Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 539.3:534.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Л. В. Андреев, В. И. Моссаковский, Н. И. Ободан

(Днепропетровск)

Рассматривается задача об оптимальном, с точки зрения веса, законе распределения толщины по длине цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметричным внешним давлением, когда ее разрушение происходит вследствие потери устойчивости. Для решения задачи применен аппарат обобщенного принципа максимума [1].

1. Задача формулируется в терминах теории оптимальных процессов. Состояние оболочки в процессе нагружения задается фазовыми координатами φ_j ($j = 1, 2, \ldots, 6$) в каждый момент α, где α—безразмерная координата длины. Движению оболочки соответствует изменение фазовых координат с изменением α. Этим процессом можно управлять, изменяя толщину оболочки $\delta(\alpha)$. За управляющую функцию принимается высшая производная $\delta^n(\alpha)$ [2], входящая в уравнения движения (устойчивости), а функции $\delta(\alpha), \ldots, \delta^{n-1}(\alpha)$—за фазовые координаты. Задача состоит в отыскании такой функции $\delta(\alpha)$, удовлетворяющей уравнениям устойчивости, а также граничным условиям и ограничениям, чтобы достигала минимума величина

$$J = \int\limits_0^{L/R} \delta(\alpha)\, d\alpha$$

Здесь R, L — соответственно радиус и длина оболочки.

Ограничения накладываются из конструктивных или технологических соображений, а также из условия прочности $\delta(\alpha) \geqslant \delta_{\min}$ и из дополнительного условия, связанного с выбранной моделью расчета оболочки $\delta^n(\alpha) \leqslant a$.

Оптимальная оболочка отыскивается в классе допустимых оболочек, которые могут быть рассчитаны с помощью гипотезы Кирхгофа—Лява. Поэтому за уравнения траектории принимаются уравнения устойчивости классической теории оболочек, а на величину $\delta^n(\alpha)$ накладывается ограничение из условия [3]

$$\frac{1}{R}\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} \leqslant \frac{\delta_{\max}}{R} \tag{1.1}$$

При исследовании других классов оболочек, например подкрепленных, необходимо задавать соответствующие ограничения и уравнения устойчивости.

2. Уравнения устойчивости, полученные с использованием гипотез полубезмоментной теории для оболочек с произвольным изменением тол-

щины, несимметричной относительно координатной поверхности, имеют вид

$$\Delta\left[D(\alpha,\beta)\,\Delta\varphi_*(\alpha,\beta)\right]+R^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[\frac{E\delta(\alpha,\beta)}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi_*(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}\right]+R\Delta\left[B(\alpha,\beta)\frac{\partial^2\varphi_*(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}\right]+$$

$$+R\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[B(\alpha,\beta)\,\Delta\varphi_*(\alpha,\beta)\right]+q(\alpha)\,R\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Delta\varphi_*(\alpha,\beta)=0$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right),\quad B(\alpha,\beta)=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left[\delta^2(\alpha,\beta)-\delta_{\min}\delta(\alpha,\beta)\right] \tag{2.1}$$

$$D(\alpha,\beta)=\frac{E}{3(1-\mu^2)}\left[\delta^3(\alpha,\beta)-\frac{3}{2}\delta_{\min}\delta^2(\alpha,\beta)+\frac{3}{4}\delta_{\min}^2\delta(\alpha,\beta)\right]$$

Здесь β—дуговая координата, $q(\alpha)$—внешняя нагрузка, E—модуль Юнга, μ—коэффициент Пуассона. Толщина принимается постоянной в дуговом направлении.

Уравнение (2.1) после разделения переменных подстановкой $\varphi_*(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha)\cos k\beta$ записывается в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка (в фазовых координатах)

$$\varphi_1^{\cdot}=\varphi_2,\quad \varphi_2^{\cdot}=\varphi_3,\quad \varphi_3^{\cdot}=\varphi_4,\quad \varphi_4^{\cdot}=F(\alpha),\quad \varphi_5^{\cdot}=\varphi_6,\quad \varphi_6^{\cdot}=u \tag{2.2}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{\varphi_5}\sum_{j=1}^{4}F_j(\alpha)\varphi_j$$

$$F_1(\alpha)=\frac{qR}{\delta_0E}(1-\mu^2)k^4(k^2-1)-\frac{\lambda^2}{12}(4\varphi_5^3-6\varphi_5^2+3\varphi_5)-$$

$$-\frac{\lambda}{2}(2\varphi_6^2-2\varphi_5u-u),\quad F_2(\alpha)=-\lambda(2\varphi_5\varphi_6-\varphi_6)$$

$$F_3(\alpha)=-u-\lambda(\varphi_5^2-\varphi_5),\quad F_4(\alpha)=-2\varphi_6$$

$$\delta(\alpha)=\delta_0\varphi_5,\quad \lambda=\frac{\delta_0}{R}k^2(k^2-1)$$

Граничные условия для решения системы (2.2) запишутся из условия шарнирного опирания на краях оболочки

$$\varphi_1=\varphi_3=0,\quad \varphi_2,\varphi_4 \text{ — свободны при } \alpha=0\,(S_0)$$

$$\varphi_1=\varphi_3=0,\quad \varphi_2,\varphi_4 \text{ — свободны при } \alpha=L/R\,(S_1) \tag{2.3}$$

