9. Д а т к а е в А. М. Об одном классе ядер интегральных уравнений теории наследственной упругости. В сб.: Исследования по механике горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1965, стр. 35—44.
10. З о р и н А. И., Р о з о в с к и й М. И. Метод расшифровки иррациональной функции интегрального оператора. Прикл. механ., 1965, т. 1, № 9.
11. Д о л и н и н а Н. Н. К теории упруго-наследственных бинарных сред. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 7.
12. Ш и л о в Г. Е. О локально-аналитических функциях. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, № 6.
13. Г р о м о в В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
14. З е в и н А. А. О функциях дробно-экспоненциальных операторов в теории наследственной упругости. Прикл. механ., 1969, т. 5, № 11.
15. И л ь ю ш и н А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по теории вязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
16. И л ь ю ш и н А. А. Экспериментальный метод решения одного интегрального уравнения теории вязкоупругости. Механика полимеров, 1969, № 4.
17. G r a m s c h B. Functionalkalkül mehrerer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren. Math. Ann., 1967, Bd. 174, H. 4, S. 311—344.
18. Р и с с Ф., Н а д ь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
19. К р у ш И. И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
20. К р у ш И. И., Р о з о в с к и й М. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
21. М и х л и н С. Г. О функциях Коссера. В сб.: Проблемы математического анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения. Изд-во ЛГУ, 1966.
22. М и х л и н С. Г. Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. ЛГУ, 1967, № 7, вып. 2.
23. М и х л и н С. Г. Некоторые свойства спектра Коссера пространственных и плоских задач теории упругости. Вестн. ЛГУ, 1970, № 7, вып. 2.

УДК 539.4

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Г. И. Брызгалин

(Волгоград)

Рассматриваются вопросы оптимального проектирования анизотропных неоднородных тел при различных условиях оптимальности. Область, занятая телом, и условия на ее границах считаются заданными; структурные параметры, характеризующие свойства материала — функции координат. Доказана теорема существования и некоторые свойства рассмотренных проектов.

1. Рассматривается неоднородная анизотропная сплошная среда, характеризуемая некоторыми структурными параметрами, представляющими собой функции пространственных координат. Среда служит моделью реальных материалов типа металла, армированного высокопрочными монокристаллами, стеклопластика и т. п.; физический смысл структурных параметров можно выяснить, обращаясь к конкретным композитам.

Будем говорить, что конфигурация тела задана, если определен объем V, заполняемый сплошной средой, и условия на его граничной поверхности Ω. Поверхностные усилия задаются с точностью до некоторого общего параметра t (пропорциональное нагружение), массовые силы отсутствуют, возможность потери устойчивости исключена.

Функциональные соотношения, связывающие напряжения, деформации и структурные параметры, назовем законом среды.

Проект тела будет считаться построенным, если функции, определяющие структурные параметры среды, выбраны таким образом, что удовлетворяются условия прочности в каждой точке, уравнения равновесия, условия совместности деформаций и граничные условия. Для разрывных полей должны выполняться соответствующие равенства на поверхностях разрыва.

Из всех возможных проектов желательно выбрать тот, который наилучшим образом удовлетворяет некоторому требованию, т. е. оптимальный. Разные критерии оптимальности приводят к различным математическим задачам.

Простейшими, по-видимому, являются критерии типа равнопрочности, когда структурные параметры подбираются так, чтобы функции, характеризующие прочность тела в точке (или иное локальное свойство), были постоянны по объему тела. Соответствующие равенства позволяют замкнуть систему основных уравнений задачи.

Проблема проектирования деталей наименьшего веса (массы, стоимости материала) приводит к типичной задаче варицонного исчисления — отысканию экстремума функционала, являющегося аддитивной функцией области. Известные методы решения такой задачи существенно опираются на это свойство аддитивности.

