Полученные инварианты представляют собой аналогии инварианта Лойцянского для альфвеновской турбулентности.

Отметим, что при выводе инвариантов была использована гипотеза об аналитичности функций $R_{ij}(\mathbf{k}, t)$, $B_{i,lj}(\mathbf{k}t)$, $B_{ip}(\mathbf{k}t)$ при $k = 0$. Это означает, что корреляционные функции $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$, $B_{i,lj}(\mathbf{r}, t)$, $B_{ip}(\mathbf{r}, t)$ экспоненциально затухают при $\mathbf{r} \to \infty$. Такое требование не всегда справедливо. Неаналитичность корреляционных функций при $k = 0$ приводит к тому, что в ряде случаев (см. [3]) инварианты Лойцянского не сохраняются на нелинейной стадии развития турбулентности.

Автор благодарит В. Е. Захарова за интерес к работе.

Поступила 20 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. The role of big eddies in homogeneous turbulence. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1949, vol. 195, № 1043.
2. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967.

УДК 532.516

О КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Р. В. Бирих, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Р. Н. Рудаков

(Пермь)

Проведено детальное численное исследование устойчивости стационарного конвективного течения в вертикальном канале. Применяется метод Бубнова — Галеркина в высоких приближениях.

В работах [1–4] подробно исследованы спектры возмущений и устойчивость стационарного конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры. Решение спектральной задачи для амплитуд нормальных возмущений, проведенное методом Бубнова — Галеркина на ЭВМ, показало, что в широком интервале чисел Прандтля ($0 < P < 10$) плоскопараллельное конвективное движение неустойчиво относительно монотонных возмущений, образующих систему неподвижных вихрей на границе встречных потоков. Критическое число Грассгофа, определяющее порог неустойчивости, слабо меняется в указанном диапазоне чисел Прандтля, что связано с гидродинамической природой кризиса.

Вопрос о колебательной неустойчивости конвективного движения рассматривался уже в работах [5, 6], где использовались простейшие приближения метода Бубнова — Галеркина. Более поздние расчеты [2] показали, что в применении к колебательным ветвям спектра метод сходится весьма медленно, и полученные в [5, 6] количественные результаты относительно колебательной неустойчивости не подтверждаются в более высоких приближениях. Из результатов [2], в частности, с уверенностью следует, что при $P < 10$ кризис связан с монотонными возмущениями.

Рассмотрим вертикальный слой жидкости, ограниченный бесконечными параллельными плоскостями $x = \mp h$, на которых поддерживаются постоянные температуры $\pm\Theta$. Будем использовать безразмерные переменные, определенные на основе единиц расстояния, времени, скорости и температуры соответственно h, h^2/ν, $g\beta\Theta h^2/\nu$ и Θ (ν — кинематическая вязкость, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения). В этих единицах профили скорости и температуры замкнутого стационарного плоскопараллельного течения выражаются следующим образом:

$$v_0 = {}^1/_6\ (x^3 - x), \qquad T_0 = -x \tag{1}$$

Исследование устойчивости стационарного режима (1) относительно малых нормальных возмущений приводит к следующей краевой задаче для амплитуд:

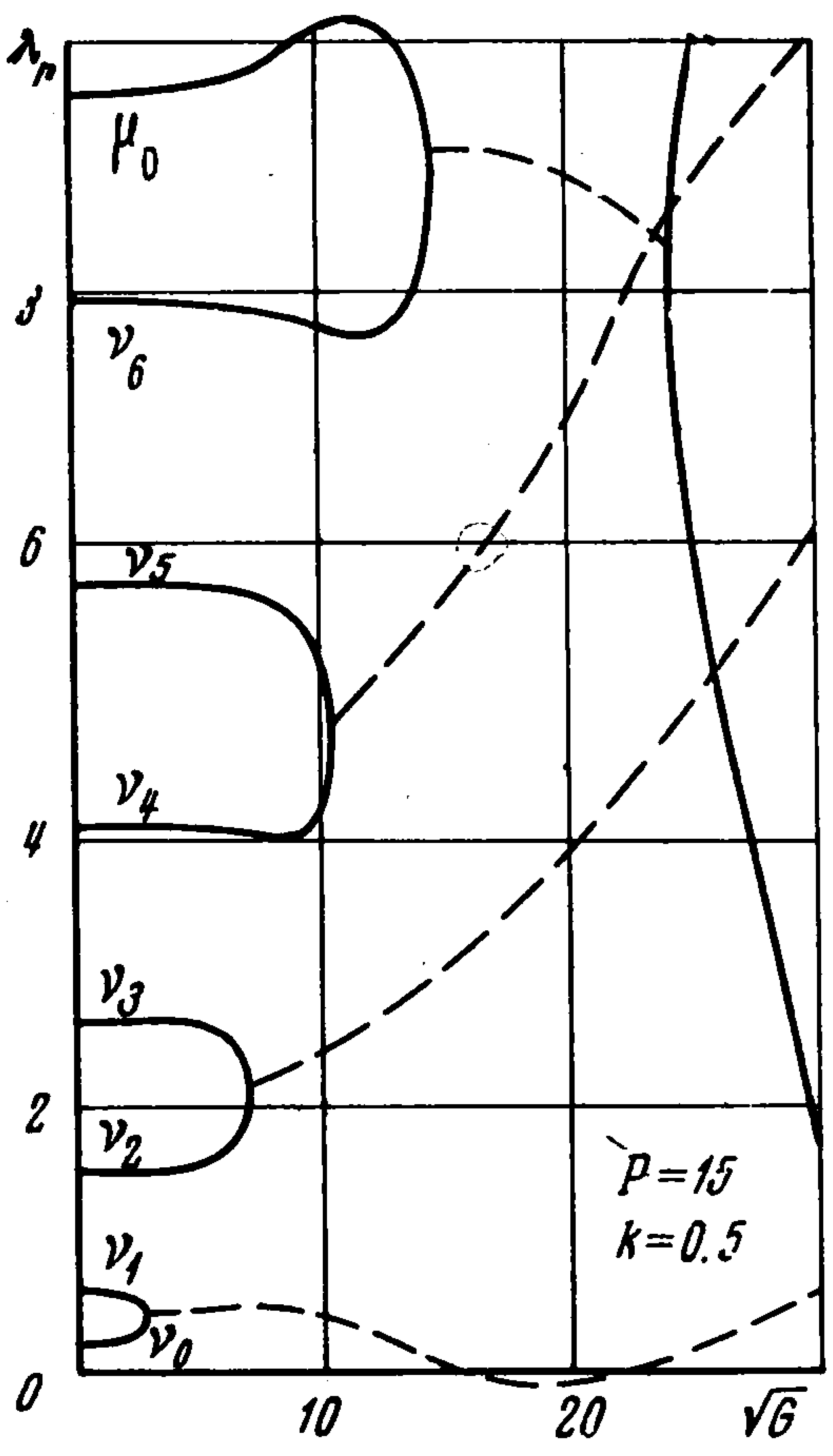
$$\begin{gathered}\Delta\Delta\varphi + ikGH\varphi + \theta' = -\lambda\Delta\varphi\\ P^{-1}\Delta\theta + ikG\,(T_0'\varphi - v_0\theta) = -\lambda\theta\\ \varphi = \varphi' = \theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1\\ \Delta = \partial^2/\partial x^2 - k^2, \qquad H\varphi = v_0''\varphi - v_0\Delta\varphi\\ G = g\beta\Theta h^3/\nu^2, \qquad P = \nu/\chi\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь φ и θ — амплитуды возмущений функции тока и температуры, k и λ — волновое число и декремент, G и P — числа Грассгофа и Прандтля.