Функция φ_5 задается на краю, равная единице. Задача состоит в отыскании управления $u=u(\alpha)$, оптимально (в смысле минимума I) переводящего рассматриваемый объект с многообразия S_0 $(\alpha=0)$ на многообразие S_1 $(\alpha=L/R)$ и удовлетворяющего системе уравнений (2.2) и ограничениям

$$u\leqslant\gamma,\qquad \varphi_5\geqslant\delta_{\min}/\delta_0 \tag{2.4}$$

где γ находится из условия (1.1).

Решение поставленной задачи может быть получено при помощи теоремы, называемой обобщенным принципом максимума [1].

3. Необходимое условие оптимальности при наличии ограничений для каждого участка траектории, не содержащего внутри точек, где выполнены условия скачка, для поставленной задачи имеет вид

$$\frac{d\varphi_j}{d\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} = F_j^*(\alpha, \varphi, u), \qquad \frac{d\psi_j}{d\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_j}$$

$$H = H(\psi, \alpha, u, \varphi) = \Sigma \psi_j F_j^*(\alpha), \qquad F_j^*(\alpha) = \frac{F_j(\alpha)}{\varphi_5} \tag{3.1}$$

$$H(\psi, \alpha, u, \varphi) = M(\psi, \alpha, \varphi), \qquad \psi_0(\alpha) = \mathrm{const} \leqslant 0$$

$$M(\psi, \alpha, \varphi) = \sup H(\psi, \alpha, u, \varphi)$$

В обоих концах траектории ($N = 0{,}1$) должны быть удовлетворены условия трансверсальности

$$M_N = \sum_{t_N=1}^{s_N} \nu_{t_N} \frac{\partial}{\partial \alpha} \xi_{t_N}(\alpha, \varphi_N)\,|_{\alpha_N} \tag{3.2}$$

$$\psi(\alpha_N) = \sum_{t_N=1}^{s_N} \nu_{t_N} \operatorname{grad} \xi_{t_N}(\alpha_N, \varphi)\,|_{\varphi_N}$$

где ν_{t_N}, t_N,S_N — производные постоянные, $\xi_{t_N}(\alpha, \varphi) = 0$ — системы уравнений, описывающих в пространстве многообразия S_0 и S_1.

Отсюда $\psi_2 = \psi_4 = \psi_6 = 0$, ψ_1, ψ_3 — произвольны при $\alpha_0 = 0$; $\psi_2 = \psi_4 = \psi_6 = 0$, ψ_1, ψ_3, ψ_5 — произвольны при $\alpha_1 = L / R$.

Для системы уравнений (2.2) получим

$$\frac{d\psi_1}{d\alpha} = -F_1(\alpha)\frac{\psi_4}{\varphi_5}, \qquad \frac{d\psi_2}{d\alpha} = -\psi_1 + F_2(\alpha)\frac{\psi_4}{\varphi_5}$$

$$\frac{d\psi_3}{d\alpha} = -\psi_2 + F_3(\alpha)\frac{\psi_4}{\varphi_5}, \qquad \frac{d\psi_4}{d\alpha} = -\psi_3 + F_4(\alpha)\frac{\psi_4}{\varphi_5} \tag{3.3}$$

$$\frac{d\psi_5}{d\alpha} = -\psi_0 - \left[\varphi_5 L_1(\alpha) - \sum_j F_j(\alpha)\right]\frac{\psi_4}{\varphi_5^2}, \qquad \frac{d\psi_6}{d\alpha} = -\psi_5 - L_2(\alpha)\frac{\psi_4}{\varphi_5}$$

$$L_1(\alpha) = -\varphi_1[\lambda^2(\varphi_5^2 - \varphi_5 + {}^1/_4) + \lambda u] - \lambda[2\varphi_6\varphi_2 + 2\varphi_5\varphi_3 - \varphi_3)$$

$$L_2(\alpha) = -\lambda(2\varphi_6\varphi_1 + 2\varphi_5\varphi_2 - \varphi_2) - 2\varphi_4$$

$$H = \psi_0\varphi_5 + \psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_3 + \psi_3\varphi_4 + \psi_4 F(\alpha) + \psi_5\varphi_6 + \psi_6 u$$

