УДК 531.36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ОДНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В. Ю. Розенштейн

(Ленинград)

Предлагается способ определения коэффициента гармонической линеаризации нелинейности одной квазилинейной автоколебательной системы по кривой изменения амплитуды посредством обобщенного интерполирования. Доказывается теорема, гарантирующая в аналитическом случае равномерную сходимость интерполяционного процесса к искомой функции.

Определение динамических характеристик нелинейных объектов рассматривалось в работе [1]. Благодаря хорошо разработанной технике применения метода гармонической линеаризации [2,3] особое значение имеет определение коэффициентов гармонической линеаризации нелинейных объектов.

Рассмотрим уравнение квазилинейной автоколебательной системы

$$y^{\cdot\cdot} + \omega^2 y = \varepsilon f(y) y^{\cdot} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Известно [4], что первое приближение к решению (1) с точностью до величин порядка ε^2 есть $y = x \cos \psi$, где ψ — равномерно вращающаяся фаза колебаний, а амплитуда колебаний находится из уравнения

$$x^{\cdot} = \varepsilon\, \Phi(x) \tag{2}$$

Если в системе (1) самовозбуждаются автоколебания с установившейся амплитудой b, то $x = 0$ — неустойчивое положение равновесия для (2), а $x = b$ — устойчивое; при этом

$$\Phi'(0) > 0, \qquad \Phi'(b) < 0 \tag{3}$$

Пусть $\Phi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция при $x \in [0, b]$, имеет только простые корни, и выполнены условия (3). Тогда (2) запишется в виде

$$x^{\cdot} = x(b - x)\varphi(x) \tag{4}$$

где малый параметр $\varepsilon > 0$ отнесен к функции φ. Причем

$$\varphi(x) > 0, \text{ для всех } x \in [0, b] \tag{5}$$

Заметим, что нелинейность в (1) статически не определяется, а $(b - x)\varphi(x)$ представляет коэффициент гармонической линеаризации нелинейности системы. Получив экспериментально процесс установления автоколебаний в системе (1) и предполагая, что кривая изменения амплитуды колебаний есть решение (4) $x(t)$, $x(0) = x_0 \in (0, b)$, которое при условии (5) строго монотонно возрастает при $t \in [0, \infty)$, можно по кривой $x(t)$ найти правую часть (4) посредством приближенного дифференцирования и последующего интерполирования.

Предлагается более эффективный путь нахождения правой части (4), использующий информацию, заключенную в качественной картине поведения решений (4).

Теорема. Пусть для уравнения (4), удовлетворяющего условиям (5), известна интегральная кривая $t(x)$, $t(x_0) = 0$; $x_0 \in (0, b/2)$ — малое начальное возмущение. Пусть аналитическое продолжение функции $t(x)$ на комплексную плоскость дает функцию, регулярную внутри эллипса с фокусами в точках x_0, $b - x_0$ и суммой полуосей $(b/2 - x_0)R$, где $R > 1$ выбрано таким образом, что точки 0, b не принадлежат этому эллипсу.

Тогда функция $\varphi(x)$ на промежутке $[x_0,\ b - x_0]$ представляется в виде

$$\varphi(x) = 1 / P_n(x) + \alpha_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$$

$$\alpha_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при } n \to \infty, \quad x \in [x_0,\ b - x_0]$$

и справедлива оценка

$$|\varphi(x) - 1 / P_n(x)| \leqslant M / \rho^{n+1} \qquad (1 < \rho < R, \quad M = \text{const})$$

При этом коэффициенты $P_n(x)$ однозначно определяются по значениям $t(x)$ из промежутка $[x_0,\ b - x_0]$.

Лемма. Пусть $f(x)$ — бесконечно-дифференцируемая функция при $x \in [0,\ 1]$ и $f^{(n)}(x) \neq 0$ при всех $x \in (0,\ 1)$, $n = 1,\ 2\ldots$, а $f(0) = 0$. Тогда функции $f,\ x,\ x^2,\ \ldots x^n$ образуют на промежутке (0,1) систему Чебышева для любого n.

Доказательство. Докажем, что для любого набора значений $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n+1}$, $x_i \in (0,\ 1)$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ при любом $n = 1,2,\ \ldots$ определитель Δ_n порядка $n + 1$, каждая i-я строка которого имеет вид

$$f(x_i)\ x_i\ x_i^2\ \ldots\ x_i^n$$

отличен от нуля.

