3. Хлыпало Е. И. Нелинейные системы автоматического регулирования. Л., «Энергия», 1967.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
5. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.— Л., «Наука» 1964.

УДК 62—50

ПРОГРАММНОЕ И ПОЗИЦИОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А. И. Субботин

(Свердловск)

Исследуются соотношения между множествами позиционного и программного поглощения. Приведен пример, в котором построение множества позиционного поглощения [1-3] сводится к определению конечного числа множеств программного поглощения [4,5].

Известно, что в общем случае построение множества позиционного поглощения приводит к определению счетной последовательности множеств программного поглощения [1,3,6,7]. Известны также случаи, когда множество позиционного поглощения определяется одной операцией программного поглощения [2,3,5,8].

Рассмотрим линейную дифференциальную игру преследования. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается уравнением

$$dx\,/\,dt = A\,(t)x + u - v \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы; $A\,(t)$ — $n \times n$ матрица с непрерывно зависящими от t компонентами; u и v — управления первого и второго игроков, реализации которых стеснены ограничениями $u\,[t] \in P_t$, $v\,[t] \in Q_t$, где замкнутые выпуклые множества P_t и Q_t кусочно-непрерывно зависят от t.

В фазовом пространстве R_n задано множество M, которое обычно предполагается замкнутым и выпуклым. Решение задачи преследования заключается в построении стратегии первого игрока, гарантирующей приведение фазовой точки $x\,[t]$ на целевое множество M. Предполагается, что преследователю предоставлена информация о реализующейся позиции игры $(t,\ x\,[t])$. Таким образом, стратегии преследования являются некоторыми функциями $U = U\,(t,\ x)$. Классы стратегий игроков, содержащие решение позиционной дифференциальной игры, введены в работах [2,7].

Опишем кратко некоторые элементы экстремальной конструкции, используемой при решении позиционных дифференциальных игр. Пусть каждому значению t $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ поставлено в соответствие некоторое замкнутое множество $W\,(t) \subset R_n$. Предположим, что система множеств $W\,(t)$ обладает свойством сильной u-стабильности [2,7], причем $W\,(\vartheta) \subset M$, $x_0 \in W\,(t_0)$. Тогда можно построить стратегию $U_e = U_e\,(t,\ x)$, экстремальную к системе множеств $W\,(t)$, которая будет гарантировать завершение игры преследования в момент времени $t = \vartheta$. Из определения экстремальной стратегии [2,5,7] видно, что в случае, когда известна система стабильных множеств, построение соответствующей экстремальной стратегии не представляет больших трудностей. Таким образом, основная задача заключается в построении множеств $W\,(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, обладающих перечисленными выше свойствами.

Обратимся к рассмотрению результатов, относящихся к задаче построения искомых сильно u-стабильных множеств $W(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Основным понятием, используемым при исследовании этой задачи, служит понятие множества программного поглощения $W_1(t, \vartheta; M)$ [4,5]. В работах [3,5,8] были указаны условия, при которых система множеств $W_1(t, \vartheta; M)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ обладает свойством сильной u-стабильности. Из определения множества $W_1(t, \vartheta; M)$ вытекает равенство $W_1(\vartheta, \vartheta; M) = M$, поэтому в данном случае и при условии $x_0 \in W_1(t_0, \vartheta; M)$ экстремальная к системе множеств программного поглощения стратегия $U_e = U_e(t, x)$ гарантирует завершение игры преследования в момент времени $t = \vartheta$. Заметим, что построение множеств программного поглощения представляет собой сравнительно простую задачу (соотношения, определяющие эти множества, приведены в работах [4,5,8]). Поэтому в данном случае задача преследования решается эффективно.

В общем случае множества программного поглощения не обладают свойством стабильности, поэтому для построения стабильных множеств приходится вводить понятие позиционного поглощения [2,7]. При помощи системы множеств позиционного поглощения $W_0(t, \vartheta; M)$ можно сформулировать необходимое и достаточное условие завершения игры преследования в момент времени $t = \vartheta$; таким условием служит выполнение включения $x_0 \in W_0(t_0, \vartheta; M)$.

Таким образом, построение множеств позиционного поглощения $W_0(t, \vartheta; M)$ составляет один из основных этапов исследования дифференциальных игр. Известно, что множества $W_0(t, \vartheta; M)$, заданные свойством позиционного поглощения [2,7], можно также определить при помощи попятной процедуры [1,3], причем основным элементом этой процедуры оказывается операция программного поглощения.

Как уже отмечалось выше, построение множеств программного поглощения — сравнительно простая задача. Однако в общем случае для построения множества позиционного поглощения при помощи попятной процедуры приходится вводить счетную последовательность операций программного поглощения. При изучении условий эффективного построения множеств $W_0(t, \vartheta; M)$ возникает вопрос о существовании ситуаций, когда $W_0(t, \vartheta; M) \neq W_1(t, \vartheta; M)$, но для построения множества $W_0(t, \vartheta; M)$ требуется произвести лишь конечное число операций программного поглощения. Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Соответствующий пример приведен ниже. Предварительно отметим, что в этом примере множество позиционного поглощения определяется двумя операциями программного поглощения, при этом получаются следующие соотношения:

$$W_* \neq W_0 \neq W_1, \qquad W_* \subset W_0 \subset W_1$$

где W_* — множество поглощения, определяемое конструкцией работы [9]. Заметим, что множества W_* можно определить, как множества регулярного программного поглощения [10].