Ограничения (2.4) запишем в виде соотношений

$$\Phi_1(\alpha, \varphi, u) = u - \gamma \leqslant 0, \qquad \Phi_2(\alpha, \varphi, u) = -u - \gamma \leqslant 0 \tag{3.4}$$

$$x_3(\alpha, \varphi) = \delta_{\min} / \delta_0 - \varphi_5 \leqslant 0 \tag{3.5}$$

Соотношения (3.4) и (3.5) выделяют некоторую допустимую область, граница которой образована гиперповерхностями

$$\Phi_\nu(\alpha, \varphi, u) = 0 \qquad (\nu = 1, 2) \tag{3.6}$$

$$x_3(\alpha, \varphi) = 0 \tag{3.7}$$

Оптимальная траектория **$\varphi(\alpha)$** может содержать куски, принадлежащие **граничной поверхности (3.7)**. Любой из краев односвязного куска, принадлежащего граничной поверхности $x_3(\alpha, \varphi) = 0$, принято называть точкой стыка [2]; край, являющийся началом,— точкой входа (τ_0, $\varphi(\tau_0)$), а концом—точкой схода (τ_1, $\varphi(\tau_1)$). Может оказаться, что кусок состоит из единственной точки стыка — точки отражения траектории $\varphi(\alpha)$ от границы $x_3(\alpha, \varphi) = 0$ [1]. Такая точка будет одновременно и точкой входа и точкой схода.

Область u всюду определяется соотношениями (2.4), к которым в точках

$$d^r x_\nu / d\alpha^r = x_3{}^r(\alpha, \varphi) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, P_{\nu-1}) \tag{3.8}$$

необходимо присоединить соотношения

$$\frac{d^{P_\nu}}{d\alpha^{P_\nu}} x_3(\alpha, \varphi) = \Phi_3(\alpha, \varphi, u) \leqslant 0 \tag{3.9}$$

Выражения (3.8) и (3.9) в рассматриваемом случае имеют вид

$$x_3{}^1 = \varphi_6 = 0, \quad x_3{}^2 = \Phi_3(\alpha, \varphi, u) = -u \leqslant 0 \quad (\tau_0 \leqslant \alpha \leqslant \tau_1) \tag{3.10}$$

В точках входа $(\tau_0, \varphi(\tau_0))$ допустимой траектории на любую граничную гиперповерхность должны удовлетворяться условия (3.8), для чего необходимо на каждом односвязном куске выполнить условия скачка

$$\begin{gathered} M[\psi(\alpha^* + 0), \alpha^*, \varphi(\alpha^*)] = M[\psi(\alpha^* - 0), \alpha^*, \varphi(\alpha^*)] - \\ - \sum_{r=0}^{r_1} \varkappa_\nu{}^r \frac{\partial}{\partial\alpha} x_\nu{}^r(\alpha, \varphi)|_{\alpha^*} \\ \psi(\alpha^* + 0) = \psi(\alpha^* - 0) - \sum_{r=0}^{r_1} \varkappa_\nu{}^r \operatorname{grad} x_\nu{}^r(\alpha^*, \varphi)|_{\varphi(\alpha^*)} \\ (\tau_0 \leqslant \alpha^* \leqslant \tau_1) \\ r_1 = \begin{cases} P_\nu - 1, & \tau_0 \neq \tau_1 \\ P_\nu' - 1, & \tau_0 = \tau_1 \end{cases} \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $\varkappa_\nu{}^r$ —произвольные постоянные.

Условия скачка достаточно выполнить один раз в любой точке α^* отрезка $[\tau_0, \tau_1]$. Вследствие условий скачка (3.11) функции $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ непрерывны, а

$$\begin{gathered} \psi_5(\tau_1 + 0) = \psi_5(\tau_1 - 0) + \varkappa_3{}^0 \\ \psi_6(r_1 + 0) = \psi_6(\tau_1 - 0) + \varkappa_3{}^1 \\ M(\tau_1 + 0) - M(\tau_1 - 0) = (\psi_5{}^+ - \psi_5{}^-)\varphi_6(\tau_1) - (\psi_6{}^+ - \psi_6{}^-) \times \\ \times (u^+ - u^-) = \varkappa_3{}^0 \varphi_6(\tau_1) + \varkappa_3{}^1 u \end{gathered}$$

Отсюда $\varkappa_3{}^1 = 0$, т. е. функция ψ_6 также непрерывна. Из условия максимума функции H переменного $u(\alpha)$ получим

$$\begin{gathered} u = \gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) \\ K(\alpha, \varphi) = \frac{\psi_4}{2\varphi_5}[\lambda(1 - 2\varphi_5)\varphi_1 - 2\varphi_3] + \psi_6 \end{gathered} \tag{3.12}$$

Таким образом, имеем две системы дифференциальных уравнений (2.2) и (3.3) шестого порядка и систему 12 граничных условий (2.3) и (3.2), которые совместно с условием (3.12) и (3.10) для участков траектории, лежащих на граничной поверхности, дают необходимые условия для решения поставленной задачи.