При заданной конфигурации и законе среды прочность тела (глобальная прочность) определяется максимальным значением параметра нагружения t, которое обозначим p ($p = \max t$). Величина p зависит от выбора функций, определяющих структурные параметры, т. е. является функционалом. Этот функционал неаддитивен, поскольку не имеет смысла для части объема V. Можно поставить задачу отыскания максимума функционала при варьировании структурных параметров: $p^* = \max p$. Другой пример экстремальной задачи для неаддитивного функционала получим при построении тела, имеющего наименьшее перемещение в некоторой точке.

Будем рассматривать сплошные среды, которые моделируют конструктивно-анизотропный неоднородный материал, состоящий из связующего и погруженного в него наполнителя (арматуры).

Пусть ρ, ρ_0 — плотности арматуры и связующего, s — объемное содержание арматуры в единице объема композита, v — общий объем арматуры в теле. Тогда $V - v$, $1 - s$ — общий и относительный объемы связующего, $(\rho - \rho_0)s + \rho_0$ — средняя плотность композита. При заданных постоянных ρ, ρ_0, V масса арматуры m вполне определяет массу всего тела M

$$M = \rho v + \rho_0 (V - v) = (\rho - \rho_0)\, m / \rho + \rho_0 V \qquad \left(m = \rho \int\limits_V s dV\right)$$

При $\rho > \rho_0$ задача минимизации массы тела сводится к минимизации массы арматуры.

Все введенные величины соответствуют начальному недеформированному состоянию тела; значения для деформированного состояния будут снабжаться штрихом.

Рассмотрим три критерия оптимальности, для которых приняты следующие определения оптимального проекта.

1°. Равнопрочный (точнее равнодеформированный) проект, имеющий постоянные по объему и равные между собой относительные удлинения в некоторых трех некомпланарных направлениях при любом текущем значении параметра внешней нагрузки $t: \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon(t)$, так что для предельно нагруженного тела ($t = p$)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon(p) = \pm \varepsilon^* \tag{1}$$

Здесь ε^* — постоянная материала, $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon^*$ — локальное условие прочности ($i = 1,2,3$).

2°. Проект наименьшей массы арматуры при данном значении прочности $p: m_* = \min m$ ($p = \text{const}$).

3°. Проект наибольшей прочности при данном значении массы арматуры $m: p^* = \max p$ ($m = \text{const}$).

В этих определениях фигурируют два характерных параметра: m и p; желательно чтобы проект, оптимальный по одному из параметров, был удовлетворителен по другому. При необходимости можно ввести некоторую комбинацию этих величин и рассматривать иное определение оптимального проекта.

Цель данной работы — выявление взаимосвязи между свойствами проектов с одинаковой конфигурацией, построенных по разным критериям и имеющих разную внутреннюю структуру.

Предположения о законе среды будут приниматься по мере необходимости с тем, чтобы каждое высказанное утверждение было справедливым для всего последующего изложения. Первое такое предположение: когда элемент тела находится в деформированном состоянии равномерного всестороннего расширения (сжатия), его поведение является линейно-упругим, причем связь между первым инвариантом тензора напряжения σ, линейной деформацией ε и содержанием наполнителя определяется равенством

$$\sigma = [as + b\,(1 - s)]\varepsilon \qquad (a, \quad b = \text{const}) \tag{2}$$

Теорема 1. При заданной конфигурации тела и прочности все проекты, оптимальные по критерию 1, с одинаковыми постоянными материала a, b, ε^* имеют одинаковые массы.

