ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
3. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
4. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
6. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.
8. Красовский Н. Н. К теории дифференциальных игр. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
9. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
10. Батухтин В. Д., Субботин А. И. Об условиях завершения игры преследования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 1.

УДК 532.517.4 : 538.4

ИНВАРИАНТЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Е. А. Кузнецов

(Новосибирск)

В несжимаемой гидродинамике в случае однородной, но неизотропной турбулентности были найдены [1] инварианты вида

$$\int \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{R})\, v_j(\mathbf{r})\rangle\, R_m R_n d\mathbf{R}$$

где $\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{R}) v_j(\mathbf{r})\rangle$ — корреляционная функция скоростей. Это семейство законов сохранения есть обобщение инварианта Лойцянского [2] на случай произвольной однородной турбулентности. Аналоги этих инвариантов удается найти и в несжимаемой магнитной гидродинамике для однородной неизотропной среды. Анизотропия обусловлена наличием постоянного магнитного поля H_0.

Рассмотрим уравнения несжимаемой магнитной гидродинамики, перейдя к новым переменным

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - (V_A\nabla)\, h_i = -\nabla_i P - \nabla_k (v_k v_i - h_k h_i) + \nu\Delta v_i$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} - (V_A\nabla)\, v_i = \nabla_k (h_k v_i - v_k h_i) + \nu_m \Delta h_i$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{h} = 0$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}-\mathbf{H}_0}{(4\pi\rho)^{1/2}}, \qquad P = \frac{1}{\rho}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right), \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \tag{1}$$

Здесь V_A — альфвеновская скорость, ν — вязкость, ν_m — магнитная вязкость.

В дальнейшем будем рассматривать турбулентность в рамках такой системы. В этой системе в области прозрачности могут распространяться волны с законом дисперсии $\omega = (\mathbf{k}\mathbf{V}_A)$, поэтому естественно называть такую турбулентность альфвеновской.

Для анализа турбулентности получим уравнения для корреляционных функций скорости $R_{ij}^v = \langle v_i v_j' \rangle (v_j' \equiv v_j(x'))$ и магнитного поля $R_{ij}^h = \langle h_i h_j' \rangle$. Заметим, что в случае однородной турбулентности все двухточечные моменты зависят лишь от $r = x - x'$. Тогда из уравнений (1) следует

$$\frac{\partial R_{ij}^v}{\partial t} - (V_A \nabla) \{\langle h_i v_j' \rangle - \langle h_j' v_i \rangle\} = -\nabla_i \langle P v_j' \rangle + \nabla_j \langle P' v_i \rangle -$$
$$-\nabla_l \{\langle (v_l v_i - h_l h_i) v_j' \rangle - \langle (v_l' v_j' - h_l' h_j') v_i \rangle + 2\nu \Delta R_{ij}^v$$

$$\frac{\partial R_{ij}^h}{\partial t} - (V_A \nabla) \{\langle v_i h_j' \rangle - \langle v_j' h_i \rangle\} = \nabla_l \{\langle (h_l v_i - v_l h_i) h_j' \rangle - \qquad (2)$$
$$- \langle (h_l' v_j' - v_j' h_j') h_i) h_i \rangle + 2\nu_m \Delta R_{ij}^h$$

Исключим моменты вида $\langle v_i h_j' \rangle$, сложив оба уравнения (2). В полученном уравнении, совершив преобразование Фурье по $\mathbf{r}$, получим

$$\frac{\partial R_{ij}^*}{\partial t} = -ik_i B_{pj} + ik_j B_{ip} + ik_l B_{i,lj} - ik_l \overline{B_{li,j}} - 2k^2 (\nu R_{ij}^v + \nu_m R_{ij}^h) \qquad (3)$$
$$R_{ij}^* = R_{ij}^v + R_{ij}^h$$
$$\int \langle P v_j' \rangle e^{-i\mathbf{kr}} d\mathbf{r} = B_{pi}(\mathbf{k})$$
$$\int \{\langle (v_l v_i - h_l h_i) v_j' \rangle - \langle h_l v_i - v_l h_i) h_j \rangle\} e^{-i\overrightarrow{\mathbf{kr}}} d\mathbf{r} = B_{li,j}(\mathbf{k})$$