Доказательство проведем по индукции.

Пусть $\Delta_1 = 0$. Тогда существуют числа $\lambda_1,\ \lambda_2$, не равные нулю, такие, что они служат коэффициентами обращающейся в нуль линейной комбинации столбцов определителя Δ_1. Рассмотрим функцию $F(x) = \lambda_1' f(x) + \lambda_2 x$. На промежутке $[0,\ 1)$ она имеет три корня $0,\ x_1,\ x_2$. По теореме Ролля $F'(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2$ имеет два разных корня $\xi_1,\ \xi_2 \in (0,\ 1)$. Тогда определитель $f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = 0$ и $f''(\xi) = 0$ для $\xi \in (\xi_1,\ \xi_2)$, что противоречит условию. Отсюда следует, что $\Delta_1 \neq 0$.

Пусть $\Delta_{n-1} \neq 0$. Предположим, что $\Delta_n = 0$ вопреки утверждению леммы. Тогда между столбцами S_i определителя Δ_n существует зависимость $\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot S_{n+1} = 0$, причем $\lambda_1 \neq 0$, так как иначе был бы равен нулю некоторый определитель Вандермонда, и $\lambda_{n+1} \neq 0$ по индуктивному предположению. Рассмотрим функцию $F(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_{n+1} x^n$. Точки $0,\ x_1,\ \ldots\ x_{n+1}$ — корни этой функции. Тогда $F_{(x)}^{(n)} = \lambda_1 f_{(x)}^{(n)} + n!\ \lambda_{n+1}$ имеет два корня $\xi_1,\ \xi_2 \in (0,1)$ и $f^{n+1}(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (0,\ 1)$. Полученное противоречие доказывает, что $\Delta_n \neq 0$, а вместе с этим и лемму.

Проведем доказательство теоремы.

Заметим, что

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z(b - z)\,\varphi(z)}$$

и положим $1/\varphi(z) = f(z)$. Очевидно, что $f(z)$, как функция комплексного переменного, регулярна в той же области, что и $t(x)$, так как эта область не содержит точек 0 и b.

На промежутке $[x_0,\ b - x_0]$ введем треугольную бесконечную матрицу узлов интерполирования Фейера [5] следующим образом:

$$x_k^{(n)} = x_0 + (b/2 - x_0)\,[1 - \cos \pi(2k - 1)/ 2\,(n + 1)], \qquad \begin{matrix} k = 1,\ 2,\ \ldots\ n + 1 \\ n = 1,\ 2,\ \ldots \end{matrix}$$

Построим интерполяционный процесс с полиномом $P_n(x)$ степени n, полагая

$$t(x_k) = \int_{x_0}^{x_k} P_n(z) / z(b - z)\,dz, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n + 1$$

Здесь и далее опускаем верхний индекс в обозначениях узлов.

Относительно коэффициентов полинома $P_n(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n$ получим линейную систему уравнений. Определитель этой системы можно представить в виде произведения постоянного множителя на определитель Δ_n' порядка $n+1$, каждая i-я строка которого

$$\ln x_i / x_0 \ln(b - x_0)/(b - x_i) \quad x_i - x_0 \ \ldots \ x_i^{n-1} - x_0^{n-1}$$

Определитель Δ_n' отличен от нуля для любого n. Это проверяется рассуждением, в точности повторяющим проведенное при доказательстве леммы, причем λ_1 и λ_2 отличны от нуля на основании леммы, а определитель

$$\xi_1^{-n}(b - \xi_2)^{-n} - \xi_2^{-n}(b - \xi_1)^{-n}$$

где $\xi_1 \neq \xi_2$ и $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, b - x_0)$, не равен нулю.

Таким образом, при любом фиксированном n коэффициенты полинома P_n однозначно определяются по значениям $t(x_k)$.

Построенный полином будет интерполяционным для $f(z)$, так как

$$t(x_k) = \int_{x_0}^{x_k} f(z)/z(b - z)\,dz = \int_{x_0}^{x_k} P_n(z)/z(b - z)\,dz, \qquad k = 1, 2, \ldots n+1$$

причем узлы интерполяции функции $f(z)$ лежат строго между узлами x_k. Выбранные узлы x_k — узлы Фейера, поэтому узлы интерполяции функции $f(z)$ — также узлы Фейера, что следует из [5] (лемма 1, стр. 29). На основании следствия к теореме 1 (см. [5], стр. 36) получим сходимость интерполяционных полиномов P_n к функции f с оценкой $|P_n(x) - f(x)| \leqslant M_1/\rho^{n+1}$, для всех $x \in [x_0, b - x_0]$, где $1 < \rho < R$, $M_1 = \text{const}$.