Для доказательства вводится субстанциональная система координат ξ_k $(k = 1,2,3)$, в которой компоненты тензоров напряжений и деформаций обозначаются соответственно p^{ij}, ε_{ij}, компоненты метрического тензора в начальном и текущем положении — g_{ij}, g_{ij}'. Связь между координатными векторами $Э_k$, $Э_k'$ — системы в начальном и текущем состоянии, согласно критерию 1, записывается в виде $Э_k' = (1 + \varepsilon)Э_k$, $(g_{ij}' = (1 + \varepsilon)^2 g_{ij}$, $dV' = (1 + \varepsilon)^3 dV)$. При этом $\sigma = p^{ij}g_{ij}'$, а приращение компонента тензора деформаций в процессе деформирования можно записать так [1]:

$$d\varepsilon_{ij} = 0.5d\,(Э_i'Э_j' - Э_iЭ_j) = (1 + \varepsilon)\, g_{ij}d\varepsilon = g_{ij}'\,\frac{d\varepsilon}{(1 + \varepsilon)}$$

Работа внутренних усилий при деформировании тела из начального $(\varepsilon = 0,\ t = 0)$ состояния в конечное $(\varepsilon = \varepsilon^*,\ t = p)$ равна

$$w = \int\limits_{V'} dV' \int\limits_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon^*} p^{ij}\, d\varepsilon_{ij} = \int\limits_{V'} dV' \int\limits_0^{\varepsilon^*} \frac{\sigma}{1 + \varepsilon}\, d\varepsilon = \int\limits_V dV \int\limits_0^{\varepsilon^*} \sigma\,(1 + \varepsilon)^2\, d\varepsilon =$$

$$= \int\limits_0^{\varepsilon^*} d\varepsilon \int\limits_V [as + b\,(1 - s)]\, \varepsilon\,(1 + \varepsilon)^2\, dV = [(a - b)\, v + bV]\, \Phi\,(\varepsilon^*)$$

Здесь $\Phi\,(\varepsilon^*)$ — функция, получаемая в результате интегрирования. (В дальнейшем по повторяющимся индексам суммирование не производится.)

Деформацию такого проекта можно рассматривать как равномерное расширение (или сжатие) относительно некоторого неподвижного центра, поэтому вектор перемещения любой точки может быть выражен через ее радиус-вектор начального положения: $\mathbf{U} = \varepsilon\mathbf{r}$, тогда $d\mathbf{U} = \mathbf{r}d\varepsilon$ — приращение вектора перемещения в процессе деформации. Записав интенсивность внешних поверхностных сил в виде $t\mathbf{f}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, получим выражение для приращения работы внешних сил на элементе поверхности $dA = t\,(\mathbf{f}, \mathbf{r})\, d\varepsilon d\Omega'$ $(d\Omega' = (1 + \varepsilon)^2 d\Omega)$.

Используя предположение о линейной упругости материала при всестороннем расширении (сжатии), найдем, что $\varepsilon = \varepsilon^* t\, /\, p$.

Действительно, граничная поверхность изменяется подобно самой себе при возрастании параметра t, а граничные напряжения изменяются пропорционально t. Если решение задачи при $t = 1$ существует и определяет поле напряжений $p^{ij}\,(1)$, то при любом t существует решение с полем $tp^{ij}\,(1)$. Исключение возможности потери устойчивости предполагает единственность решения. Следовательно, для некоторого фиксированного проекта, претерпевающего указанное деформирование, тензор напряжений и его первый инвариант σ изменяются пропорционально параметру внешней нагрузки t. Используя соотношение (2), придем к записанной зависимости для деформации.

Работа внешних сил

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \int_0^p (\mathbf{f}, \mathbf{r}) \left(1 + \frac{\varepsilon^* t}{p}\right)^2 \frac{\varepsilon^* t}{p}\, dt$$

Приравнивая работы внешних и внутренних сил, определим объем наполнителя

$$v = [A - bV\Phi(\varepsilon^*)] \,/\, (a - b)\ \ \Phi(\varepsilon^*) \tag{3}$$

В правую часть выражения (3) входят функции, зависящие от постоянных материала a, b, ε^*, конфигурации тела и прочности проекта p. Однако объем наполнителя не зависит от каких-либо характеристик распределения наполнителя по объему V. Любые проекты данной конфигурации, имеющие прочность p и построенные из данного материала, будут иметь тот же объем наполнителя. Считая плотность ρ постоянной и пользуясь записанным ранее выражением для массы проекта M, легко убедиться в справедливости высказанного замечания.