Как и в [2–4], решение амплитудной задачи проводилось методом Бубнова — Галеркина; решение строилось в виде суперпозиции

$$\theta = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m\theta_m, \qquad \varphi = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n\varphi_n \tag{3}$$

где в качестве базисных функций θ_m и φ_n выбирались амплитуды нормальных возмущений неподвижного слоя жидкости. Разложения содержали до 28 базисных функций ($M = N = 14$). Проверка на сходимость проводилась путем сравнения результатов, полученных с 16, 20 и 24 базисными функциями. Численные результаты, полученные в этих приближениях, практически совпадали.



Фиг. 1

Основные результаты расчетов представлены на фиг. 1—4.

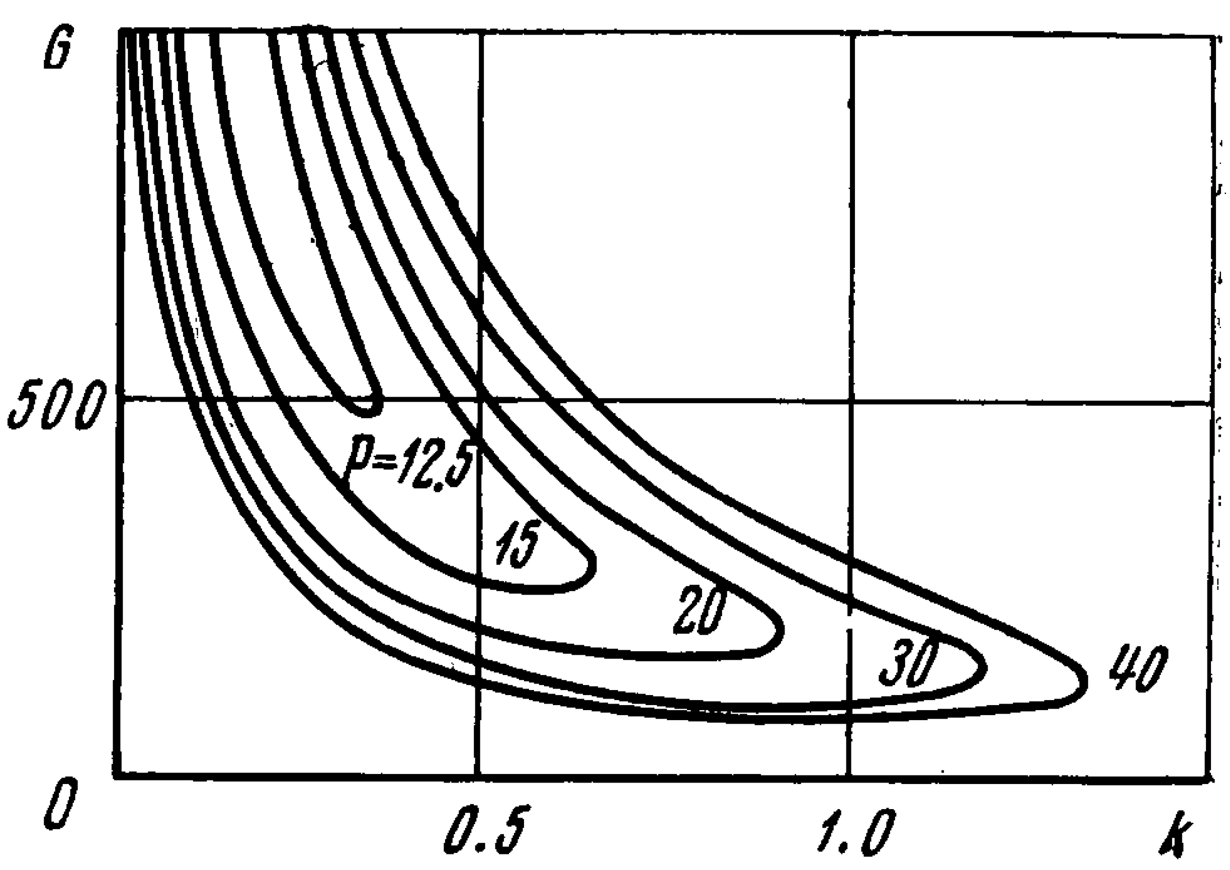
На фиг. 1 приведен пример спектра декрементов ($P = 15$; $k = 0.5$). Как видно, с увеличением числа Грассгофа происходит попарное слияние вещественных уровней с образованием комплексно-сопряженных пар (пунктиром изображаются их общие вещественные части). Пара уровней (ν_6, μ_0) с увеличением G снова распадается на пару вещественных уровней, один из которых пересекает ось G, порождая неустойчивость монотонного типа. Кроме этой неустойчивости, имеющей гидродинамическую природу (в ее образовании участвует нижнее гидродинамическое возмущение μ_0), имеется также неустойчивость колебательного типа, связанная с двумя нижними тепловыми возмущениями ν_0 и ν_1. Они образуют пару колебательных возмущений, причем общая вещественная часть декрементов в некотором интервале G отрицательна. Эти возмущения представляют собой тепловые волны, распространяющиеся вдоль потока. Важно подчеркнуть, что нарастание тепловых возмущений существенно определяется их взаимодействием с гидродинамическими возмущениями: при отсутствии последних тепловые волны всегда затухают [7].