4. Обозначим

$$u = u(\alpha) = \gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) = u_0 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1) \tag{4.1}$$

где α_1—первая точка «переключения» управления, соответствующая условию $K(\alpha_1, \varphi) = 0$. Будем считать, что на участке $0 \leqslant \alpha \leqslant L / R$ имеется n корней $K(\alpha, \varphi)$ и соответственно n точек переключений управления $u(\alpha)$. Проинтегрировав пятое и шестое уравнения системы (2.2), получим

$$\varphi_6 = u_0\alpha + C_1, \quad \varphi_5 = {}^1/_2 u_0\alpha^2 + C_1\alpha + C_2 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$$

$$\varphi_6 = - u_0\alpha + 2u_0\alpha_1 + C_1$$

$$\varphi_5 = - {}^1/_2 u_0\alpha^2 + (2u_0\alpha_1 + C_1)\alpha + C_2 - u_0\alpha_1^2$$

$$(\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2)$$

$$\varphi_6 = (-1)^n u_0\alpha + 2u_0 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha_i + C_1$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2}(-1)^n u_0\alpha^2 + \left[2u_0 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\alpha_i + C_1\right] \alpha + u_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (-1)^i + C_2 \tag{4.2}$$

$$(\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant L / R)$$

$$C_1 = \varphi_6(0), \qquad C_2 = \varphi_5(0)$$

После подстановки значений $\varphi_5(\alpha)$ и $\varphi_6(\alpha)$ в первые четыре уравнения систем (2.2) и (3.3) получаются линейные системы уравнений с переменными коэффициентами. Решение систем сводится к отысканию собственного значения δ_0, соответствующего нетривиальному решению.

Решение систем (2.2) и (3.3) представляется в виде, удовлетворяющем системе граничных условий

$$\varphi_j(\alpha) = a_j z(\alpha), \quad \psi_j(\alpha) = b_j z(\alpha) \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{4.3}$$

$$z(\alpha) = \begin{cases} \sin m\alpha & \text{при } j \text{ нечетных} \\ \cos m\alpha & \text{при } j \text{ четных} \end{cases}$$

После подстановки (4.3) в системы (2.2) и (3.3) получается уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \Bigl\{ \Bigl[mC_i - \rho_0^4 + \lambda^2 \Bigl(\frac{C_i^3}{3} - \frac{C_i^2}{2} + \frac{C_i}{4} - \frac{1}{12} \Bigr) - \lambda \Bigl(B_i^2 + \frac{1}{2} u_i \Bigr) - m(u_i +$$
$$+ C_i^2 - C_i) \Bigr] (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \Bigl[m^4 B_i + \lambda^2 \Bigl(C_i^2 B_i - B_i C_i + \frac{B_i}{4} \Bigr) + \lambda (4A_i B_i +$$
$$+ B_i u_i) - m^2 (2B_i C_i - B_i) \Bigr] \Bigl[\frac{1}{2} (\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) - l_1^{i+1} + l_1^{i} \Bigr] + \Bigl[m^4 A_i + \lambda^2 \Bigl(A_i C_i^2 -$$
$$- A_i C_i + C_i B_i^2 - \frac{1}{2} B_i^2 + \frac{1}{2} A_i \Bigr) - \lambda (4A_i^2 + A_i u_i) - m^2 \lambda (B_i^2 + 2A_i C_i -$$
$$- A_i) \Bigr] \Bigl[\frac{1}{3} (\alpha_{i+1}^3 - \alpha_i^3) - l_2^{i+1} + l_2^{i} \Bigr] + \Bigl[\lambda^2 \Bigl(\frac{2}{3} A_i B_i + \frac{1}{3} B_i^3 + \frac{2}{3} A_i B_i C_i -$$
$$- A_i B_i \Bigr) - 2m^2 \lambda A_i B_i \Bigr] \Bigl[\frac{1}{4} (\alpha_{i+1}^4 - \alpha_i^4) - l_3^{i+1} + l_3^{i} \Bigr] + \Bigl[\lambda^2 \Bigl(A_i B_i^2 + A_i C_i -$$
$$- \frac{1}{2} A_i^2 \Bigr) - m^2 \lambda A_i^2 \Bigl[\frac{1}{5} (\alpha_{i+1}^5 - \alpha_i^5) - l_4^{i+1} + l_4^{i} \Bigr] + \lambda^2 A_i B_i \Bigl[\frac{1}{6} (\alpha_{i+1}^6 -$$
$$- \alpha_i^6) - l_5^{i+1} + l_5^{i} \Bigr] + \frac{\lambda^2}{3} A_i^3 \Bigl[\frac{1}{7} (\alpha_{i+1}^7 - \alpha_i^7) - l_6^{i+1} + l_6^{i} \Bigr] + 4\lambda A_i^2 m (l_7^{i+1} -$$
$$- l_7^{i}) + 6\lambda A_i B_i m (l_8^{i+1} - l_8^{i}) + [2\lambda (B_i^2 + 2A_i C_i - 2A_i) m -$$
$$- 4A_i m^3] (l^{i+1} - l_9^{i}) \Bigr\} = 0 \tag{4.4}$$