2. Дальнейшее изложение относится к материалам, наполнитель которых представляет собой тонкие ориентированные волокна. Представим некоторую пространственную криволинейную систему координат ξ_i с координатными векторами Э_i и будем считать, что волокна моделируемого композита параллельны координатным линиям этой системы.

Объемное содержание волокон i-го направления в единице объема композита обозначим s_i, тогда $s = s_1 + s_2 + s_3$. Величина s не должна превышать предельно допустимого значения $s^* < 1$, определяемого из технологических соображений. Для пластин и оболочек, создаваемых из такого материала, можно принять $s_3 = 0$.

Полагая поперечные размеры волокон сколь угодно малыми, проведем обычный в механике твердого тела переход к сплошной неоднородной анизотропной среде, структурные параметры которой s_1, s_2, s_3 — функции координат ξ_1, ξ_2, ξ_3. Система ξ_i, по построению, является субстанциональной.

Будем рассматривать только рациональные [2] проекты, обладающие, по определению, следующими свойствами:

а) вектор напряжения $\mathbf{p}^1$ на площадке, образованной координатными векторами $\text{Э}_2'$, $\text{Э}_3'$, коллинеарен вектору $\text{Э}_1'$; аналогичное предположение принимается относительно векторов напряжения на других координатных площадках при круговой замене индексов;

б) в процессе деформации сохраняются углы между координатными осями системы ξ_i, связанной с направлениями волокон.

По существу, предположения а), б) сводятся к тому, что между волокнами одного семейства не возникает ни сдвигающих усилий, ни сдвиговых деформаций. В связи с этим в законе среды и условии прочности нет необходимости конкретно определять связь между этими характеристиками состояния. Тем самым существенно сокращается число определяющих параметров, например, деформация тела в точке характеризуется только относительными удлинениями волокон ε_1, ε_2, ε_3.

Предполагается, что жесткость связующего достаточна для сохранения монолитности композита и устранения возможности потери устойчивости волокон. Наряду с инвариантными характеристиками деформации ε_i вводятся также инвариантные величины, определяющие напряженное состояние σ_i ($i = 1,2,3$), которое можно назвать приведенными напряжениями на координатных площадках.

Обозначим $p^i = |\,p^i\,|$ и α_i — угол между ковариантным вектором $\text{Э}_i'$ и контравариантным вектором той же системы $\text{Э}'^i$.

Очевидно, угол между координатной площадкой $\text{Э}_2'$ $\text{Э}_3'$ и ее проекцией на плоскость, ортогональную направлению $\text{Э}_1'$, равен α_1. Пусть, по определению, $\sigma_i = p^i / \cos\alpha_i$ ($i = 1,2,3$), тогда, в частности, σ_1 — усилие на некоторой площадке, образованной направлениями волокон ξ_1, ξ_2, отнесенное к площади проекции этой площадки на плоскость, нормальную к направлению усилия.

Пользуясь формулами § 4 [1] при некоторой разнице обозначений, можно записать

$$p^i = p^{ii}\sqrt{g_{ii}'/g'^{ii}}, \qquad \cos\alpha_i = (g_{ii}'g'^{ii})^{-1/2}$$

тогда $\sigma_i = p^{ii}g_{ii}'$ (нет суммирования), и первый инвариант тензора напряжений σ представится в виде $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Для ортогональной системы координат ξ_i величины σ_i — главные напряжения, так как в силу предположения о рациональности проектов главные оси тензора напряжений совпадут с направлениями волокон. При этом

$$\sigma_i = p^{ii}, \qquad \varepsilon_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}/g_{ii}} - 1$$

Пусть связь между инвариантными характеристиками напряжений и деформаций σ_i, ε_i и структурными параметрами s_i, α_i (закон среды) определяется равенствами

$$f_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3;\ s_1, s_2, s_3;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \qquad (k = 1,2,3) \tag{4}$$

