УДК 539.3

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Э. И. Гольденгершель

(Москва)

Доказывается, что для широкого класса квазистатических задач принцип соответствия является следствием принципа Вольтерра, и дается обоснование метода аппроксимации А. А. Ильюшина.

1. Известно, что основанное на принципе Вольтерра [1, 2] решение квазистатической задачи линейной вязкоупругости для однородного анизотропного материала, упругие свойства которого инвариантны относительно начала отсчета времени, сводится к построению некоторой аналитической функции от нескольких вольтерровых операторов с ядрами, зависящими от разности аргументов.

Ниже показано, что при весьма общих предположениях точное решение этой задачи может быть получено в замкнутом виде.

Будем предполагать, что упругое решение имеет вид

$$q(x) = (A(\omega_1, \ldots, \omega_n) r)(x), \quad r = r(x), \quad q = q(x), \quad x \in \Phi \tag{1.1}$$

Здесь Φ — некоторая область n-мерного пространства ($n = 1, 2, 3$); r, q — элементы банахова пространства $L^{(p)}(\Phi)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$); $A(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — линейный оператор, действующий в этом пространстве и аналитически зависящий от упругих констант $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Положим

$$\omega_i = \omega_i^{(0)}(1 - z_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = A(\omega_1^{(0)}(1 - z_1), \ldots, \omega_n^{(0)}(1 - z_n)) \tag{1.2}$$

Согласно принципу Вольтерра, вязкоупругое решение получается из упругого заменой z_i соответствующими вязкоупругими операторами H_i с непрерывными или слабо сингулярными ядрами

$$(H_i u)(t) = \int_0^t H_i(t - \tau) u(\tau) d\tau \tag{1.3}$$

В связи с тем, что вольтерровы операторы H_i (1.3) приходится подставлять не в скалярную функцию, а в оператор-функцию, здесь нельзя пользоваться аппаратом многомерного операционного исчисления [3], разработанным для скалярных функций.

Известно, что для ограниченности оператора H_i (1.3) в пространстве $L_\beta^\infty(0, \infty)$ функций $u(t)$, измеримых на $(0, \infty)$, с нормой

$$\| u \|_\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t < \infty} | u(t) | e^{-\beta t} \tag{1.4}$$

необходимо и достаточно условие

$$\| H_i \|_\beta = \int_0^\infty | H_i(t) | e^{-\beta t} dt < \infty \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что условие (1.5) выполнено для $i = 1, 2, \ldots, n$ и что оператор-функция $f(z)$ (1.2) аналитична на поликруге D

$$D\{z_i;\ | z_i | \leqslant \| H_i \|_\beta + \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\} \tag{1.6}$$

где Δ_i — некоторые положительные числа. Отсюда следует, что в D имеет место сходящееся по операторной норме, порождаемой топологией пространства $L^{(p)}(\Phi)$, разложение [4]

$$f(z)=\sum_{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}f(0)}{\alpha!}z^{\alpha} \tag{1.7}$$

$$z=(z_1,\ldots,z_n),\quad \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\quad z^{\alpha}=z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n},\quad 0=(0,\ldots,0)$$

$$\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!,\qquad \partial^{\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}$$

Введем в рассмотрение банахово пространство $\Lambda_{\beta}^{(p,\infty)}$ вектор-функций $u(t)$ со значениями в $L^{(p)}(\Phi)$, измеримых и почти всюду ограниченных на $0\leqslant t<\infty$ [5], с нормой (1.4).

Здесь и всюду в дальнейшем $|a|$ ($\|A\|$) означает норму элемента (оператора A) в $L^{(p)}(\Phi)$, $\|a\|_{\beta}$ ($\|A\|_{\beta}$) — норму в $\Lambda_{\beta}^{(p,\infty)}$.

