infty < x < 0)$$

Тогда на основании [14] существуют функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскости, исчезающие на бесконечности и соответственно равные на вещественной оси

$$\begin{aligned} \Phi_+(\lambda + i0) &= T(\lambda) \\ \Phi_-(\lambda - i0) &= -[c^2 + \lambda^2 K(\lambda)] T(\lambda) + c^2 P + i\lambda u(0) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi_+(\lambda + i0) = -\frac{\Phi_-(\lambda - i0)}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)} + \frac{c^2 P + i\lambda u(0)}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)} \quad (3.3)$$

$(-\infty < \lambda < \infty)$

причем, согласно (1.14'), из (3.2) имеем

$$\Phi_+(0 + i0) = P \quad (3.4)$$

Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение (1.13') при условии (1.14') эквивалентно граничной задаче Римана (3.3) для полуплоскости при условии (3.4).

Если известно решение этой задачи, т. е. найдены две функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, обладающие указанными выше свойствами, то решение уравнения (1.13') при условии (1.14') будет определяться формулой

$$\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(\lambda + i0) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (3.5)$$

Поскольку функция $c^2 + \lambda^2 K(\lambda)$ на вещественной оси строго положительна и четна, индекс задачи Римана (3.3) равен нулю. Следовательно, эта задача имеет единственное решение, причем функция $\Phi_+(\lambda + i0)$, согласно [14], выражается формулой

$$\begin{aligned} \Phi_+(\lambda + i0) &= \frac{c^2 P + i\lambda u(0)}{2[c^2 + \lambda^2 K(\lambda)]} + \\ &+ \frac{H(\lambda)}{2\pi i [c^2 + \lambda^2 K(\lambda)]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c^2 P + it u(0)}{H(t)(t - \lambda)} dt \quad (-\infty < \lambda < \infty) \end{aligned}$$

$$H(\lambda) = \sqrt{W(\lambda)} \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W(t) dt}{t - \lambda} \right]$$

$$W(\lambda) = -[c^2 + \lambda^2 K(\lambda)]$$

Входящие сюда интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши. Подставив выражение функции $\Phi_+(\lambda + i0)$ в формулу (3.5), получим контактные напряжения $\tau(x)$ под полубесконечной накладкой, после чего постоянная $u(0)$ может быть определена из соотношения (3.1).

Следует отметить, что полученное выражение $\Phi_+(\lambda + i0)$ имеет сложную структуру. С другой стороны, задача эффективной точной факторизации функции $c^2 + \lambda^2 K(\lambda)$ на вещественной оси связана с большими трудностями. Поэтому с практической точки зрения удобно иметь приближенную факторизацию этой функции. Здесь будет предложен способ приближенной факторизации указанной функции, основанный на сведении задачи Римана (3.3) при условии (3.4) к бесконечной системе линейных уравнений.

С этой целью (3.3) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_+(\lambda + i0) - \Phi_-(\lambda - i0) &= -R(\lambda)\Phi_-(\lambda - i0) + g(\lambda) \\ &(-\infty < \lambda < \infty) \\ R(\lambda) &= \frac{1 + c^2 + \lambda^2 K\lambda}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)}, \quad g(\lambda) = \frac{c^2 P + i\lambda u(0)}{c^2 + \lambda^2 K(\lambda)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)\Phi_-(s - i0) ds}{s - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s) ds}{s - z}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_+(z), & \text{Im } z > 0 \\ \Phi_-(z), & \text{Im } z < 0 \end{cases}$$

где $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$ — упомянутые выше функции.

Пользуясь известными формулами Сохоцкого — Племеля, находим

$$\Phi_-(\lambda - i0) = \frac{1}{2} R(\lambda) \Phi_-(\lambda - i0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s) \Phi_-(s - i0) ds}{s - \lambda} + G(\lambda) \quad (3.7)$$

$$G(\lambda) = -\frac{1}{2} g(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s) ds}{s - \lambda} \quad (3.8)$$

— известная функция.

Таким образом, задача Римана (3.3) вместе с (3.4) эквивалентна сингулярному интегральному уравнению (3.7) относительно $\Phi_-(\lambda - i0)$, к которому следует добавить вытекающее из (3.4) условие

$$\Phi_-(0 - i0) = 0 \quad (3.9)$$

После того как будет определена функция $\Phi_-(\lambda - i0)$ из (3.7), функция $\Phi_+(\lambda + i0)$ может быть определена из (3.3).