На функцию (4) налагается следующее условие: для ограниченных значений переменных σ_i, ε_i, α_i, удовлетворяющих неравенствам $\sigma_i\varepsilon_i \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$, они определяют неявным образом однозначные ограниченные положительные функции $s_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ такие, что

$$(\operatorname{sign}\sigma_i)\partial s_k / \partial\sigma_i \geqslant \lambda > 0 \qquad (\lambda = \mathrm{const}) \tag{5}$$

Условие прочности тела в точке $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon^*$ ($i = 1,2,3$).

Назовем поле напряжений правильным, если оно статически допустимо для данной конфигурации тела и его изостаты (линии главных напряжений) можно принять за координатные линии некоторой криволинейной системы координат ξ_i.

Теорема 2. Если всестороннее равномерное расширение (сжатие) не противоречит кинематическим условиям при заданной конфигурации тела, то любое правильное поле напряжений p_0^{kj} с главными напряжениями одного знака порождает проект, оптимальный по критерию 1.

Действительно, поле напряжений искомого проекта можно выбрать в виде $p^{kj} = tp_0^{kj}$. Линии главных напряжений этого поля определяет систему координат ξ_i, задающую направления волокон арматуры, тогда в силу ортогональности главных осей тензора напряжений $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \pm\varepsilon^*$, из закона среды (4) найдем s_1, s_2, s_3 как функции главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3.

Пока t не фиксировано, имеем семейство равнопрочных проектов. При увеличении параметра t от нулевого значения возрастают главные напряжения, а следовательно (см. (5)), должны увеличиваться и интенсивности армирования. Полагая, что наибольшее значение суммарной интенсивности армирования достигает s^*, получим равенство для определения прочности наиболее прочного проекта из данного семейства $\max_{V,t} s = s^*$. При этом p — значение t, на котором достигнут этот максимум.

Теорема 2 позволяет, в частности, элементарно спроектировать равнопрочные безмоментные оболочки, если известны поля напряжений соответствующих изотропных оболочек с главными напряжениями одного знака.

В дальнейшем перемещения тела считаются малыми, так что можно не замечать разницы между состояниями граничной поверхности до и после нагружения.

Теорема 3. Решение задачи теории упругости изотропного тела с правильным полем напряжений определяет рациональный проект анизотропного тела той же конфигурации.

Пусть в изотропном теле с коэффициентом Пуассона $\nu' = 0$ и неопределенным пока значением модуля Юнга E' при значении параметра нагружения t реализуется поле напряжений $\sigma_i(t) = t\sigma_i^\circ$ и поле деформаций ε_i° такое, что $\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|\} = \varepsilon^*$. Для построения проекта анизотропного тела выбираем его поля напряжений и деформаций так, чтобы в предельно нагруженном состоянии они были соответственно равны $\sigma_i(p)$, ε_i° (p — наибольшее значение параметра нагружения анизотропного проекта). В силу закона Гука для изотропного тела можно записать $\sigma_i(p) = E'\varepsilon_i^\circ$, тогда из (4) найдем функции $s_i(E'\varepsilon_i^\circ, \varepsilon^\circ{}_i)$ ($\alpha_i = 0$). Соосность тензоров напряжений и деформаций упругого изотропного тела обеспечит отсутствие сдвиговых усилий и деформаций на координатных площадках системы ξ_i, если ее выбрать так, чтобы координатные линии (и волокна арматуры) совпадали с линиями изостат.

Для значений E', при которых $s < s^*$, имеем семейство рациональных проектов. Выбирая из них самый прочный, полагаем $\max_{V,\,E'} s = s^*$, откуда найдем значение $E' = E_0'$, при котором реализуется этот максимум. Прочность определяется из условия равенства напряжений в изотропном и анизотропном телах $p = E_0'\varepsilon_i/\sigma_i^\circ$. Аналогично можно провести доказательство и при $\nu' \neq 0$.