Здесь

$$\rho_0^4 = \frac{qR}{\delta_0 E}(1-\mu^2)k^4(k^2-1) - \frac{\delta_0^2}{12R^2}k^4(k^2-1)^2$$

$$l_1^i = \frac{1}{4m^2}\cos 2m\alpha_i + \frac{1}{2m}\alpha_i \sin 2m\alpha_i$$

$$l_2^i = \frac{1}{2m^2}\alpha_i\cos 2m\alpha_i + \left(\frac{1}{2m}\alpha_i^2 - \frac{1}{8m^3}\right)\sin 2m\alpha_i$$

$$l_3^i = \left(\frac{3}{4m^2}\alpha_i^2 - \frac{1}{16m^4}\right)\cos 2m\alpha_i + \left(\frac{1}{2m}\alpha_i^3 - \frac{6}{8m^3}\alpha_i\right)\sin 2m\alpha_i$$

$$l_4^i = \frac{1}{2m}\alpha_i^4\sin 2m\alpha_i - \frac{2}{m}\left\{\left[\frac{3}{4m^2}\alpha_i^2 - \frac{6}{16m^4}\right]\sin 2m\alpha_i - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{8m^3}\alpha_i\right)\cos 2m\alpha_i\right\}$$

$$l_5^i = \frac{1}{2m}\alpha_i^5\sin 2m\alpha_i - \frac{5}{2m}\left\{-\frac{1}{2m}\alpha_i^4\cos 2m\alpha_i + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m}\left(\frac{3}{4m^2}\alpha_i^2 - \frac{1}{16m^4}\right)\cos 2m\alpha_i\right\}$$

$$l_6^i = \frac{1}{2m}\alpha_i^6\sin 2m\alpha_i - \frac{3}{m}\left\{\frac{1}{2m}\alpha_i^5\cos 2m\alpha_i + \frac{5}{2m}\left[\frac{1}{2m}\alpha_i^4\sin 2m\alpha_i - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{6}{4m^3}\alpha_i^2 - \frac{6}{8m^5}\right)\sin 2m\alpha_i - \left(\frac{1}{m^2}\alpha_i^3 - \frac{1}{4m^4}\alpha_i\right)\cos 2m\alpha_i\right]\right\}$$

$$l_7^i = \left(\frac{3}{4m^2}\alpha_i^2 - \frac{3}{16m^4}\right)\sin 2m\alpha_i - \left(\frac{1}{2m}\alpha_i^3 - \frac{1}{8m^3}\alpha_i\right)\cos 2m\alpha_i$$

$$l_8^i = \frac{1}{2m^2}\alpha_i\sin 2m\alpha_i - \left(\frac{1}{2m}\alpha_i^2 - \frac{1}{4m^3}\right)\cos 2m\alpha_i$$

$$l_9^i = \frac{1}{4m^2}\sin 2m\alpha_i - \frac{1}{2m}\alpha_i\cos 2m\alpha_i$$

где A_i^*, B_i^*, C_i^* — коэффициенты параболы $\varphi_5 = A_i^*\alpha^2 + B_i^*\alpha + C_i^*$ на каждом участке постоянства знака $u(\alpha)$, n—число переключений управления.

Значение δ_0 определится из условия равенства нулю выражения (4.4) при известных u_0, α_i, C_1, C_2. Для определения знака u_0 и значений α_i необходимо определить вспомогательные неизвестные ψ_6 и ψ_5.