Положим по определению

$$f(H)=f(H_1,\ldots,H_n)=\sum_{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}f(0)}{\alpha!}H^{\alpha} \tag{1.8}$$

$$H^{\alpha}=H_1^{\alpha_1}\ldots H_n^{\alpha_n}$$

Именно такая конструкция была, по сути дела, применена В. Вольтерра [6] в задаче о равновесии вязкоупругой сферы, на поверхности которой заданы перемещения (см. также [2]).

Ряд (1.8) сходится по операторной норме, порождаемой топологией пространства $\Lambda_{\beta}^{(p,\infty)}$. Из (1.8) следует, что

$$f(H)=f(0)+G \tag{1.9}$$

Здесь G—действующий в $\Lambda_{\beta}^{(p,\infty)}$ вольтерров оператор

$$(Gu)(t)=\int_0^t G(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{1.10}$$

с ядром, определяемым разложением

$$G(t)=\sum_{\alpha\neq 0}\frac{\partial^{\alpha}f(0)}{\alpha!}H^{(\alpha)}(t),\quad H^{(\alpha)}(t)=H_1^{(\alpha_1)}(t)*\ldots*H_n^{(\alpha_n)}(t) \tag{1.11}$$

$$H^{(\alpha_i)}(t)=H_i(t)*\cdots*H_i(t)$$

где знак «звездочка» означает свертку, и число множителей в последнем равенстве совпадает с верхним индексом.

Так как ряд (1.11) сходится в среднем с весом $e^{-\beta t}$ на полуоси, то

$$\int_0^{\infty}|G(t)|\,e^{-\beta t}\,dt<\infty \tag{1.12}$$

Чтобы получить правило вычисления $G(t)$, применим к (1.11) почленно преобразование Лапласа по времени.

Получим

$$g(w)=\sum_{\alpha\neq 0}\frac{\partial^{\alpha}f(0)}{\alpha!}h^{\alpha}(w),\quad \operatorname{Re}w\geqslant\beta,\quad h^{\alpha}(w)=h_1^{\alpha_1}(w)\,h_2^{\alpha_2}(w)\cdots h_n^{\alpha_n}(w) \tag{1.13}$$

$$h_i(w)=\int_0^{\infty}H_i(t)\,e^{-wt}\,dt,\quad g(w)=\int_0^{\infty}G(t)\,e^{-wt}\,dt$$

Полученное правило представляет собой известный принцип соответствия [7].

Таким образом, при введенных предположениях относительно упругого решения (1.2) принцип соответствия является следствием принципа Вольтерра. Обратное тоже верно.

Иногда применение принципа Вольтерра приводит к вычислению скалярной функции $f(z)$ от операторов H_i (1.3) [8–11]. В этом случае можно воспользоваться аппаратом многомерного операционного исчисления в нормированных кольцах [3]. Это позволяет ослабить требование, наложенное выше на функцию $f(z)$, а именно, достаточно предполагать, что функция $f(z)$ аналитична на множестве S

$$S\,\{z_i,\ z_i = h_i(w),\quad \operatorname{Re} w \geqslant \beta\quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

которое у́же, чем поликруг D (1.6).

Операторы H_i (1.3) можно отождествить с элементами максимального идеала M_∞ коммутативного нормированного кольца $V_+^{\langle e^{-\beta t}\rangle}$ [3]. Множество S представляет собой совместный спектр элементов H_i в этом кольце.

Согласно теореме Шилова—Аренса—Кальдерона [3], существует такой элемент $G(t)$ кольца $V_+^{\langle e^{-\beta t}\rangle}$, что для его преобразования Лапласа $g(w)$ имеет место равенство

$$g(w) = f(h(w)) - f(0),\ f(h(w)) = f(h_1(w))_1,\ \ldots,\ h_n(w)) \tag{1.14}$$

Этот элемент принадлежит максимальному идеалу M_∞ и, следовательно, имеет вид (1.10) и удовлетворяет условию (1.12). Согласно общим положениям многомерного операционного исчисления в нормированных кольцах, из (1.14) следует (1.9) (с заменой $f(0)$ на $f(0)\,I$). Таким образом, снова пришли к принципу соответствия [7].