Как правило, теорема 3 дает хорошее начальное приближение, отправляясь от которого, можно улучшать проект, доводя его характеристики до оптимальных по тому или иному критерию.

Последующее изложение будет относиться только к рациональным проектам с двумя семействами направлений арматуры, параллельными некоторой плоскости Q. Срединная плотность тела занимает на Q область ω, ограниченную контуром L. Внешние усилия, действующие на контуре, параллельны плоскости Q. Высота тела принимается равной единице.

Для закона среды (4) ($s_3 = 0$) при условии (1) и дополнительном условии

$$\operatorname{sign} \varepsilon_i \partial s_k \,/\, \partial \varepsilon_i \leqslant \mu < 0 \qquad (\mu = \text{const}) \tag{6}$$

справедлива следующая теорема.

Теорема 4. При заданной конфигурации тела и прочности проект, оптимальный по критерию 1, оптимален и по критерию 2, иначе говоря, равнопрочный проект имеет наименьшую массу.

Доказательство этой теоремы, приведенное в [2] (замечание 3) для более простого закона среды, распространяется без труда на данный случай.

3. Рассмотрим свойства плоских рациональных проектов при простейшем законе среды. В дальнейшем жесткость связующего считается меньшей жесткости арматуры настолько, что ее вкладом в общую жесткость можно пренебречь.

Закон среды при этом имеет вид

$$\sigma_i = E s_i \varepsilon_i \qquad (i = 1,2) \tag{7}$$

Теорема 5. Каждый рациональный проект (m, p) порождает семейство рациональных проектов с пропорционально меньшими значениями массы арматуры и прочности (μm, μp).

Действительно, имея проект, характеризуемый величинами m°, $p^{i\circ}$, $\sigma^\circ(\xi_1, \xi_2)$, $\varepsilon_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$, $s_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$, $\alpha_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$, можно построить новый проект с тем же полем деформаций $\varepsilon_i(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$ и пропорционально уменьшенными полями напряжений $\sigma_i(\xi_1, \xi_2) = \mu\sigma_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$ и интенсивностей армирования $s_i(\xi_1, \xi_2) = \mu s_i^\circ(\xi_1, \xi_2)$. Уравнения равновесия в силу их линейности не нарушаются, равенства (7) сохранятся, граничные условия для напряжений также будут выполнены, если параметр p заменить на μp. Масса арматуры такого проекта будет равна μm.

Теорема 6. При фиксированном значении массы арматуры m_0 проект (m_0, p_0), оптимальный по критерию 1°, оптимален по критерию 3°, иначе говоря, равнопрочный проект имеет наибольшую прочность при данной массе.