Перейдем к рассмотрению примера. Пусть движение двумерного фазового вектора $x[t] = (x_1[t], x_2[t])$ описывается уравнением (1) при $A(t) \equiv 0$. Ограничения на управления имеют следующий вид:

$$u[t] \in (1 + \sqrt{2})G_1 \quad \text{при } t \in [0, 1]$$
$$u[t] \in (1 + \sqrt{2})G_2 \quad \text{при } t > 1$$
$$v[t] \in G_2 \quad \text{при } t \in [0, 1], \qquad v[t] \in G_1 \quad \text{при } t > 1$$

где множества G_1 и G_2 — квадраты

$$G_1 = \{g\colon |g_1| \leqslant 1, \quad |g_2| \leqslant 1\}$$
$$G_2 = \{g\colon |g_1| + |g_2| \leqslant 1\}$$

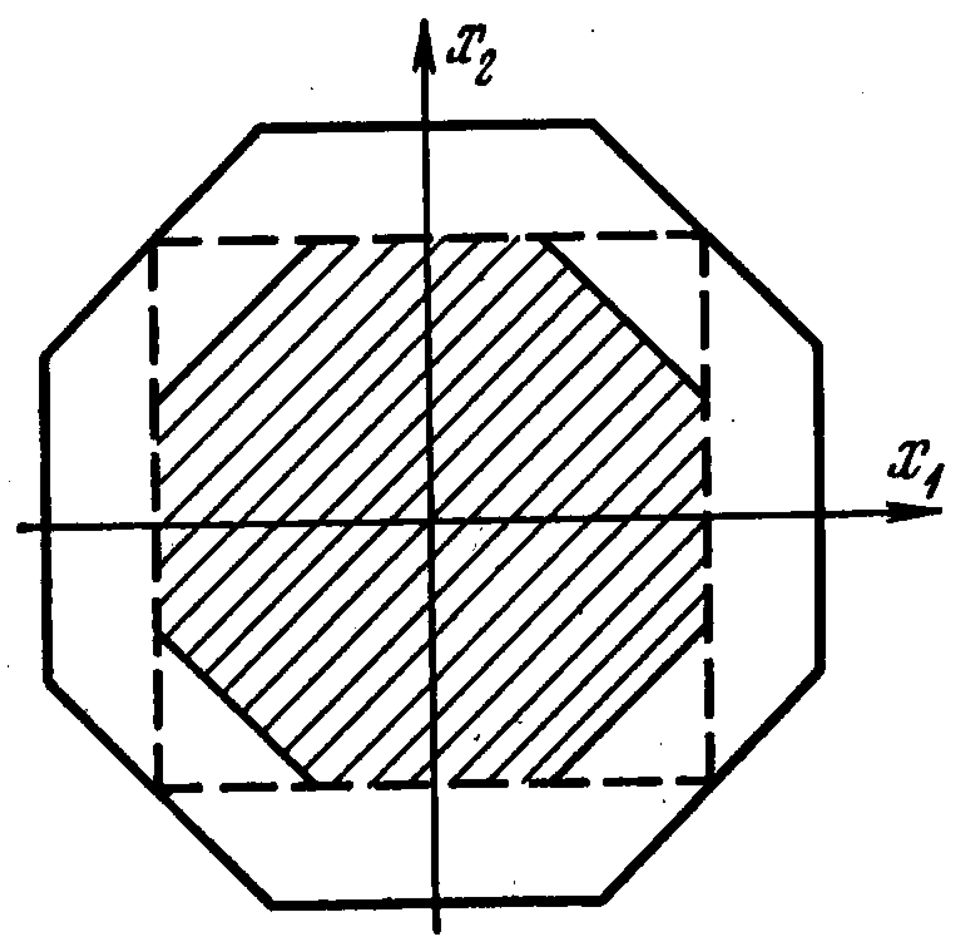
Множество M состоит из единственной точки — начала координат (0, 0).

Заметим, что в этом примере множества, ограничивающие выбор управлений игроков, зависят от времени кусочно-непрерывно, причем в момент времени $t = 1$ эта зависимость имеет разрыв. Данный пример можно изменить так, что ограничения на управления будут постоянными, а система уравнений, описывающая движение фазового вектора $x[t]$, будет нестационарной с коэффициентами, которые от времени зависят непрерывно. При этом основное свойство данного примера сохраняется.