Оценка теоремы получается по непрерывности и положительности $f(x)$ на промежутке $[x_0, b - x_0]$.

Замечание. Построенный интерполяционный процесс обеспечивает довольно быструю сходимость при достаточной гладкости функции $t(x)$ и специальном выборе узлов. При практическом нахождении функции $\varphi(x)$ может быть целесообразно искать для $t(x)$ обобщенный полином наилучшего приближения при некоторой фиксированной степени n

$$Q_n(t; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \psi_k(x)$$

$$\psi_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{z^k}{z(b - z)}\,dz, \qquad k = 0, 1, \ldots n$$

минимизируя какой-нибудь критерий близости функций $t(x)$ и $Q_n(t; x)$ на множестве всех известных значений $t(x)$; здесь $\psi_k(x)$ — линейно независимые функции. Практически это будет ряд дискретных значений моментов времени, и нахождение наилучшего $Q_n(t; x)$ может быть успешно осуществлено методами математического программирования. Приближенным представлением коэффициента гармонической линеаризации будет функция $(b - x)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n)^{-1}$.

Автор благодарит Н. М. Матвеева и Л. Б. Клебанова за внимание к работе.

Поступила 3 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский Н. М., Дейч А. М. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
2. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.

3. Хлыпало Е. И. Нелинейные системы автоматического регулирования. Л., «Энергия», 1967.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
5. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.— Л., «Наука» 1964.

УДК 62—50

ПРОГРАММНОЕ И ПОЗИЦИОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А. И. Субботин

(Свердловск)

Исследуются соотношения между множествами позиционного и программного поглощения. Приведен пример, в котором построение множества позиционного поглощения [1–3] сводится к определению конечного числа множеств программного поглощения [4,5].

Известно, что в общем случае построение множества позиционного поглощения приводит к определению счетной последовательности множеств программного поглощения [1,3,6,7]. Известны также случаи, когда множество позиционного поглощения определяется одной операцией программного поглощения [2,3,5,8].

Рассмотрим линейную дифференциальную игру преследования. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается уравнением

$$dx \,/\, dt = A\,(t)x + u - v \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы; $A\,(t)$ — $n \times n$ матрица с непрерывно зависящими от t компонентами; u и v — управления первого и второго игроков, реализации которых стеснены ограничениями $u\,[t] \in P_t$, $v\,[t] \in Q_t$, где замкнутые выпуклые множества P_t и Q_t кусочно-непрерывно зависят от t.

В фазовом пространстве R_n задано множество M, которое обычно предполагается замкнутым и выпуклым. Решение задачи преследования заключается в построении стратегии первого игрока, гарантирующей приведение фазовой точки $x\,[t]$ на целевое множество M. Предполагается, что преследователю предоставлена информация о реализующейся позиции игры $(t,\ x\,[t])$. Таким образом, стратегии преследования являются некоторыми функциями $U = U\,(t,\ x)$. Классы стратегий игроков, содержащие решение позиционной дифференциальной игры, введены в работах [2,7].

Опишем кратко некоторые элементы экстремальной конструкции, используемой при решении позиционных дифференциальных игр. Пусть каждому значению t $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ поставлено в соответствие некоторое замкнутое множество $W\,(t) \subset R_n$. Предположим, что система множеств $W\,(t)$ обладает свойством сильной u-стабильности [2,7], причем $W\,(\vartheta) \subset M$, $x_0 \in W\,(t_0)$. Тогда можно построить стратегию $U_e = U_e\,(t,\ x)$, экстремальную к системе множеств $W\,(t)$, которая будет гарантировать завершение игры преследования в момент времени $t = \vartheta$. Из определения экстремальной стратегии [2,5,7] видно, что в случае, когда известна система стабильных множеств, построение соответствующей экстремальной стратегии не представляет больших трудностей. Таким образом, основная задача заключается в построении множеств $W\,(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, обладающих перечисленными выше свойствами.