Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК $624.131+534.222.2$

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА И СХЕМА НЕСЖИМАЕМОСТИ

Н. В. Зволинский

(Москва)

Показано, что в объемно-сжимаемой среде (движение которой описывается скалярным волновым уравнением) предельный средний импульс давления есть гармоническая функция точки, поэтому динамические поля давления и скорости, рассчитанные по «схеме несжимаемости», описывают некоторую интегральную асимптотику при $t \to \infty$ для соответствующей сжимаемой среды.

Как показывают эксперименты [1], движение сплошной среды, сопутствующее взрыву, можно разделить на два этапа. Первый, весьма кратковременный, характеризуется распространением волны напряжения и сравнительно небольшим нарастанием смещений частиц. На этом этапе появляются отражения и могут возникнуть разрушения. На втором этапе развивается движение частиц среды, частично уже разрушенной. Это — баллистическая стадия, на которой происходит выброс при некамуфлетном взрыве или метание отдельных блоков при направленном взрыве. При завершении первого этапа вырабатывается то поле скоростей, которое служит «начальным» для баллистической стадии.

Предполагается, что на первом этапе движение определяется, главным образом, инерционным сопротивлением среды, так что сжимаемость играет второстепенную роль. Так как давление в начальной стадии взрыва очень велико, то естественно сделать и второе предположение — считать прочностные свойства среды также второстепенными и описывать напряженное состояние шаровым тензором давления. Для первой стадии действия взрыва возникает такая] система предположений: а) среда несжимаема, б) среда идеальна (нет касательных напряжений), в) деформации и смещения остаются малыми. Совокупность этих гипотез будем называть схемой несжимаемости.

В рамках этой схемы рассмотрены некоторые прикладные задачи, причем результаты анализа в ряде случаев оказались в удовлетворительном согласии с экспериментом [2]. Для выяснения природы и области применимости схемы несжимаемости целесообразно выяснить ее отношение к родственным задачам, в которых учитывалось бы распространение волн. Одному из возможных сопоставлений посвящена данная работа.

1. Пусть задана произвольная область B с границей S. Граница эта может состоять из одной или нескольких кусочно-гладких поверхностей. Область B может простираться в бесконечность; для нее должна быть разрешима задача Дирихле для уравнения Лапласа. Область B заполнена идеальной сжимаемой средой, в которой (при малых деформациях) имеет место линейный закон сжатия

$$\partial p / \partial t = -k^2 \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad k^2 > 0 \tag{1.1}$$

где $p(M, t)$—давление, $\mathbf{v}(M, t)$—скорость частицы.

Пусть в точках граничной поверхности S задано импульсивное давление

$$p(Q, t) = f(Q, t), \quad Q \in S \tag{1.2}$$
$$f(Q, t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad T < t$$

Начальные условия предполагаются нулевыми

$$p(M, 0) = 0, \quad \mathrm{v}(M, 0) = 0, \quad M \in B + S$$

Требуется найти поля давления и скорости при $t > 0$.

Обращаясь к уравнению движения (в линейном приближении)

$$\rho_0 \partial \mathrm{v} / \partial t + \operatorname{grad} p = 0 \tag{1.3}$$

и исключая $\bar{v}(M, t)$ из (1.1) и (1.3), получим для $p(M, t)$ волновое уравнение

$$\Delta p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \qquad a^2 = \frac{k^2}{\rho_0} \tag{1.4}$$

Здесь ρ_0—плотность, предполагаемая постоянной.

Итак, задача определения движения среды под действием заданной граничной нагрузки свелась к смешанной краевой задаче для волнового уравнения. После определения $p(M, t)$ поле скоростей находится по формуле

$$\mathrm{v}(M, t) = -\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \operatorname{grad} p(M, \tau)\, d\tau \tag{1.5}$$

Схема несжимаемости предлагает более простую процедуру. А именно,— считать среду несжимаемой и предполагать, что существует характерное время τ $(T \ll \tau)$ установления процесса. Тогда для импульса $\Pi(M)$ давления

$$\Pi(M) = \int_0^\tau p(M, t)\, dt$$

из условия несжимаемости получим $\Delta \Pi = 0$. Из (1.2) возникают граничные значения импульса

$$\Pi(Q) = \int_0^\tau f(Q, t)\, dt$$

В результате схема несжимаемости сводит задачу к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Для поля скорости предлагается формула

$$\mathrm{v} = -\rho_0^{-1} \operatorname{grad} \Pi \tag{1.6}$$

(перестановка интеграла и производной).