Нейтральные кривые колебательной неустойчивости представлены на фиг. 2. Интересно отметить, что при данном k область неустойчивости ограничена сверху в направлении G. Колебательная неустойчивость возникает при достаточно больших числах Прандтля $P > P_*$; согласно результатам расчетов, $P_* = 11.4$. В области $P > P_*$ минимальное критическое число Грассгофа G_m монотонно убывает с ростом P. При достаточно больших P имеет место асимптотическая зависимость [1]

$$G_m = 470 / \sqrt{P} \tag{4}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при увеличении вязкости критическая разность температур возрастает по закону $\Theta \sim \nu^{3/2}$.

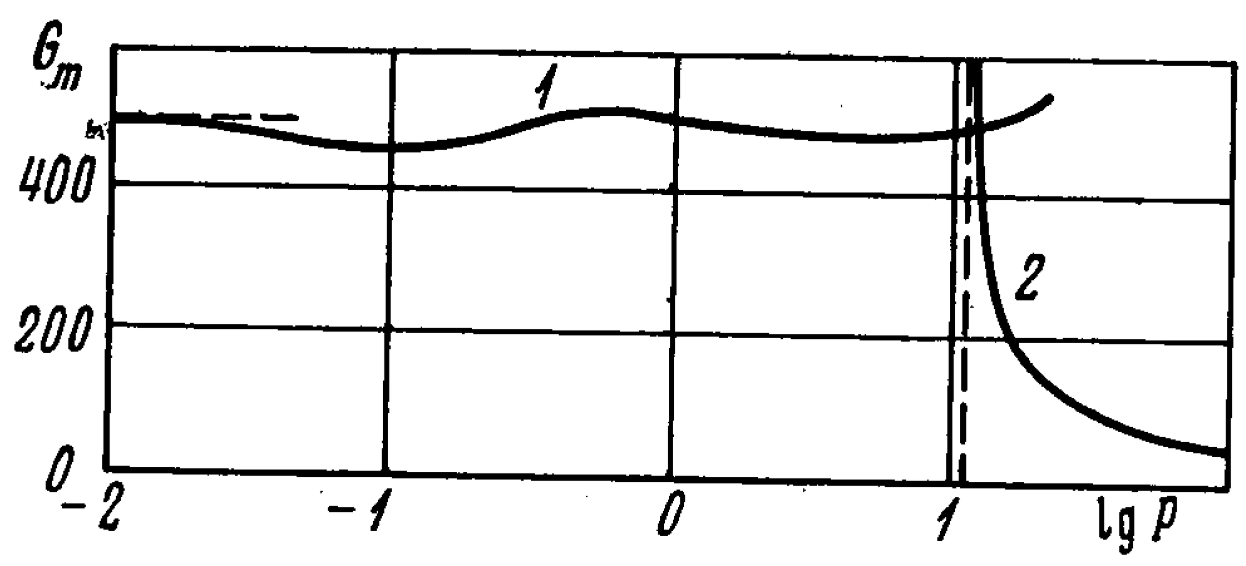
Результаты, относящиеся к устойчивости стационарного конвективного течения между изотермическими вертикальными плоскостями, сведены на фиг. 3. Кривая 1 дает границу устойчивости относительно монотонных возмущений, кривая 2 — относительно колебательных возмущений. При $P > 12$ колебательные возмущения более опасны. Неустойчивость высоковязких жидкостей связана, таким образом, с нарастанием бегущих тепловых волн.