В результате интегрирования пятого и шестого уравнений системы (3.3) получим:

1°. При наличии участка оптимальной траектории, находящегося на границе x_3 (τ_1, τ_2—точки схода и входа на граничную гиперповерхность

$$\psi_5 = -\psi_0\alpha - a_1b_4Q_1(\alpha) + A_1$$

$$\psi_6 = \psi_0\frac{\alpha^2}{2} + a_1b_4\int_0^\alpha Q_1(\alpha)\,d\alpha - A_1\alpha + A_2 - a_1b_4Q_2(\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \tau_1)$$

$$\psi_5 = -\psi_0\alpha - a_1b_4Q_1(\alpha) + A_1 + \varkappa_1$$

$$\psi_6 = \psi_0\frac{\alpha^2}{2} + a_1b_4\int_0^\alpha Q_1(\alpha)\,d\alpha - (A_1+\varkappa_1)\alpha + \varkappa_1\tau_1 + A_2 - a_1b_4Q_2(\alpha)$$

$$(\tau_1 \leqslant \alpha \leqslant \tau_2)$$

$$\psi_5 = -\psi_0\alpha + A_1 + \varkappa_1 + \varkappa_2 - a_1b_4Q_1(\alpha)$$

$$\psi_6 = \psi_0 \frac{\alpha^2}{2} - (A_1 + \varkappa_1 + \varkappa_2)\alpha + \varkappa_1\tau_1 + \varkappa_2\tau_2 + a_1b_4\left[Q_2(\alpha) + \int_0^\alpha Q_1(\alpha)\,d\alpha\right] + A_2$$

$$\left(\tau_2 \leqslant \alpha \leqslant \frac{L}{R}\right)$$

$$A_1 = \psi_5(0), \qquad A_2 = \psi_6(0)$$

$$Q_1(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\psi_4}{\varphi_5^2 a_1 b_4}\left[L_1(\alpha)\varphi_5 - \Sigma F_j(\alpha)\right] d\alpha$$

$$Q_2(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\psi_4}{\varphi_5 a_1 b_4} L_2(\alpha)\,d\alpha$$

2°. В случае, когда оптимум реализуется на траектории, не достигающей границы x_3

$$\psi_5 = -\psi_0\alpha - a_1b_4Q_1(\alpha) + A_1$$

$$\psi_6 = \psi_0\frac{\alpha^2}{2} + a_1b_4\int_0^\alpha Q_1(\alpha)\,d\alpha - a_1b_4Q_2(\alpha) - A_1\alpha + A_2$$

Задача об отыскании оптимального закона толщины $\delta(\alpha)$ сводится к определению неизвестных констант C_1, C_2, A_1, A_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1, τ_2, ψ_0, u_0 α_i $(i = 1,2, \ldots, n)$.

5. При определении неизвестных констант возможны два случая:

1°. Оптимальная траектория выходит на границу x_3. В этом случае необходимо определить $10 + n$ констант.

Для этого имеем $10 + n$ условий

$$\begin{gathered}\varphi_5(0) = 1, \quad \psi_6(0) = 0, \quad \varphi_5(\tau_0, \tau_1) = \delta_{\min}/\delta_0 \\ \varphi_6(\tau_0, \tau_1) = 0, \quad \psi_5(L/R) = 0, \quad \psi_6(L/R) = 0 \\ \varphi_5(\tau_2, \tau_i) = \delta_{\min}/\delta_0, \quad \varphi_6(\tau_2, \tau_i) = 0 \\ \psi_0 \leqslant 0, \quad u_0 = \gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1) \\ K(\alpha_i, \varphi) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\end{gathered} \tag{5.1}$$

Кроме того, $u \geqslant 0$ на участке $[\tau_0, \tau_1]$, $[\tau_2, \tau_i]$.

2°. Оптимальная траектория не имеет участков, лежащих на граничной гиперповерхности x_3. Тогда справедлив принцип максимума Понтрягина [2] для задачи с подвижными концами и закрепленным временем $(\alpha_1 = L/R)$. Число констант уменьшается до $6 + n$

$$C_1, C_2, A_1, A_2, \psi_0, u_0, \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_5(0) = 1, \quad \psi_6(0) = 0, \quad \psi_5(L/R) = 0, \quad \psi_6(L/R) = 0 \\ \psi_0 \leqslant 0, \quad u_0 = \gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1) \\ K(\alpha_i, \varphi) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\end{gathered} \tag{5.2}$$

Как показывают расчеты, для равномерного внешнего давления оптимум достигается на траектории, выходящей на границу только при $\delta_{\min}/\delta_0 = 1$. При $\delta_{\min}/\delta_0 < 1$ имеет место случай 2°. Поэтому могут рассматриваться только два соответствующих решения.

При $\delta_{\min} / \delta_0 = 1$, поскольку $\varphi_5(0) = 1$, естественно, $\tau_0 = 0$. Это несколько изменяет граничные условия: вместо условия $\psi_6(0) = 0$ необходимо $\varphi_6(0) = 0$. При этом возможны два варианта.