Далее перейдем к новым переменным, положив

$$\lambda = \operatorname{tg} t / 2, \quad s = \operatorname{tg} u / 2 \quad (-\pi < t, u < \pi) \quad (3.10)$$

Пропустив промежуточные элементарные выкладки, запишем окончательный вид уравнения (3.7)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} Q(t) \varphi(t) - \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{u-t}{2} \varphi(u) du + h(t) - A \quad (3.11)$$

где

$$\varphi(t) = \Phi_-(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t - i0), \quad Q(t) = R(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t)$$

$$h(t) = G\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right), \quad A = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \varphi\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) du$$

Условие (1.16) при этом переходит в следующее:

$$\varphi(0) = 0 \quad (3.12)$$

Итак, сингулярное интегральное уравнение (3.7) с ядром Коши при условии (3.9) свелось к сингулярному интегральному уравнению (3.11) с ядром Гильберта при условии (3.12). Отметим, что, согласно первой из формул (3.6)

$$Q(t) = \frac{1 + c^2 + \operatorname{tg}^2 t / 2K(\operatorname{tg} t / 2)}{c^2 + \operatorname{tg}^2 t / 2K(\operatorname{tg} t / 2)} \quad (3.13)$$

Решение интегрального уравнения (3.11) будем искать в виде ряда Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m e^{imt} \quad (-\pi < t < \pi)$$

Одновременно положим

$$Q(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m e^{imt}, \quad h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m e^{imt} \quad (-\pi < t < \pi)$$

Приняв во внимание известные формулы Гильберта

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{u-t}{2} e^{iku} du = \operatorname{sign} k e^{ikt} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

из (3.11) получим

$$\begin{aligned} \varphi_m &= h_m \quad (m = 1, 2, \dots) \\ \varphi_0 &= \frac{1}{2}\psi_0 + h_0 - A \\ \varphi_m &= \psi_m + h_m \quad (m = -1, -2, \dots) \\ \psi(t) = Q(t)\varphi(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m e^{imt} \quad (-\pi < t < \pi) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\psi_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{k-m} \varphi_m \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Теперь, учитывая (3.8), находим $h_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots$). Следовательно

$$\varphi_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{k-m} \varphi_m + h_m \quad (m = -1, -2, \dots) \quad (3.14)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m \varphi_m + h_0 - A$$

Кроме того, согласно (3.12)

$$\sum_{m=-\infty}^0 \varphi_m = 0 \quad (3.15)$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов $\{\varphi_m\}_{m=-\infty}^0$ получилась бесконечная система линейных уравнений (3.14), представляющая дискретный аналог интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Теория таких уравнений развита в известной работе [13].

Следует отметить, что этот результат можно было предвидеть заранее, если учесть, что преобразование (3.10) задачу факторизации некоторой функции на вещественной оси сводит к задаче факторизации соответствующей функции на единичной окружности.

После некоторых преобразований формулы (3.14) и (3.15) можно представить в виде

$$\varphi_k^* = -\frac{1}{Q_0} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{k-m} \varphi_m^* + h_k^* \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

$$\varphi_0^* = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \varphi_m^* + h_0^* - A, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^* = 0 \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^* &= \varphi_{-k}, & h_k^* &= -(h_{-k} + Q_k \varphi_0^*) Q_0^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \\ \varphi_0^* &= \varphi_0, & h_0^* &= h_0 \end{aligned}$$

Кроме того, в формуле (3.16) штрих справа от знака суммы означает, что в этой сумме пропускается член с индексом $m = k$.

Исследуем вопрос регулярности бесконечной системы (3.16). С этой целью составим суммы

$$S_k = |Q_0|^{-1} \sum'_{m=1}^{\infty} |Q_{k-m}| = |Q_0|^{-1} \sum'_{p=1-k}^{\infty} |Q_p| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

причем в последней сумме пропускается член с нулевым индексом. Легко видеть, что

$$S_k \leq |Q_0|^{-1} \sum'_{p=-\infty}^{\infty} |Q_p| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Заметим, что согласно (3.13)

$$Q_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t) \cos pt \, dt \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$P(t) = [c^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} t K(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t)]^{-1}$$

По известной теореме Бохнера — Хинчина функция $[c^2 + \lambda^2 K(\lambda)]^{-1}$ на вещественной оси является положительно определенной функцией. Следовательно, функция $P(t)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ является положительно определенной функцией, вследствие чего ее коэффициенты Фурье неотрицательны. Сказанное позволяет утверждать, что

$$S_k \leq (P(0) - Q_0) Q_0^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Потребуем, чтобы $P(0)/Q_0 < 2$ или

$$c^2 Q_0 > 1/2 \quad (3.18)$$

При выполнении условия (3.18) бесконечная система (3.16) вполне регулярна и, следовательно, ее решение можно найти методом редукции или последовательных приближений. После того как найдены коэффициенты $\{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$, коэффициенты φ_0^* и A могут быть определены из (3.17).

Покажем, что при достаточно больших c^2 условие (3.18) выполняется. Действительно

$$c^2 Q_0 = \frac{c^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{c^2 + \operatorname{tg}^2 t / 2 K(\operatorname{tg} t / 2)} > \frac{c^2}{\pi} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{dt}{c^2 + \operatorname{tg}^2 K(\operatorname{tg} t / 2)}$$

где ε — малое положительное число, лежащее в интервале $(0, \pi/2)$. Далее, введем обозначение

$$M = \max_{0 \leq t \leq \pi-\varepsilon} \left[c^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} K\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right) \right]$$

Тогда

$$c^2 Q_0 > \frac{c^2}{\pi} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{dt}{c^2 + M} = \frac{c^2}{c^2 + M} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

Отсюда следует, что при достаточно больших c^2 и достаточно малых ε указанное условие будет выполняться.