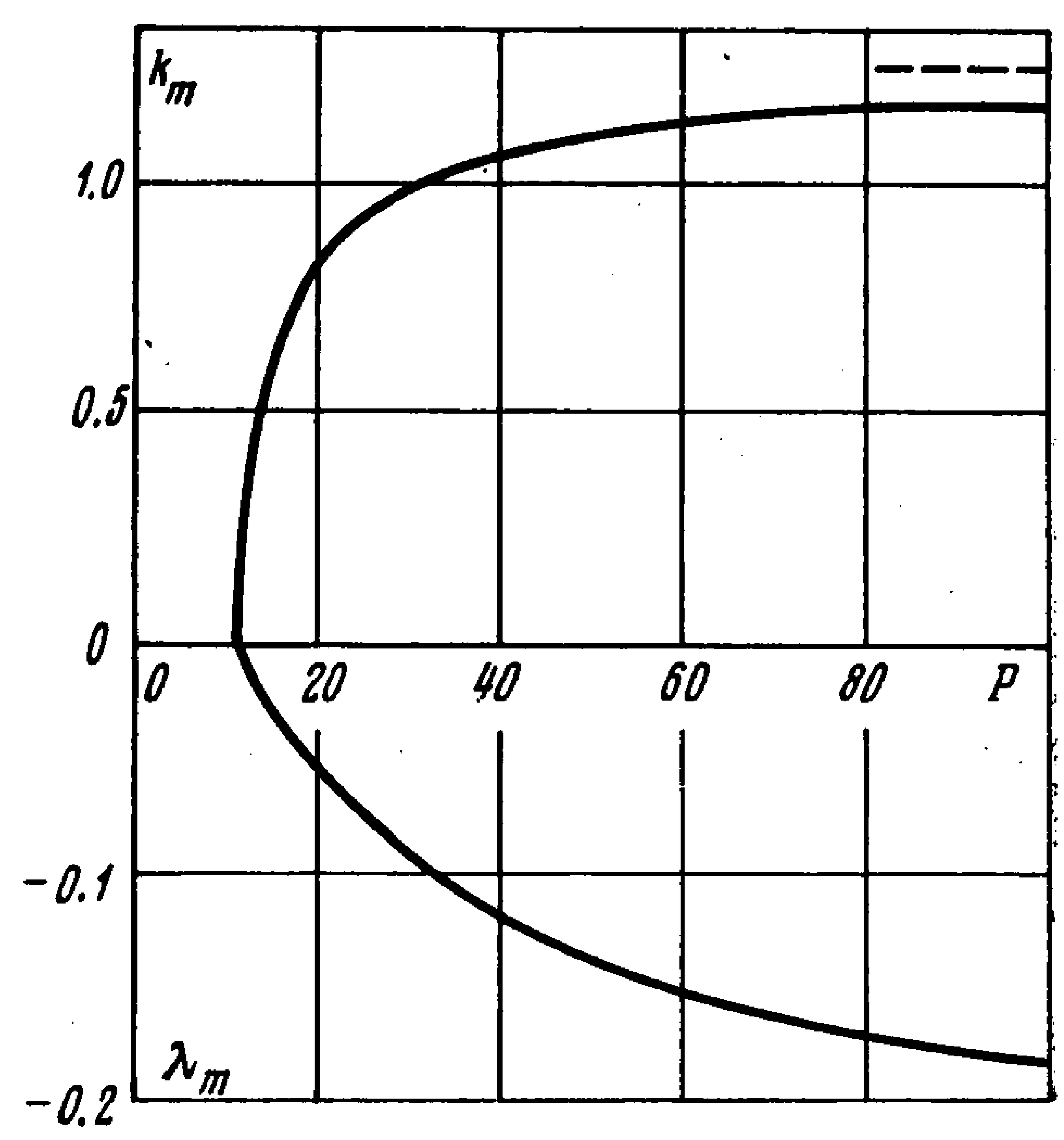
Фиг. 2

Критическое волновое число колебательных возмущений k_m монотонно растет с ростом числа Прандтля, стремясь к предельному значению 1.25 (фиг. 4). За исключением узкой области вблизи P_* критическое волновое число порядка единицы, т. е., как и в случае монотонной неустойчивости, характерный масштаб критических колебательных возмущений порядка ширины слоя.

Частота и фазовая скорость колебательных возмущений определяются мнимой частью декремента λ_i. Колебательная неустойчивость порождается парой комплексно-сопряженных возмущений («смесь» ν_0 и ν_1), у которых мнимые части отличаются знаком, поэтому возможны нарастающие



Фиг. 3



Фиг. 4

тепловые волны, бегущие как вверх, так и вниз (из-за нечетности стационарного профиля скорости относительно середины канала волны могут сноситься как восходящим, так и нисходящим конвективными потоками).

Фазовую скорость удобно сравнить с максимальной скоростью стационарного потока, которая равна (в размерных единицах) $v_m = 0.0641\, g\beta\,\Theta\, h^2 / \nu$. Тогда относительная фазовая скорость (в единицах v_m) для критического возмущения $u = 15.6\lambda_i/(k_m G_m)$. При увеличении числа Прандтля от 20 до 100 относительная фазовая

[1] Приближения работы [6], содержащие четыре базисные функции, дают $P_* = 1.8$ и коэффициент в формуле (4), равный 214.

скорость монотонно растет от 0.93 до 1.02. Таким образом, нейтральные тепловые волны распространяются с фазовой скоростью, весьма близкой к максимальной скорости стационарного потока.

Вопрос о колебательной неустойчивости рассматривался также в работе [8] при помощи асимптотического метода, основанного на разложении решения в ряд по степеням малого параметра $P^{-1/2}$. Главный член асимптотики дает предельные значения $k_m = 1.25$. и $u = 1.06$, что хорошо согласуется с приведенными выше результатами В работе [8] найдена также предельная зависимость $G_m(P)$; отличие от формулы (4) заключается в численном коэффициенте (580 вместо 470).