I. Величина $K(0^+, \varphi) > 0$, тогда вследствие условия (3.9) $u \geqslant 0$ на участке $[\tau_0, \tau_1]$ и отсюда $\gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) = u_0 > 0$, а $\tau_1 = 0$. Вследствие симметрии нагрузки и геометрии $\tau_2 = \tau_i = L / R$. Из условий $\varphi_5(0) = 1$ и $\varphi_6(0) = 0$ определяются C_1 и C_2, и выражение для $\varphi_5(\alpha)$ приобретает вид

$$\varphi_5(\alpha) = \frac{1}{2}(-1)^i u_0 \alpha^2 + 2u_0 \sum_{p=1}^{i} [\alpha_p(-1)^{p+1} \alpha + u_0 \alpha_p^2 (-1)^i] + 1 \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant L/R)$$

Из условия

$$\psi_5(L / R) = 0, \qquad A_1 = -\psi_0 L / R + a_1 b_4 Q_1(L / R)$$

а из условия

$$u_0 = \gamma \operatorname{sign} K(\alpha, \varphi) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$$

и выражения для $K(\alpha, \varphi)$ получим $-\operatorname{sign} A_1 = u_0 / \gamma$ или, учтя еще и однородность функции H относительно ψ, можно положить

$$A_1 = -\frac{u_0}{\gamma} a_1 b_4$$

Произвольная постоянная A_2 определяется из условия $\psi_6(L / R) = 0$

$$A_2 = a_1 b_4 \left[Q_2\left(\frac{L}{R}\right) - \frac{u_0 L}{\gamma R} - \psi_0 \frac{\alpha^2}{2R^2} - \int_0^{L/R} Q_1(\alpha)\, d\alpha \right]$$

Наконец, условия

$$K(\alpha_i, \varphi) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

приводят к системе n уравнений, которой совместно с условием

$$\psi_0 = \frac{R}{L} a_1 b_4 \left[Q_1\left(\frac{L}{R}\right) + \frac{u_0}{\gamma} \right] \leqslant 0$$

должны удовлетворять оптимальные значения констант α_i, число переключений n и знак u_0.

II. Величина $K(0^+, \varphi) < 0$. Тогда, $u_0 = 0$ вследствие условия $u \geqslant 0$ на участке $[\tau_0, \tau_1)$. Следовательно, $\tau_0 = 0$, а τ_1 должно быть определено. Выражения для $\varphi_5(\alpha)$ имеют вид

$$\varphi_5(\alpha) = 1 \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \tau_1)$$

$$\varphi_5(\alpha) = {}^1/_2 u_0 (\alpha - \tau_1)^2 + C_1(\alpha - \tau_1) + C_2 \qquad (\tau_1 \leqslant \alpha \leqslant \tau_2)$$

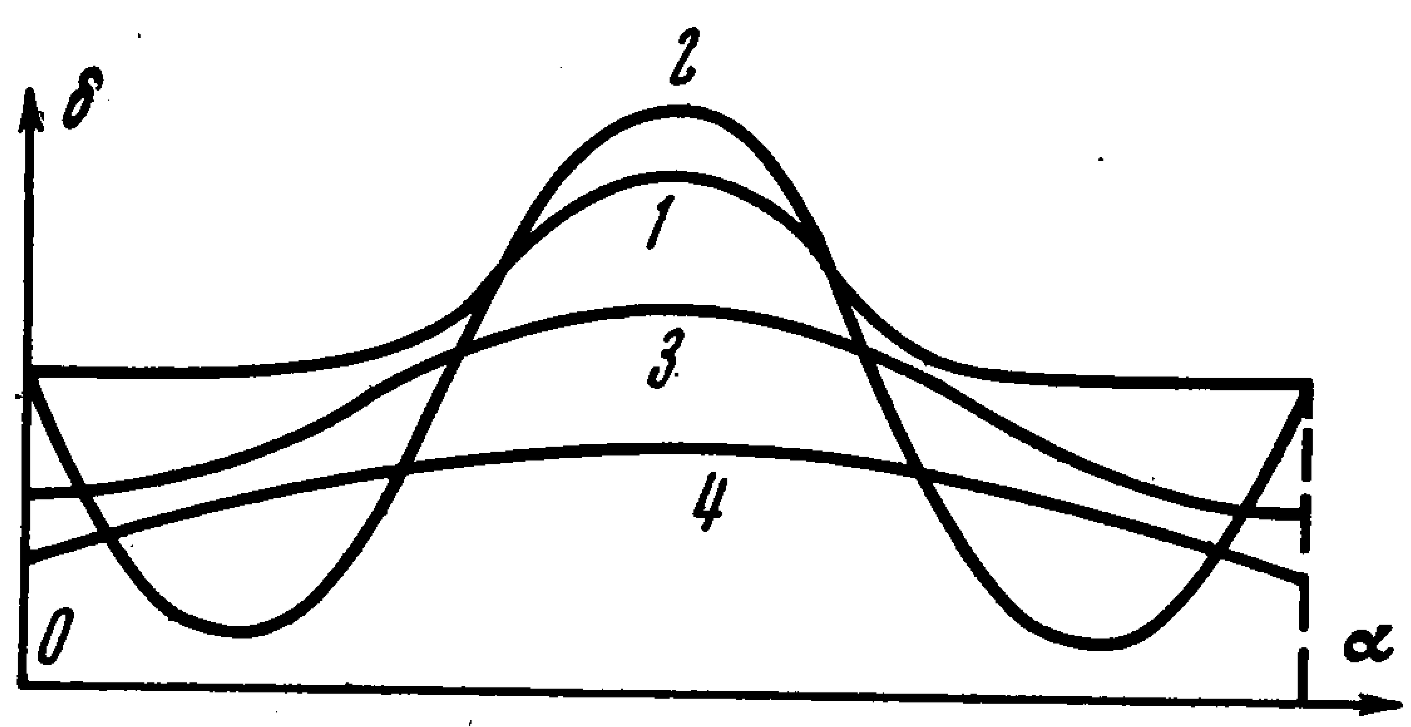
Далее $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ из условия $\varphi_5(\tau_1) = 1$, $\varphi_6(\tau_1) = 0$. Так как $u(\tau_1) = u_0 > 0$, то τ_1 определяется из условия $K(\tau_1, \varphi) = 0$.