Функции p и v, вычисленные таким путем, не зависят от времени; это соответствует представлению о чрезвычайной краткости того времени, за которое вырабатывается асимптотика процесса.

2. Введем в рассмотрение импульс $\Pi(M, t)$ давления, средний импульс $P(M, t)$ давления и предельный средний импульс $P_0(M)$ давления

$$\Pi(M, t) = \int_0^t p(M, \tau)\, d\tau$$

$$P(M,t)=\frac{1}{t}\int_0^t \Pi(M,\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

$$P_0(M)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \Pi(M,\tau)\,d\tau\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t p(M,\tau)(t-\tau)\,d\tau\right)$$

Будем рассматривать также среднюю скорость $\mathbf{V}(M, t)$ частиц и предельную среднюю скорость $\mathbf{V}_0(M)$

$$\mathbf{V}(M,t)=\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{v}(M,\tau)\,d\tau,\qquad \mathbf{V}_0(M)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{V}(M,t) \tag{2.2}$$

Предположим, что указанные пределы существуют.

Основной результат данной работы—доказательство следующего утверждения: если $p(M, t)$—решение уравнения (1.4) при граничном условии (1.2) и нулевых начальных условиях, удовлетворяющее предельному соотношению [1]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p(M,t)}{t}=0,\qquad M\in B$$

равномерно в B, то $P_0(M)$—гармоническая в B функция, принимающая на границе S значения

$$P_0(Q)=F_0(Q),\quad Q\in S,\quad F_0(Q)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(Q,\tau)(t-\tau)\,d\tau\right)$$

При этом $\mathbf{V}_0(M)=-\rho_0^{-1}\operatorname{grad}P_0(M)$.

Доказательство. Допустим, что функция $P(M, t)$ — разрывная, так как при распространении волн от граничного (или внутреннего точечного) импульса воздействия будут распространяться поверхности разрыва, которые будут отражаться от границы области B. Пусть $N(M, t)$ — число поверхностей разрыва, прошедших за промежуток времени $(0, t)$ через точку M. При дифференцировании функции $P(M, t)$ по координатам нельзя операцию дифференцирования просто перенести под знак интеграла. Обозначив через $t_j(M)$ момент времени, в который j-я поверхность разрыва проходит через точку M, разобьем промежуток интегрирования на части

$$P(M,t)=\frac{1}{t}\int_0^{t_1} p(M,\tau)(t-\tau)\,d\tau+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_j}^{t_{j+1}} p(M,\tau)(t-\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{t}\int_{t_N}^{t} p(M,\tau)(t-\tau)\,d\tau$$

Учитывая зависимость пределов интегрирования от координат, вычислим оператор Лапласа от $P(M, t)$, пользуясь формулой $\Delta=\operatorname{div}(\operatorname{grad})$. Получим

$$\Delta P(M,t)=\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{t_j}{t}\right)\left\{[p]_j\,\Delta t_j+\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_j\operatorname{grad}^2 t_j+2\,(\operatorname{grad}p_j\cdot\operatorname{grad}t_j)\right\}-$$
$$-\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}[p]_j\operatorname{grad}^2 t_j+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\Delta p\,(t-\tau)\,d\tau+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Delta p\,(t-\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{t}\int_{t_N}^{t}\Delta p\,(t-\tau)\,d\tau$$

[1] Весьма вероятно, что это условие излишне и само вытекает из финитности и ограниченности граничной функции. В данной статье этот вопрос не исследуется.

Здесь скобками обозначены скачки функций на поверхности разрыва, т. е. $[p]_j = p_j^- - p_j^+$ и т. д.