Отметим, что, когда $c^2 = 0$, интегро-дифференциальное уравнение (1.13') или же уравнение (1.15) описывает соответствующую контактную задачу для абсолютно жесткой полубесконечной накладке, т. е. для по-

лубесконечного штампа. В этом случае условие (3.18) не будет иметь места, и, следовательно, эта задача требует отдельного исследования.

4. **Случай конечной накладки.** Обратимся теперь к решению интегро-дифференциального уравнения (1.17') при граничных условиях (1.18'). Пользуясь (1.19) после некоторых преобразований придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} + V(x-s) \right] \varphi'(s) ds = ac^2 \varphi(x) \quad (4.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = P \quad (4.2)$$

где, согласно (1.20)

$$V(x) = \frac{dr(ax)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + a^2 x^2}} K \left(\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + a^2 x^2}} \right) \right] + \frac{1}{x} \quad (-1 < x < 1)$$

Здесь

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \tau^*(s) ds, \quad \tau^*(x) = a\tau(ax) \quad (-1 < x < 1)$$

причем контактное напряжение под накладкой теперь будет определяться формулой

$$\tau(x) = (1/a) \varphi'(x/a) \quad (-a < x < a)$$

Следуя работе [6], положим

$$\varphi'(x) = \frac{x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлены Чебышева первого рода. Далее, поступив совершенно аналогично изложенному в [6], покажем, что решение интегро-дифференциального уравнения (4.1) при граничных условиях (4.2) сводится к решению следующей бесконечной системы относительно коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_m = \frac{2P}{\pi^3} a_m - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} [K_{m,n}^{(1)} + K_{m,n}^{(2)}] x_n \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

$$a_m = \int_0^{\pi} [ac^2(\pi - t) - \vartheta_0(t)] \sin mt \sin t dt \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{c^2}{n} \int_0^{\pi} \sin nt \sin mt \sin t dt \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$K_{m,n}^{(2)} = \int_0^{\pi} \vartheta_n(t) \sin mt \sin t dt$$

$$\vartheta_n(t) = \int_0^{\pi} V(\cos t - \cos u) \cos nu du \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Исследование бесконечной системы (4.3) в случае только одного ядра $K_{m,n}^{(1)}$ содержится в работе [6]. Покажем, что добавление к этому ядру нового ядра $K_{m,n}^{(2)}$ не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполной регулярности.

Действительно, на основании сказанного в п. 1 относительно свойств функции $r(x)$ можем записать

$$K_{m,n}^{(2)} = -\frac{1}{n} d_{m,n} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$d_{m,n} = \int_0^\pi \int_0^\pi d(u, t) \sin t \sin mt \sin nu \, du \, dt$$

$$d(u, t) = \frac{d}{du} [V(\cos t - \cos u)]$$

Следовательно

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(2)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |d_{m,n}|$$

Заметим, что коэффициенты $\{d_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье непрерывной от двух переменных функций $d(u, t) \sin t$ по полной ортогональной в квадрате $0 < t, u < \pi$ системе функций $\{\sin nu \sin mt\}_{m,n=1}^{\infty}$. Тогда в силу неравенства Бесселя следующий двойной ряд сходится

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |d_{m,n}|^2$$

Следовательно, сходится и ряд [15]

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_m, \quad D_m = \sum_{n=1}^{\infty} |d_{m,n}|^2$$

т. е. по крайней мере

$$D_m = O(m^{-(1+\varepsilon)}) \quad m \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

где ε — малое положительное число.

Таким образом

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |d_{m,n}| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отсюда при помощи неравенства Коши — Буняковского получим

$$S_m \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |d_{m,n}|^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{D_m}$$

Приняв во внимание (4.4), будем иметь

$$S_m = O(m^{-(1+\varepsilon)/2}) \quad m \rightarrow \infty$$

что и доказывает высказанное выше утверждение.

Поступила 10 VIII 1972

Институт механики
АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr-Arch., 1932, Bd 3, Nr 2, S 123—129.
2. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., сер. Е, 1967, т. 34, № 3, стр. 233—242.
3. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., сер. Е, 1968, т. 35, № 4, стр. 124—135.
4. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
6. Arutunyan N. K., Mkhitarjan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters.— Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
7. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. 25, № 2.
8. Muki R., Sternberg E. Elastostatic Load — Transfer to a half — space from a partially embedded axially loaded rod. Internat. J. Solids and Struct., 1970, vol. 6, № 1, p. 69—90.
9. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3. М., «Наука», 1963.
11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.
13. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5.
14. Рапопорт И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 8.
15. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. I, М., Физматгиз, 1963.