В заключение следует подчеркнуть, что для экспериментального наблюдения колебательной неустойчивости нужно использовать каналы достаточно большой длины, поскольку в коротком замкнутом канале бегущая тепловая волна невозможна. Еще одно ограничение на длину канала связано с относительно медленным ростом колебательных возмущений. Скорость роста можно охарактеризовать максимальным (по величине) значением вещественной части декремента в области неустойчивости (фиг. 1). Экстремальное (по G) значение λ_m, соответствующее $k = k_m$, представлено в зависимости от числа Прандтля на фиг. 4. Данные, приведенные на фиг. 1 и 4, говорят о том, что колебательные возмущения нарастают гораздо медленнее, чем монотонные. Для наблюдения колебательной неустойчивости, очевидно, необходимо, чтобы время экспоненциального нарастания $1/\lambda_r$ было меньше времени прохождения волны по длине канала L/u (L — длина канала, u — фазовая скорость). Для значений параметров $P = 40$, $k = 1$ и $G = 160$ оценка дает $L/h > 70$.

Поступила 13 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Устойчивость стационарного конвективного движения жидкости с продольным градиентом температуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
5. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. высш. учебн. заведений. Физика, 1958, № 4.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О спектре тепловых возмущений в потоках несжимаемой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
8. Gill A. E., Kirkham C. C. A note on the stability of convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, № 1.