В этой формуле возможны упрощения, вытекающие из следующего. Функция $p(M, t)$ — решение уравнения (1.4), поэтому

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta p\,(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{a^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial p}{\partial t}(t-\tau)\right]_{t_j}^{t_{j+1}} + \frac{1}{a^2}[p]_{t_j}^{t_{j+1}};$$

Поверхность разрыва в пространстве (x, y, z, t) есть характеристика, уравнение которой $t = t_j(M)$, поэтому $\operatorname{grad} t_j = \mathbf{n}_j / a$, где $\mathbf{n}_j$ — вектор нормали в точке M к поверхности разрыва. Отсюда получаем

$$(\operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} t_j) = \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial s}$$

если s — длина дуги, отсчитываемая вдоль луча (луч рассматривается в координатном пространстве).

Приводя подобные члены, получим

$$\Delta P(M, t) = \sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{t_j}{t}\right)\left\{[p]_j \Delta t_j + \frac{2}{a}\left(\left[\frac{\partial p}{\partial s}\right]_j + \frac{1}{a}\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]_j\right)\right\} + \frac{p(M, t)}{at} \tag{2.3}$$

Все слагаемые, кроме последнего, в формуле (2.3) равны нулю. Это следует и условий на фронтах разрыва решений волнового уравнения, которые известны; общую теорию для гиперболических уравнений можно найти, например ([3], гл. 4). Излагаем кратко такой вариант вывода, который приводит непосредственно к нужной форме результата. Введем лучевую ортогональную систему координат α, β, s, связанную с некоторой поверхностью разрыва. Через s обозначена длина дуги, отсчитываемая вдоль луча, α и β — криволинейные координаты на поверхности разрыва. Координатные линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ — линии кривизны на этой поверхности.

Введем систему функций

$$\eta_k(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0 \\ \tau^k, & \tau \leqslant 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

В окрестности поверхности разрыва представляем $p(M, t)$ в виде разложения

$$p(M, t) = p_0^-\eta_0(s - s_1) + p_1^-\eta_1(s - s_1) + \ldots + p_0^+\eta_0(s_1 - s) + p_1^+\eta_1(s_1 - s) + \ldots \tag{2.4}$$

Здесь верхние индексы плюс и минус означают предельные значения на двух сторонах поверхности; коэффициенты p_k^-, p_k^+ — функции от α, β, $s_1 \equiv at$. Требование того, чтобы $p(M, t)$ было решением уравнения (1.4), налагает условия на коэффициенты p_k^-, p_k^+; эти условия можно получить, «подставляя» разложение (2.4) в уравнение (1.4). Обозначим совокупность членов разложения, в которой «старшим» является член, содержащий η_k, через $E(\eta_k)$ так, что, например

$$E(\eta_k) = a_k\eta_k + a_{k+1}\eta_{k+1} + a_{k+2}\eta_{k+2} + \ldots$$

Подставляя в уравнение (1.4), получим

$$\Delta p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad} p - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial(H_\alpha H_\beta)}{\partial s}(p_0^- - p_0^+) + 2\left(\frac{\partial p_0^-}{\partial s_1} - \frac{\partial p_0^+}{\partial s_1}\right)\right\}\delta(s - s_1) + E(\eta_0) = 0$$

Отсюда, в качестве необходимого условия, следует

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial(H_\alpha H_\beta)}{\partial s}(p_0^- - p_0^+) + 2\left(\frac{\partial p_0^-}{\partial s_1} - \frac{\partial p_0^+}{\partial s_1}\right) = 0$$

Или с учетом того, что

$$p_0^- - p_0^+ = [p], \qquad \frac{\partial p_0^-}{\partial s_1} - \frac{\partial p_0^+}{\partial s_1} = \left[\frac{\partial p}{\partial s}\right] + \frac{1}{a}\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]$$

$$\operatorname{grad} t_j = \frac{\mathbf{n}_j}{a}, \qquad \Delta t_j = \operatorname{div}(\operatorname{grad} t_j) = \frac{1}{a}\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\frac{\partial(H_\alpha H_\beta)}{\partial s}$$

получим

$$[p]\,\Delta t_j + \frac{2}{a}\left(\left[\frac{\partial p}{\partial s}\right] + \frac{1}{a}\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\right) = 0$$