Вследствие третьего и четвертого уравнений (1) корреляционные функции вида $\langle \ldots, v_j' \rangle$ $\langle \ldots, h_j' \rangle$ обладают следующим свойством:

$$k_j \langle \ldots, v_j' \rangle_{\mathbf{k}} = 0, \quad k_j \langle \ldots, h_j' \rangle = 0 \qquad (4)$$

Воспользовавшись этим, получим соотношения

$$k^2 B_{pj}(k) = -k_l k_i B_{li,j}(k)$$
$$k^2 B_{ip}(k) = -k_l k_j B_{i,lj}(k) \qquad (5)$$

Будем предполагать, что функции $R_{ij}^{v,h}(k)$, $B_{i,lj}(k)$, $B_{pj}(k)$ разлагаются в ряд Тейлора по $\mathbf{k}$. Заметим, что эти корреляционные функции содержат скаляр P, полярный вектор $\mathbf{v}$ и аксиальный вектор $\mathbf{h}$. При разложении воспользуемся этим свойством и равенством (7)

$$R_{ij}^{v,h}(k) = f_{ij,mn}^{v,h} k_m k_n + \ldots$$
$$k_j B_{ip}(k) = b_{ij,mn} k_m k_n + \ldots$$
$$k_l B_{i,lj}(k) = \Lambda_{ij,mn} k_m k_n + \ldots$$

Из (5) можно заключить, что $b_{ij,mn} = -\Lambda_{ij,mn}$, т. е.

$$\frac{d}{dt}(f_{ij,mn} + f_{ij,mn}^h) = 0, \quad f_{ij,mn} = f_{ij,mn}^v + f_{ij,mn}^n = \text{const}$$

Запишем эти инварианты в координатном представлении

$$f_{ij,mn} = \int \{R_{ij}^v(\mathbf{r}) + R_{ij}^h(\mathbf{r})\} r_m r_n d\mathbf{r}$$

Полученные инварианты представляют собой аналогии инварианта Лойцянского для альфвеновской турбулентности.

Отметим, что при выводе инвариантов была использована гипотеза об аналитичности функций $R_{ij}(\mathbf{k}, t)$, $B_{i,lj}(\mathbf{k}t)$, $B_{ip}(\mathbf{k}t)$ при $k = 0$. Это означает, что корреляционные функции $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$, $B_{i,lj}(\mathbf{r}, t)$, $B_{ip}(\mathbf{r}, t)$ экспоненциально затухают при $\mathbf{r} \to \infty$. Такое требование не всегда справедливо. Неаналитичность корреляционных функций при $k = 0$ приводит к тому, что в ряде случаев (см. [3]) инварианты Лойцянского не сохраняются на нелинейной стадии развития турбулентности.

Автор благодарит В. Е. Захарова за интерес к работе.

Поступила 20 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. The role of big eddies in homogeneous turbulence. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1949, vol. 195, № 1043.
2. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., «Наука», 1967.

УДК 532.516

О КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Р. В. Бирих, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Р. Н. Рудаков

(Пермь)

Проведено детальное численное исследование устойчивости стационарного конвективного течения в вертикальном канале. Применяется метод Бубнова — Галеркина в высоких приближениях.

В работах [1–4] подробно исследованы спектры возмущений и устойчивость стационарного конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры. Решение спектральной задачи для амплитуд нормальных возмущений, проведенное методом Бубнова — Галеркина на ЭВМ, показало, что в широком интервале чисел Прандтля ($0 < P < 10$) плоскопараллельное конвективное движение неустойчиво относительно монотонных возмущений, образующих систему неподвижных вихрей на границе встречных потоков. Критическое число Грассгофа, определяющее порог неустойчивости, слабо меняется в указанном диапазоне чисел Прандтля, что связано с гидродинамической природой кризиса.

Вопрос о колебательной неустойчивости конвективного движения рассматривался уже в работах [5, 6], где использовались простейшие приближения метода Бубнова — Галеркина. Более поздние расчеты [2] показали, что в применении к колебательным ветвям спектра метод сходится весьма медленно, и полученные в [5, 6] количественные результаты относительно колебательной неустойчивости не подтверждаются в более высоких приближениях. Из результатов [2], в частности, с уверенностью следует, что при $P < 10$ кризис связан с монотонными возмущениями.

Рассмотрим вертикальный слой жидкости, ограниченный бесконечными параллельными плоскостями $x = \mp h$, на которых поддерживаются постоянные темпе-