Заметим, что сказанное остается в силе для локально аналитических нормально многозначных функций [12], в частности для корня и логарифма.

Скалярным аналитическим функциям от одного вольтеррова оператора вида (1.3) посвящены работы [13, 14]. Однако связь принципа соответствия с принципом Вольтерра в этих работах не установлена.

2. В приложениях вместо точного решения вязкоупругой задачи часто отыскивают приближенное решение, которое получается в результате замены упругого решения $f(z)$ (1.2) аппроксимирующим его многочленом или какой-нибудь другой простой функцией $P(z)$ от упругих констант. Так поступают, когда упругое решение громоздко или когда аналитический вид его неизвестен [15, 16].

Покажем, что если оператор-функция $f(z)$ (1.2) аналитична в области D (1.6), то функционально-аналитический подход дает возможность обосновать этот метод аппроксимации. Одновременно будет получено обоснование метода аппроксимации А. А. Ильюшина [15, 16].

Пусть D' — поликруг $\{z_i;\ |z_i| \leqslant \|H_i\|_0 + \Delta_i'\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$, где $0 < \Delta_i' < \Delta_i$, $\partial_0 D'$ — его остов [4]

$$d = \max\nolimits_{\partial_0 D'} |f(z) - P(z)| \tag{2.1}$$

Воспользуемся следующим из (1.6) и (1.7) интегральным представлением, хорошо известным для случая скалярной функции $f(z)$ [3, 17]:

$$f(H) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\partial_0 D'} f(z_1, \ldots, z_n) \prod_{i=1}^{n} (H_i - z_i I)^{-1}\, dz_1 \cdots dz_n \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) и из оценки [18]

$$\|(H_i - z_i I)^{-1}\|_0 \leqslant (|z_i| - \|H_i\|_0)^{-1} = (\Delta_i')^{-1} \quad \text{при } |z_i| \leqslant \|H_i\|_0 + \Delta_i'$$

получаем

$$\|f(H) - P(H)\|_0 \leqslant d \prod_{i=1}^{n} (\|H_i\|_0 + \Delta_i')(\Delta_i')^{-1} \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что вязкоупругое решение $f(H)$ может быть с любой наперёд заданной точностью аппроксимировано многочленом от операторов $H_1, \ldots, H_n$, так как в качестве $P(z)$ можно, например, взять частную сумму ряда (1.7).

При рассмотрении одной частной задачи такая многочленная аппроксимация упругого решения (при $n = 1$) была применена (без обоснования) в работе [10].

3. При изучении демпфирующих свойств упруго-наследственных систем [19, 20] возникает необходимость в конструировании функций от n-операторов вида

$$(W_i u)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} H_i(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

Будем эти операторы рассматривать в пространстве $L_\beta^\infty(-\infty, \infty)$ функций $u(t)$, измеримых на всей числовой оси, с нормой

$$\|u\|_\beta = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<t<\infty} |u(t)|\, e^{-\beta t}$$

Условие (1.5) необходимо и достаточно для ограниченности оператора W_i (3.1) в $L_\beta^{(\infty)}(-\infty, \infty)$. Произведение двух операторов вида W_i есть оператор того же вида, ядро которого — свертка ядер сомножителей. Отсюда следует, что все, сказанное выше в п. 1 и 2, остается в силе при замене H_i (1.3) на W_i (3.1).

4. Метод аппроксимации А. А. Ильюшина [15, 16] состоит в том, что упругое решение, рассматриваемое как функция от упругих констант, аппроксимируется некоторой простой функцией от этих констант, и к аппроксимирующей функции применяется принцип соответствия в смысле [7]. Так как принцип соответствия является следствием принципа Вольтерра, можно при рассмотрении метода аппроксимации А. А. Ильюшина стать на операторную точку зрения. Поэтому оценка (2.3) (в предположении, что выполняются условия, при которых она может быть получена) дает обоснование этого метода аппроксимации.