Таким образом, (2.3) приводит к уравнению

$$\Delta P(M, t) = p(M, t) / at \tag{2.5}$$

Пусть $G(M, M_1)$ — функция Грина для области B. Тогда из (2.5) следует

$$P(M, t) = \int\limits_B \frac{1}{at}\, p(M_1, t)\, G(M, M_1)\, dx_{M_1} + H(M, t) \tag{2.6}$$

где $H(M, t)$ — гармоническая в B функция, удовлетворяющая граничному условию на S

$$H|_S = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(Q, \tau)(t - \tau)\, d\tau$$

Если $f(Q, t)$ — финитна (как предположено) и равномерно ограничена, то сходимость граничных значений при $t \to \infty$ равномерная, как следует из оценки ($T < t, t_1$)

$$\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^T f(Q, \tau)(t - \tau)\, d\tau - \frac{1}{t_1}\int\limits_0^T f(Q, \tau)(t_1 - \tau)\, d\tau\right| < \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_1}\right)\mathrm{const}$$

По теореме Вейерштрасса гармоническая функция $H(M, t)$ при $t \to \infty$ сходится равномерно в $B + S$ к пределу $H_0(M)$, который также есть гармоническая функция. Интеграл в (2.6) стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} P(M, t) = P_0(M) = H_0(M)$$

и, следовательно, $P_0(M)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию $P_0|_S = F_0(Q)$, что и требовалось доказать [1].

Выясним, как связана предельная средняя скорость $\mathbf{V}_0(M)$ с предельным импульсом $P_0(M)$. Почленное интегрирование (1.3) дает

$$\int\limits_0^t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}\, d\tau = \int\limits_0^{t_1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}\, d\tau + \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}\, d\tau + \int\limits_{t_N}^t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}\, d\tau =$$

$$= \mathbf{v}(M, t) + \sum_{j=1}^N [\mathbf{v}]_j = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad}\int\limits_0^t p(M, \tau)\, d\tau + \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} t_j \sum_{j=1}^N [p]$$

[1] Я благодарен Г. И. Эскину, заметившему, что доказательство может быть упрощено привлечением понятия обобщенного решения дифференциального уравнения.

Так как $[\mathbf{v}] = (\mathbf{v}_j^- - \mathbf{v}_j^+) \uparrow\uparrow \mathbf{n}_j$, а $\operatorname{grad} t_j = \mathbf{n}_j / a$, то, принимая во внимание еще условие на разрыве $[p]_j = \rho_0 a [v]_j$, получим

$$\mathbf{v}(M, t) = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \int_0^t p(M, \tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

Итак, здесь оказалось возможным просто переставить операцию grad и интеграл, несмотря на наличие поверхностей разрыва. Интеграл в (2.7) непрерывен, поэтому

$$\mathbf{V}(M, t) = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau p(M, \tau_1)\, d\tau_1 \right)$$

Устремляя $t \to +\infty$, получим

$$\mathbf{V}_0(M) = -\rho_0^{-1} \operatorname{grad} P_\theta(M)$$

3. Из сказанного следует, что схему несжимаемости можно интерпретировать как некоторую интегральную асимптотику при $t \to \infty$ для соответствующей задачи о сжимаемой среде. Успешное применение схемы несжимаемости, как приближенного метода, требует, чтобы вопрос, на который надо ответить, зависел бы от интегрального эффекта взрыва и чтобы скорость распространения волн была велика; другими словами, чтобы время пробега волной характерного расстояния было порядка времени действия источника. При этом наблюдатель, не вникающий в детали процесса, воспринимает уже готовый результат.

Неосторожное применение схемы несжимаемости может привести к неверным выводам. В частности, кинетическая энергия, рассчитанная по предельной скорости $\mathbf{V}_0$, может отличаться от предельной истинной средней энергии. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Представляло бы интерес провести аналогичное асимптотическое исследование в задачах динамической теории упругости. При этом должна сформироваться некоторая статическая задача, описывающая интегральную асимптотику.

Поступила 21 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов В. Н., Адушкин В. В., Костюченко В. Н., Николаевский В. Н., Ромашов А. Н., Цветков В. М. Механический эффект подземного взрыва. Под ред. М. А. Садовского, М., «Недра», 1971.
2. Кузнецов В. М. Гидродинамические модели взрыва в грунте. В сб.: Некоторые проблемы математики и механики. М., «Наука», 1970.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.