Из условия $\psi_6(0) = 0$ определяется $A_2 = 0$. На участке $0 \leqslant \alpha \leqslant \tau_1$ условие $u_0 = -\operatorname{sign} A_1 \gamma$ не выполняется, поэтому в данном случае вследствие однородности $H(\alpha, \varphi, \psi, u)$ относительно ψ принимается $\psi_0 = -a_1 b_4 < 0$, а A_1 определяем из условия $\psi_5(L / R) = 0$. Оставшиеся условия $\varphi_5(\tau_2) = 1$, $\varphi_6(\tau_2) = 0$, $\psi_6(L / R) = 0$, а также $K(\alpha_i, \varphi) = 0$ ($i =$

$= 1,2, \ldots, n$) служат для определения констант $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и всех α_i. В случае $\delta_{\min} / \delta_0 < 1$ определение костант интегрирования аналогично случаю $\delta_{\min} / \delta_0 = 1$, $K(\alpha, \varphi) > 0$. Исключение составляет условие $\varphi_6(0) = 0$, которое заменяется условием $\psi_6(0) = 0$.

Полученные зависимости для определения неизвестных постоянных в общем случае представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которых трудоемко даже в простейшем случае $n = 1$. Поэтому для решения задачи построен алгоритм вычисления констант на ЭЦВМ «М-220». Программа имеет три разветвления соответственно случаям

1) $\delta_{\min}/\delta_0 = 1$, $K(0, \varphi) > 0$
2) $\delta_{\min}/\delta_0 = 1$, $K(0, \varphi) < 0$
3) $\delta_{\min}/\delta_0 < 1$



Расчет ведется, начиная с $\delta = \delta_{\min}$, по зависимостям случая 1). Для определения α_i используется стандартная программа решения нелинейных алгебраических уравнений. Входящие в выражения $\psi_5(\alpha)$ и $\psi_6(\alpha)$ интегралы берутся численно также при помощи стандартной программы. Полученные значения констант подставляются в выражение (4.4) для проверки. При невыполнении условия I расчет ведется по условию II, если же выражение (4.4) не равно нулю, то происходит прибавление $\delta_{\min} + \Delta\delta$, и расчет начинается сначала для случая 3).

В процессе счета при каждом δ_0 число n определяется путем сравнения нескольких вариантов счета. На фигуре приведены результаты расчета распределения толщины для цилиндрической оболочки при $L / R = 2$ с учетом ограничения $x_3 \leqslant 0$ и без него. Кривым *1—4* соответствуют: *1* — $q^0 = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{\delta_{\min}}\right) = 0{,}035$, $\delta_{\min} = 0{,}08$, $x_3 \leqslant 0$; *2* — $= 0.035$, $\delta_{\min} = 0{,}08$, *3* — $q^0 = 0{,}035$, $\delta_{\min} = 0{,}05$, *4* — $q^0 = 0.02$, $\delta_{\min} = 0{,}03$.

Поступила 20 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронов В. П. Принцип максимума для процессов с ограничениями общего вида, I, II. Автоматика и телемеханика, 1967, № 3, 4.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе О. Б., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
3. Амосов А. А. К расчету пологих оболочек переменной толщины и кривизны. Изв. АН ССР, МТТ, 1969, № 6.