Заметим, что при $n = 1$ можно отказаться от предположения, что ядро вольтеррова оператора зависит от разности аргументов и рассматривать оператор H вида

$$(Hu)(t) = \int\limits_0^t H(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad \|H\|_0 = \sup_{0 \leqslant t < \infty} \int\limits_0^t |H(t_1 \tau)|\, d\tau < \infty$$

Оценка (2.3) остается в силе и в этом случае.

В связи с изложенным представляет интерес перенесение результатов С. Г. Михлина о спектре Коссера [21–23] на случай анизотропной среды.

Автор благодарит Ю. Н. Работнова, С. Г. Михлина и В. С. Екельчика за полезное обсуждение работы.

Поступила 28 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960, стр. 90—100.
4. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., «Наука», 1968.
5. Данфорд Н., Шварц Д. Т. Линейные операторы, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Volterra V. Founctions de lignes. Paris, Gauthier-Willard, 1913.
7. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
8. Даткаев А. М. Об одном способе решения интегральных уравнений теории наследственной упругости. Вестн. АН КазССР, 1965, № 7.

9. Д а т к а е в А. М. Об одном классе ядер интегральных уравнений теории наследственной упругости. В сб.: Исследования по механике горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1965, стр. 35—44.
10. З о р и н А. И., Р о з о в с к и й М. И. Метод расшифровки иррациональной функции интегрального оператора. Прикл. механ., 1965, т. 1, № 9.
11. Д о л и н и н а Н. Н. К теории упруго-наследственных бинарных сред. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 7.
12. Ш и л о в Г. Е. О локально-аналитических функциях. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, № 6.
13. Г р о м о в В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
14. З е в и н А. А. О функциях дробно-экспоненциальных операторов в теории наследственной упругости. Прикл. механ., 1969, т. 5, № 11.
15. И л ь ю ш и н А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по теории вязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
16. И л ь ю ш и н А. А. Экспериментальный метод решения одного интегрального уравнения теории вязкоупругости. Механика полимеров, 1969, № 4.
17. G r a m s c h B. Functionalkalkül mehrerer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren. Math. Ann., 1967, Bd. 174, H. 4, S. 311—344.
18. Р и с с Ф., Н а д ь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
19. К р у ш И. И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
20. К р у ш И. И., Р о з о в с к и й М. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
21. М и х л и н С. Г. О функциях Коссера. В сб.: Проблемы математического анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения. Изд-во ЛГУ, 1966.
22. М и х л и н С. Г. Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. ЛГУ, 1967, № 7, вып. 2.
23. М и х л и н С. Г. Некоторые свойства спектра Коссера пространственных и плоских задач теории упругости. Вестн. ЛГУ, 1970, № 7, вып. 2.

УДК 539.4

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Г. И. Брызгалин

(Волгоград)

Рассматриваются вопросы оптимального проектирования анизотропных неоднородных тел при различных условиях оптимальности. Область, занятая телом, и условия на ее границах считаются заданными; структурные параметры, характеризующие свойства материала — функции координат. Доказана теорема существования и некоторые свойства рассмотренных проектов.

1. Рассматривается неоднородная анизотропная сплошная среда, характеризуемая некоторыми структурными параметрами, представляющими собой функции пространственных координат. Среда служит моделью реальных материалов типа металла, армированного высокопрочными монокристаллами, стеклопластика и т. п.; физический смысл структурных параметров можно выяснить, обращаясь к конкретным композитам.

Будем говорить, что конфигурация тела задана, если определен объем V, заполняемый сплошной средой, и условия на его граничной поверхности Ω. Поверхностные усилия задаются с точностью до некоторого общего параметра t (пропорциональное нагружение), массовые силы отсутствуют, возможность потери устойчивости исключена.