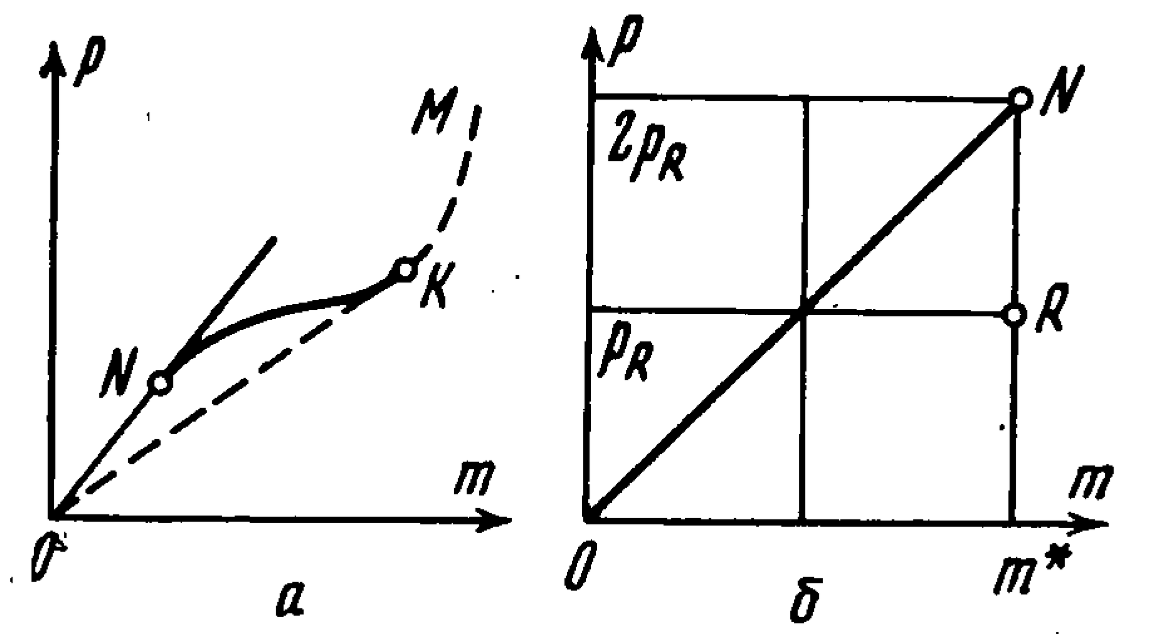
Предположим противное: существует проект (m_0, p) с той же массой и большим значением прочности, чем равнопрочный $p > p_0$. Согласно теореме 5, этот проект можно использовать для построения нового проекта с пропорционально уменьшенными значениями массы и прочности. Именно, взяв $\mu = p_0 / p$, получим проект (μm_0, p_0). Однако, согласно теореме 4, такого проекта (с той же прочностью, что у равнопрочного, но с меньшей массой) не существует.

Для наглядного сравнения свойств различных проектов можно ввести изображающую плоскость с декартовыми прямоугольными координатами m, p (фигура). Изображая каждый проект точкой на этой плоскости, можно получить некоторые следствия геометрического характера из высказанных утверждений.

Следствие 1. Если существует равнопрочный проект N (m_0, p_0) (см. фигуру), то отрезок прямой ON соответствует проектам, оптимальным по всем трем критериям.

Это утверждение очевидным образом следует из теорем 4—6, поскольку равнопрочный проект порождает равнопрочные.

Наряду с величинами m и p можно рассмотреть их отношение p / m — удельную прочность проекта. Все точки на ON соответствуют проектам одинаковой удельной прочности. Применяя рассуждения при доказательстве теоремы 5, но взяв $\mu > 1$, можно попытаться построить проекты с той же удельной прочностью, но с большим значением прочности p, однако это возможно лишь в том случае, если ни в одной точке проекта N не достигнута предельная интенсивность армирования s^*.



Считая, что в проекте N эта возможность уже исчерпана, т. е. p настолько велико, что в некоторой точке тела равенство $s = s^*$ выполняется, можно сформулировать следующее.

Следствие 2. Изображающие точки всех возможных проектов располагаются либо на отрезке ON, либо ниже луча, соответствующего этому отрезку.

Отсутствие точек выше этого луча очевидным образом следует из теоремы 5 и следствия 1.

Согласно следствию 1, отрезок ON можно назвать участком кривой оптимальных проектов. Если равнопрочный проект построить невозможно, то такая кривая должна соответствовать проектам, оптимальным по критериям 2° и 3°.

Из теоремы 5 вытекает

Следствие 3. Кривая оптимальных проектов не может пересекать радиус-вектор какой-либо своей точки дважды, т. е. ее поведение, изображенное участком KM на фигуре, *а*, невозможно.

В качестве иллюстрации рассмотрим кольцевую пластину, нагруженную в своей плоскости равномерным давлением t по внешнему контуру. Толщина тела для расчетов не существенна, поскольку на границе заданы напряжения. Можно считать, что проектируется слой единичной толщины. Обозначим r_0, r_1, r — внутренний, внешний и текущий радиусы пластины.