Опишем построение множества $W_0(0, 2; M)$, т. е. в качестве начального момента выберем $t = 0$, конечный момент $\vartheta = 2$. Рассмотрим множества программного поглощения $W_1(t, 2; M)$ при $t \in [1, 2]$. Ограничения на управления на этом промежутке не зависят от времени, матрица $A(t) \equiv 0$, поэтому нетрудно показать, что множество $W_1(t, 2; M)$ будет задаваться соотношением

$$W_1(t, 2; M) = [(2-t)(1+\sqrt{2})\,G_2 + M] \overset{*}{-} (2-t)\,G_1, \quad t \in [1, 2]$$

Здесь $B + C$ означает совокупность всех точек вида $b + c$ $(b \in B,\ c \in C)$, символ $\overset{*}{-}$ означает геометрическое вычитание, т. е. $D = B \overset{*}{-} C = \{d : d + C \subset B\}$. Учитывая, что множество M состоит из единственной точки $(0, 0)$, получим



$$W_1(t, 2; M) = (2-t)H_1, \quad H_1 = \{c : |c_1| + |c_2| \leqslant 2\}$$

Непосредственно проверяется, что система множеств $W_1(t, 2; M)$ $(1 \leqslant t \leqslant 2)$ сильно u-стабильна. Известно, что из этого свойства вытекает равенство $W_1(t, 2; M) = W_0(t, 2; M)$ [7,8]. В частности, при $t = 1$ получаем

$$W_0(1, 2; M) = H_1 \tag{2}$$

Рассмотрим теперь множества $W_0(t, 2; M)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Построив множества программного поглощения $W_1(t, 1; W_0(1, 2; M))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, получаем

$$W_1(t, 1; W_0(1, 2; M)) = [(1+\sqrt{2})(1-t)G_1 + W_0(1, 2; M)] \overset{*}{-} (1-t)G_2 \tag{3}$$

Множества $W_1(t, 2; W_0(1, 2; M))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ также сильно u-стабильны, поэтому справедливо равенство

$$W_0(t, 2; M) = W_1(t, 1; W_0(1, 2; M)) \tag{4}$$

Из соотношений (2) — (4) можно получить, что при $t = 0$ множество $W_0(t, 2; M)$ будет квадратом со стороной $l_1 = 2 + 2\sqrt{2}$.

Сравним множество $W_0(0, 2; M)$ с множеством

$$W_1(0, 2; M) = [(1+\sqrt{2})\,G_1 + (1+\sqrt{2})\,G_2] \overset{*}{-} (G_1 + G_2)$$

Оно будет правильным восьмиугольником со стороной $l_2 = 2\sqrt{2}$.

Наконец, определим множество $W_*(0, 2)$ в соответствии с подходом, изложенным в работе [9]. Получим, что

$$W_*(0, 2) = [(1+\sqrt{2})\,G_1 \overset{*}{-} G_2] + [(1+\sqrt{2})\,G_2 \overset{*}{-} G_1]$$

Множество $W_*(0, 2)$ оказывается восьмиугольником со стороной $l_3 = 2$.

Множество программного поглощения $W_1(0, 2; M)$ содержит множество $W_0(0, 2; M)$, которое, в свою очередь, содержит множество $W_*(0, 2)$. На фигуре граница множества $W_1(0, 2; M)$ изображена сплошной линией, граница множества $W_0(0, 2; M)$ — штриховой, множество $W_*(0, 2)$ заштриховано.

Итак, в данном примере множество позиционного поглощения определяется двумя операциями программного поглощения.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и обсуждение работы.

Поступила 25 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
3. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
4. Красовский Н. Н. Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
6. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.
8. Красовский Н. Н. К теории дифференциальных игр. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
9. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
10. Батухтин В. Д., Субботин А. И. Об условиях завершения игры преследования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 1.

УДК 532.517.4 : 538.4

ИНВАРИАНТЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Е. А. Кузнецов

(Новосибирск)

В несжимаемой гидродинамике в случае однородной, но неизотропной турбулентности были найдены [1] инварианты вида

$$\int \langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{R})\, v_j(\mathbf{r})\rangle\, R_m R_n d\mathbf{R}$$

где $\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{R}) v_j(\mathbf{r})\rangle$ — корреляционная функция скоростей. Это семейство законов сохранения есть обобщение инварианта Лойцянского [2] на случай произвольной однородной турбулентности. Аналоги этих инвариантов удается найти и в несжимаемой магнитной гидродинамике для однородной неизотропной среды. Анизотропия обусловлена наличием постоянного магнитного поля H_0.

Рассмотрим уравнения несжимаемой магнитной гидродинамики, перейдя к новым переменным

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - (V_A\nabla)\, h_i = -\nabla_i P - \nabla_k (v_k v_i - h_k h_i) + \nu\Delta v_i$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} - (V_A\nabla)\, v_i = \nabla_k (h_k v_i - v_k h_i) + \nu_m \Delta h_i$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{h} = 0$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}-\mathbf{H}_0}{(4\pi\rho)^{1/2}}, \qquad P = \frac{1}{\rho}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right), \qquad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \tag{1}$$

Здесь V_A — альфвеновская скорость, ν — вязкость, ν_m — магнитная вязкость.

В дальнейшем будем рассматривать турбулентность в рамках такой системы. В этой системе в области прозрачности могут распространяться волны с законом дис-