Согласно известным формулам Ламе, в упругом изотропном кольце под внешним давлением t возникает поле напряжений

$$\sigma_1 = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(-1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)t \equiv t\sigma_1^\circ \qquad (8)$$

$$\sigma_2 = -\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)t \equiv t\sigma_2^\circ$$

Линии главных напряжений расположены в радиальном и окружном направлениях, которым соответствуют индексы 1 и 2.

Полагая коэффициент Пуассона равным нулю, найдем деформации изотропного тела по формуле $\varepsilon_i = \sigma_i / E'$. Пусть деформации и напряжения искомого рационального проекта совпадают с соответствующими величинами для изотропного тела. Из закона (7) найдем интенсивности армирования $s_1 = s_2 = E' / E$. Выбираем E' таким, чтобы суммарная интенсивность армирования достигла наибольшего значения: $s = 2E' / E = s^*$, $E' = Es^* / 2$. В силу постоянства s по всей области ω масса арматуры также будет равна своему наибольшему возможному значению для тела данной конфигурации $m_R = m^* = \rho\omega s^*$. Абсолютные значения главных деформаций ограничены величиной ε^*, а поскольку главные напряжения пропорциональны чим, можно записать (положив t равным наибольшему значению p)

$$p \max_{\omega} \{|\sigma_1^\circ|, |\sigma_2^\circ|\} = Es^*\varepsilon^* / 2 \tag{9}$$

Для рассматриваемого тела область ω определяется неравенствами $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ и наибольшего значения достигает окружное напряжение σ_2 при $r = r_0$

$$\max_{r_0 \leqslant r < r_1} \{|\sigma_1^\circ|, |\sigma_2^\circ|\} = 2r_1^2 / (r_1^2 - r_0^2)$$

так что из (9) следует

$$p = Es^*\varepsilon^* (r_1^2 - r_0^2) / 4r_1^2 \equiv p_R \tag{10}$$

Итак, направления армирования выбраны вдоль радиуса и по концентрическим окружностям, интенсивности армирования постоянны: $s_i = s^* / 2$, прочность проекта равна p_R, напряжения определяются по формуле (8) при $t = p_R$, деформации $\varepsilon_i = 2\sigma_i / Es^*$. Рациональный проект построен.

Поскольку правильное поле напряжений (8) удовлетворяет условию $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 0$, его можно принять за поле напряжений равнопрочного проекта. Следуя процедуре, изложенной при доказательстве теоремы 2, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon^*$, тогда из (7) $s_i = |\sigma_i| / E\varepsilon^*$ и

$$s^* \max_{t,\omega} s = \max_{t,\omega} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) / E\varepsilon^* \tag{11}$$

иначе

$$p \max_{\omega} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) = Es^*\varepsilon^* \tag{12}$$

Рассматриваемое поле напряжений (8) обладает тем замечательным свойством, что для него сумма главных напряжений постоянна, и равенства (11), (12) имеют вид

$$s^* = |\sigma_1 + \sigma_2| / E\varepsilon^*, \qquad p\,|\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ| = Es^*\varepsilon^*$$

так что для равнопрочного проекта оказывается

$$p = Es^*\varepsilon^* (r_1^2 - r_0^2) / 2r_1^2 \equiv p_0 = 2p_R, \qquad m_0 = m^*$$

На изображающей плоскости (m, p) (фигура, *б*) точка R $(m_R p_R)$ соответствует рациональному проекту, точка N (m_0, p_0) — равнопрочному, отрезок ON представляет кривую оптимальных проектов. Поскольку масса любого проекта данной конфигурации не может превышать m^*, точек выше N не существует, т. е. построенный равнопрочный проект абсолютно оптимален по прочности: $p_0 = p^*$.

Поступила 29 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. Брызгалин Г. И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 25/V-1972 г. Т-14042 Подписано к печати 24/VII-1972 г. Тираж 2775 экз.
Зак. 709 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,4

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10